ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ασκήσεις και Θέματα στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

Γιάννης Σαραντόπουλος

Αθήνα

11 Νοεμβρίου 2020

Περιεχόμενα

Συμβολισμός και Ορολογία **i**

1 Χώρος Μέτρου–Μετρήσιμα Σύνολα–Μέτρο Lebesgue **1**

1.1 Παραδείγματα 1

1.2 Ασκήσεις 5

2 Lebesgue Μετρήσιμες Συναρτήσεις **7**

2.1 Παραδείγματα 7

2.2 Ασκήσεις 12

3 Ολοκλήρωμα Lebesgue **15**

3.1 Μερικά Βασικά Αποτελέσματα 15

3.2 Παραδείγματα 17

3.3 Ασκήσεις 30

4 Λυμένες Ασκήσεις **39**

4.1 Ακαδημαϊκό έτος 2016–17 39

4.2 Ακαδημαϊκό έτος 2015–16 46

4.3 Ακαδημαϊκό έτος 2014–15 53

4.4 Ακαδημαϊκό έτος 2013–14 68

4.5 Ακαδημαϊκό έτος 2012–13 84

4.6 Ακαδημαϊκό έτος 2011–12 99

4.7 Ακαδημαϊκό έτος 2010–11 115

4.8 Ακαδημαϊκό έτος 2009–10 135

4.9 Ακαδημαϊκό έτος 2008–9 150
4.10 Ακαδημαϊκό έτος 2007–8 167
4.11 Ακαδημαϊκό έτος 2004–5 180
4.12 Ακαδημαϊκό έτος 2003–4 209

5 Θέματα Εξετάσεων 225

5.1 Ακαδημαϊκό έτος 2015–16 225
5.2 Ακαδημαϊκό έτος 2014–15 237
5.3 Ακαδημαϊκό έτος 2013–14 248
5.4 Ακαδημαϊκό έτος 2012–13 257
5.5 Ακαδημαϊκό έτος 2011–12 267
5.6 Ακαδημαϊκό έτος 2010–11 278
5.7 Ακαδημαϊκό έτος 2009–10 290
5.8 Ακαδημαϊκό έτος 2008–9 306
5.9 Ακαδημαϊκό έτος 2007–8 323
5.10 Ακαδημαϊκό έτος 2004–5 337
5.11 Ακαδημαϊκό έτος 2003–4 350

Βιβλιογραφία 365

Ευρετήριο 367

Συμβολισμός και Ορολογία

- $\mathbb{R}$- το σύνολο των πραγματικών αριθμών
- $\mathbb{R}_+$- το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών
- $\overline{\mathbb{R}}$—**το επεκταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών**. Είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ στο οποίο έχουμε προσθέσει δύο στοιχεία, το ∞ (ή $+\infty$) και το $-\infty$. Δηλαδή $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, ή , όπως συνήθως γράφεται, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.
- $\mathbb{Z}$- το σύνολο των ακεραίων
- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$-το σύνολο των φυσικών αριθμών
- $\mathbb{N}^*$- το σύνολο των θετικών ακεραίων
- $\mathbb{Q}$- το σύνολο των ρητών
- Αν $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$,

  $$(2n)!! = 2{\cdot}4{\cdot}6 \cdots (2n{-}2)(2n) \quad \text{και} \quad (2n{+}1)!! = 1{\cdot}3{\cdot}5 \cdots (2n{-}1)(2n{+}1)\,.$$

  Είναι $0! := 1$.

Αν το X είναι ένα σύνολο, τότε

- $\mathcal{P}\,(X)$- είναι το **δυναμοσύνολο** του συνόλου X,
- $B \setminus A = \{x : \, x \in B \text{ και } x \notin A\}$- είναι **η διαφορά** των συνόλων A και B ή **το συμπλήρωμα** του A ως προς το B (A και B είναι δύο υποσύνολα του X),

- $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$- είναι **το συμπλήρωμα του** A **ως προς το** X,
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$- είναι **η συμμετρική διαφορά** των συνόλων A και B.
- $\mathrm{card}A$ ή $|A|$- ο πληθάριθμος ενός συνόλου A
- $\aleph_0$- ο πληθάριθμος του $\mathbb{N}$
- $\mathfrak{c}$- ο πληθάριθμος του $\mathbb{R}$ (**πληθάριθμος του συνεχούς**)
- C-**τριαδικό σύνολο Cantor**
- C_a, $0 < a \leq 1$-**γενικευμένο σύνολο Cantor**
- $(X, \mathfrak{M})$-**μετρήσιμος χώρος**
- $(X, \mathfrak{M}, \mu)$-**χώρος μέτρου**

Αν (a_n) είναι πραγματική ακολουθία, τότε

- $\liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf\limits_{k\geq n} a_k \right)$-είναι το **κατώτερο όριο** της ακολουθίας (a_n),
- $\limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}\, a_n := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup\limits_{k\geq n} a_k \right)$-είναι το **ανώτερο όριο** της ακολουθίας (a_n).
- Το $c \in \mathbb{R}$ είναι ένα **οριακό σημείο** της ακολουθίας (a_n) αν υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = c$.
- Έστω S είναι το σύνολο των οριακών σημείων της ακολουθίας (a_n). Ισοδύναμα, το κατώτερο όριο $\underline{\lim}\, a_n$ και το ανώτερο όριο $\overline{\lim}\, a_n$ της ακολουθίας (a_n) ορίζονται ως εξής

$$\underline{\lim}\, a_n = \begin{cases} -\infty & \text{αν η } (a_n) \text{ δεν είναι κάτω φραγμένη },\\ +\infty & \text{αν η } (a_n) \text{ είναι κάτω φραγμένη και } S = \emptyset \text{ },\\ \inf S & \text{αν η } (a_n) \text{ είναι κάτω φραγμένη και } S \neq \emptyset \text{ }, \end{cases}$$

$$\overline{\lim}\, a_n = \begin{cases} +\infty & \text{αν η } (a_n) \text{ δεν είναι άνω φραγμένη },\\ -\infty & \text{αν η } (a_n) \text{ είναι άνω φραγμένη και } S=\emptyset\ ,\\ \sup S & \text{αν η } (a_n) \text{ είναι άνω φραγμένη και } S\neq\emptyset\ . \end{cases}$$

Αν (A_n) είναι μια ακολουθία υποσυνόλων ενός συνόλου X, τότε

- $A_n \nearrow$ -αύξουσα ακολουθία συνόλων, δηλαδή

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots .$$

- $A_n \searrow$ -φθίνουσα ακολουθία συνόλων, δηλαδή

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots .$$

- $\liminf_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim}\, A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ -είναι το **κατώτερο όριο** της ακολουθίας (A_n),
- $\limsup_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}\, A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ -είναι το **ανώτερο όριο** της ακολουθίας (A_n).
- $\ell\,(I)$-μήκος ενός διαστήματος I
- m^*- **εξωτερικό μέτρο Lebesgue**
- m-**μέτρο Lebesgue**
- $\mathcal{M}$- η σ-άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$
- $\mathfrak{B}$-**Borel σ- άλγεβρα**.
- $\sigma.\pi.$-σχεδόν παντού,
- χ_A-η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$,
- $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{I_k}$- **κλιμακωτή συνάρτηση**, όπου $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ και $I_1, I_2, \ldots, I_n$ είναι φραγμένα διαστήματα ξένα ανά δύο,

- $s = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$-**απλή συνάρτηση**, όπου $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ και $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα ξένα ανά δύο,

- Αν $E \in \mathcal{M}$, η επεκταμένη συνάρτηση $f : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται **μετρήσιμη** αν
$$f^{-1}(U) = \{x \in E : f(x) \in U\} \in \mathcal{M}\,,$$
δηλαδή το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι μετρήσιμο, για κάθε ανοικτό σύνολο U του $\overline{\mathbb{R}}$.

Αν $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ είναι μια συνάρτηση, τότε

- $f^{+}(x) = \max\{f(x), 0\}$-είναι το θετικό μέρος της f,

- $f^{-}(x) = \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\}$-είναι το αρνητικό μέρος της f,

- $f = f^{+} - f^{-}$ και $|f| = f^{+} + f^{-}$.

- Το **ακέραιο μέρος** του $x \in \mathbb{R}$, συμβολίζεται με $[x]$, είναι ο μοναδικός ακέραιος $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $k \leq x < k+1$.

Οι πραγματικές συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες σε μια περιοχή του $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 0$, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός
$$f(x) = o\,(g(x)) \quad (x \to x_0)\ .$$

- Αν το πηλίκο $f(x)/g(x)$ είναι φραγμένο σε μια περιοχή του $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός
$$f(x) = O\,(g(x)) \quad (x \to x_0)\ .$$

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 1$, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός
$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0)\ .$$

- Αν $E \in \mathcal{M}$ και η $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, **το ολοκλήρωμα Lebesgue της** f **πάνω στο** E ορίζεται ως εξής

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}m(x)$$
$$:= \sup\left\{\int_E s\,\mathrm{d}m : \ 0 \le s \le f \ \text{ στο } E\,, \text{ όπου } s \text{ είναι απλή συνάρτηση}\right\}.$$

Αν $E \in \mathcal{M}$ και η επεκταμένη συνάρτηση $f : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη, τότε

- $\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m := \int_{\mathbb{R}} f^+\,\mathrm{d}m - \int_{\mathbb{R}} f^-\,\mathrm{d}m$- είναι το ολοκλήρωμα της f, όπου ένα τουλάχιστον από τα ολοκληρώματα $\int_{\mathbb{R}} f^+\,\mathrm{d}m$ και $\int_{\mathbb{R}} f^-\,\mathrm{d}m$ είναι πεπερασμένο. Λέμε ότι **το ολοκλήρωμα** $\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m$ **υπάρχει**.

- Η $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ **είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη**, ή απλά **ολοκληρώσιμη στο** E, αν το ολοκλήρωμα $\int_E f\,\mathrm{d}m$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο, δηλαδή αν $\int_E f^-\,\mathrm{d}m < \infty$ και $\int_E f^+\,\mathrm{d}m < \infty$. Ισοδύναμα, $\int_E |f|\,\mathrm{d}m < \infty$.

- $L_1(E)$- ο χώρος των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Κεφάλαιο 1

Χώρος Μέτρου–Μετρήσιμα Σύνολα–Μέτρο Lebesgue

1.1 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.1.1. *Έστω* $(X, \mathfrak{M})$ *μετρήσιμος χώρος και έστω* $\mathfrak{A}$ *το σύνολο των θετικών μέτρων στη* σ*-άλγεβρα* $\mathfrak{M}$. *Υποθέτουμε ότι για κάθε* $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{A}$, *υπάρχει* $\mu_3 \in \mathfrak{A}$ *τέτοιο ώστε* $\mu_3 \geq \max\{\mu_1, \mu_2\}$. *Αν*

$$\nu(E) := \sup\{\mu(E) : \mu \in \mathfrak{A}\}\ , \quad \text{για κάθε}\, E \in \mathfrak{M}\,,$$

να αποδειχθεί ότι το ν *είναι ένα θετικό μέτρο στη* σ*-άλγεβρα* $\mathfrak{M}$.

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι $\nu(\emptyset) = 0$. Αν $E, F \in \mathfrak{M}$ με $E \subseteq F$, από τον ορισμό του ν έπεται ότι $\nu(E) \leq \nu(F)$.
Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων συνόλων ξένων ανά δύο. Τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)\,, \quad \text{για κάθε}\, \mu \in \mathfrak{A}$$

και επομένως

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)\,.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$. Αυτή η ανισότητα προφανώς ισχύει στην περίπτωση που υπάρχει ένα τουλάχιστον $n \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε $\nu(A_n) = \infty$. Πράγματι, επειδή $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A_n$, θα είναι

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \nu(A_n) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)\,.$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\nu(A_n) < \infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παίρνουμε το $n \in \mathbb{N}^*$ σταθερό. Για κάθε $\varepsilon > 0$, από τον ορισμό του ν συνεπάγεται ότι για κάθε k, $1 \leq k \leq n$, υπάρχει μέτρο $\mu_k \in \mathfrak{A}$ τέτοιο ώστε

$$\nu(A_k) - \frac{\varepsilon}{n} < \mu_k(A_k)\,.$$

Αν $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathfrak{A}$, από την υπόθεση επαγωγικά αποδεικνύεται ότι υπάρχει $\mu \in \mathfrak{A}$ τέτοιο ώστε $\mu_k \leq \mu$, $k = 1, \ldots, n$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \nu(A_k) - \varepsilon &< \sum_{k=1}^{n} \mu_k(A_k) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \\
&= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \\
&\leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\,.
\end{aligned}$$

Δηλαδή $\sum_{k=1}^{n} \nu(A_k) - \varepsilon < \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$, για κάθε $\varepsilon > 0$ και αυτό συνεπάγεται ότι $\sum_{k=1}^{n} \nu(A_k) \leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$. Άρα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu(A_k) \leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\,.$$

□

Παράδειγμα 1.1.2. *Αν $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ είναι μια αρίθμηση των ρητών α-ριθμών και*

$$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(r_n - \frac{1}{n^2},\, r_n + \frac{1}{n^2}\right)\,,$$

να αποδειχθεί ότι $m(G \triangle F) > 0$*, για κάθε κλειστό σύνολο* F.

Απόδειξη. Αν $m(G \setminus F) > 0$, επειδή $G \triangle F = (G \setminus F) \cup (F \setminus G)$, τότε $m(G \triangle F) > 0$.
Υποθέτουμε ότι $m(G \setminus F) = 0$. Όμως το $G \setminus F$ είναι ανοικτό σύνολο και ως γνωστόν κάθε ανοικτό σύνολο έχει θετικό μέτρο Lebesgue. Επομένως θα πρέπει να είναι $G \subseteq F$, οπότε $G \setminus F = \emptyset$. Επειδή το G περιέχει το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, θα πρέπει να είναι $F = \mathbb{R}$. Κατά συνέπεια $m(F) = m(\mathbb{R}) = \infty$. Επειδή

$$m(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m\left(r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

και $m(F) = m(F \setminus G) + m(G) = \infty$, συνεπάγεται ότι $m(F \setminus G) = \infty$. Τότε $m(G \triangle F) = m(F \setminus G) = \infty$. Άρα, $m(G \triangle F) > 0$. □

Παράδειγμα 1.1.3. *Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει μετρήσιμο σύνολο* $E \subset \mathbb{R}$*, τέτοιο ώστε για κάθε διάστημα* I *να είναι* $m(E \cap I) = \frac{m(I)}{2}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ένα τέτοιο μετρήσιμο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$ υπάρχει. Τότε, $m(E \cap [0,1]) = 1/2$. Από τον ορισμό του (εξωτερικού) μέτρου Lebegue, για $\varepsilon = 1/2$ υπάρχει ακολουθία φραγμένων διαστημάτων (I_n) με $E \cap [0,1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < m(E \cap [0,1]) + \frac{1}{2} = 1\,.$$

Επειδή

$$E \cap [0,1] = E \cap [0,1] \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(E \cap [0,1] \cap I_n\right)\,,$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} = m(E\cap[0,1]) &= m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\cap[0,1]\cap I_n)\right)\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} m(E\cap[0,1]\cap I_n)\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} m(E\cap I_n)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) && (m(E\cap I_n) = \tfrac{m(I_n)}{2})\\ &< \frac{1}{2}, && (\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < 1)\end{aligned}$$

άτοπο. Άρα, δεν υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$ με $m(E\cap I) = \frac{m(I)}{2}$ για κάθε διάστημα I. □

Παράδειγμα 1.1.4. *Έστω S το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο $[0,1]$ τέτοιο ώστε $x \in S$ αν και μόνο αν το δεκαδικό ανάπτυγμα του x περιέχει το ψηφίο 2 και η πρώτη εμφάνιση του ψηφίου 2 να προηγείται της πρώτης εμφάνισης του ψηφίου 3. Να αποδειχθεί ότι το S είναι σύνολο Borel και να υπολογιστεί το μέτρο Lebesgue του S.*

Λύση. Το ψηφίο 2 εμφανίζεται στην πρώτη δεκαδική θέση μόνο στο διάστημα $I_{1,1} = [0.2, 0.3]$ που το μήκος του είναι $1/10$. Ας σημειωθεί ότι στο δεκαδικό ανάπτυγμα το $0.3 = 0.2999\cdots$. Για να μην προηγείται το ψηφίο 3 του ψηφίου 2, το ψηφίο 2 μπορεί να εμφανιστεί για πρώτη φορά στη δεύτερη δεκαδική θέση μόνο στο καθένα από τα παρακάτω 8 διαστήματα

$$I_{2,1} = [0.02, 0.03],\ I_{2,2} = [0.12, 0.13],\ I_{2,3} = [0.42, 0.43],\ \ldots,\ I_{2,8} = [0.92, 0.93]\,,$$

μήκους $1/10^2$. Στο n-οστό βήμα, για να μην προηγείται το ψηφίο 3 του ψηφίου 2, το ψηφίο 2 μπορεί να εμφανιστεί για πρώτη φορά στη n-οστή δεκαδική θέση μόνο στο καθένα από τα 8^{n-1} διαστήματα $I_{n,k}$, $1 \le k \le 8^{n-1}$, μήκους $1/10^n$. Τα διαστήματα $I_{n,k}$ είναι τέτοια ώστε τα άκρα τους δεν περιέχουν τα ψηφία 2 και 3 στις $n-1$ πρώτες θέσεις των δεκαδικών αναπτυγμάτων τους. Επομένως,

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{8^{n-1}} I_{n,k} \right),$$

όπου τα διαστήματα $I_{n,k}$ ($1 \leq k \leq 8^{n-1}$), για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, είναι ξένα ανά δύο και έχουν μήκος $1/10^n$. Το S είναι ένα σύνολο Borel με μέτρο Lebesgue

$$m(S) = \sum_{n=1}^{\infty} m \left(\bigcup_{k=1}^{8^{n-1}} I_{n,k} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n-1}}{10^n} = \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5} \right)^{n-1} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1-4/5} = \frac{1}{2}.$$

■

1.2 Ασκήσεις

1. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ είναι ένας χώρος πιθανότητας, δηλαδή ένας χώρος μέτρου με $P(\Omega) = 1$. Αν (A_n), $A_n \in \mathcal{A}$, είναι ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $P(A_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.

2. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ είναι ένας χώρος πιθανότητας. Λέμε ότι τα μετρήσιμα σύνολα E, F είναι **ανεξάρτητα**, αν $P(E \cap F) = P(E) \cap P(F)$. Θα λέμε ότι τα μετρήσιμα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι **πλήρως ανεξάρτητα**, αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ του $\{1, 2, \ldots, n\}$ είναι

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_m}) .$$

Τέλος, τα μετρήσιμα σύνολα μιας ακολουθίας (A_n) είναι *πλήρως ανεξάρτητα* αν κάθε πεπερασμένο το πλήθος από αυτά είναι πλήρως ανεξάρτητα.

(α΄) Αν τα μετρήσιμα σύνολα E, F είναι ανεξάρτητα, να αποδειχθεί ότι και τα E, F^c είναι ανεξάρτητα.

(β΄) Υποθέτουμε ότι τα μετρήσιμα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι πλήρως ανεξάρτητα.

(*i*) Να αποδειχθεί ότι τα σύνολα $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ και A_n είναι ανεξάρτητα.

(*ii*) Να αποδειχθεί ότι

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(A_k^c\right) .$$

3. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ είναι ένας χώρος πιθανότητας. Αν τα μετρήσιμα σύνολα μιας ακολουθίας (A_n) είναι πλήρως ανεξάρτητα και $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) = \infty$, να αποδειχθεί ότι

$$P\left(\overline{\lim} A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1 .$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $e^{-x} \geq 1 - x$, $x \geq 0$, να αποδειχθεί ότι $P\left(E_n^c\right) = 0$, όπου $E_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

4. Έστω $E_i \subset (0,1)$, $1 \leq i \leq n$, μετρήσιμα σύνολα με $\sum_{i=1}^{n} m\left(E_i\right) > n-1$. Να αποδειχθεί ότι $m\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) > 0$.

5. Υποθέτουμε ότι το $E \subset [0,1]$ είναι μετρήσιμο σύνολο με $m\left(E\right) = 1$. Να αποδειχθεί ότι το E είναι σύνολο πυκνό στο $[0,1]$.

6. Έστω $E \subset \mathbb{R}$ ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m\left(E\right) < \infty$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει φθίνουσα ακολουθία ανοικτών συνόλων (G_n) τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} m\left(G_n\right) = m\left(E\right)$.

7. (α΄) Αν τα $E, F \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμα σύνολα, να αποδειχθεί ότι

$$m\left(E \cup F\right) + m\left(E \cap F\right) = m\left(E\right) + m\left(F\right) .$$

(β΄) Αν τα A, B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι

$$m^*\left(A \cup B\right) + m^*\left(A \cap B\right) \leq m^*\left(A\right) + m^*\left(B\right) .$$

Κεφάλαιο 2

Lebesgue Μετρήσιμες Συναρτήσεις

2.1 Παραδείγματα

Παράδειγμα 2.1.1. (Ένα κριτήριο για τη σχεδόν παντού σύγκλιση) *Έστω* (f_n), $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$, *ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων ορισμένων στο σύνολο* $E \in \mathcal{M}$.

(α΄) Για κάθε $\varepsilon > 0$ *να αποδειχθεί ότι*

$$\begin{aligned}\left\{x \in E : \overline{\lim}\,|f_n(x)| > \varepsilon\right\} &\subseteq \overline{\lim}\,\{x \in E : |f_n(x)| > \varepsilon\} \\ &\subseteq \overline{\lim}\,\{x \in E : |f_n(x)| \geq \varepsilon\} \\ &\subseteq \left\{x \in E : \overline{\lim}\,|f_n(x)| \geq \varepsilon\right\} .\end{aligned}$$

Εξετάστε αν υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων (f_n) *και* $\varepsilon > 0$, *για τα οποία οι παραπάνω εγκλεισμοί είναι αυστηροί.*

(β΄) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (f_n) *συγκλίνει σχεδόν παντού στο* 0, *ισοδύναμα*

$$m\left(\{x \in E : \overline{\lim}\,|f_n(x)| > 0\}\right) = 0\,,$$

αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ *είναι* $m\left(\overline{\lim}\{x \in E : |f_n(x)| > \varepsilon\}\right) = 0$.

(γ′) Να αποδειχθεί το παρακάτω κριτήριο για τη σχεδόν παντού σύγκλιση:

> *Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} m\left(\{x \in E : |f_n(x)| > \varepsilon\}\right)$ συγκλίνει, τότε η ακολουθία (f_n) συγκλίνει σχεδόν παντού στο 0.*

Απόδειξη. (α′) Έστω $\varepsilon > 0$. Υποθέτουμε ότι το $x \in E$ είναι τέτοιο ώστε

$$\alpha = \overline{\lim}\, |f_n(x)| > \varepsilon\,.$$

Ο ορισμός του ανώτερου ορίου της ακολουθίας $(|f_n(x)|)$ συνεπάγεται ότι $\sup\limits_{k\geq n}|f_k(x)| \geq \alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε υπάρχει $N \geq n$, τέτοιο ώστε

$$|f_N(x)| > \sup_{k\geq n} |f_k(x)| - (\alpha - \varepsilon) \geq \varepsilon\,.$$

Επομένως, η ανισότητα $|f_n(x)| > \varepsilon$ ισχύει για άπειρα το πλήθος $n \in \mathbb{N}^*$. Ισοδύναμα, $x \in \overline{\lim}\, A_n$, όπου $A_n := \{x \in E : |f_n(x)| > \varepsilon\}$. Άρα,

$$\left\{x \in E : \overline{\lim}\, |f_n(x)| > \varepsilon\right\} \subseteq \overline{\lim}\{x \in E : |f_n(x)| > \varepsilon\}\,.$$

Είναι $\{x \in E : |f_n(x)| > \varepsilon\} \subseteq \{x \in E : |f_n(x)| \geq \varepsilon\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και αυτό συνεπάγεται ότι

$$\overline{\lim}\,\{x \in E : |f_n(x)| > \varepsilon\} \subseteq \overline{\lim}\,\{x \in E : |f_n(x)| \geq \varepsilon\}\;.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $x \in \overline{\lim}\, B_n$, όπου $B_n := \{x \in E : |f_n(x)| \geq \varepsilon\}$. Τότε το $x \in B_n$ για άπειρα το πλήθος $n \in \mathbb{N}^*$ και κατά συνέπεια $\sup\limits_{k\geq n} |f_k(x)| \geq \varepsilon$. Επομένως,

$$\overline{\lim}\, |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |f_k(x)| \geq \varepsilon\,.$$

Άρα,

$$\overline{\lim}\,\{x \in E : |f_n(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \left\{x \in E : \overline{\lim}\, |f_n(x)| \geq \varepsilon\right\}\;.$$

Έστω τώρα $\varepsilon = 1$ και έστω (f_n) η ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων με

$$f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\chi_{[0,1]} + \chi_{(1,2]} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\chi_{(2,3]}\,.$$

Τότε, $\overline{\lim} f_n = \chi_{[0,3]}$, $\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > 1\} = [0,1]$ και $\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \geq 1\} = [0,2]$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\left\{x \in \mathbb{R} : \underline{\lim}\, f_n(x) > 1\right\} = \emptyset \subset [0,1] &= \underline{\lim}\,\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > 1\} \\ \subset [0,2] &= \overline{\lim}\,\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \geq 1\} \\ \subset [0,3] &= \left\{x \in \mathbb{R} : \overline{\lim}\, f_n(x) \geq 1\right\}.\end{aligned}$$

(β΄) Έστω η ακολουθία (f_n) συγκλίνει σχεδόν παντού στο 0, δηλαδή $m\left(\left\{x \in E : \overline{\lim}\,|f_n(x)| > 0\right\}\right) = 0$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι

$$\left\{x \in E : \overline{\lim}\,|f_n(x)| \geq \varepsilon\right\} \subseteq \left\{x \in E : \overline{\lim}\,|f_n(x)| > 0\right\}$$

και από το (α΄)

$$\overline{\lim}\,\{x \in E : |f_n(x)| > \varepsilon\} \subseteq \left\{x \in E : \overline{\lim}\,|f_n(x)| \geq \varepsilon\right\}.$$

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι $m\left(\overline{\lim}\,\{x \in E : |f_n(x)| > \varepsilon\}\right) = 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι

$$m\left(\overline{\lim}\,\{x \in E : |f_n(x)| > \varepsilon\}\right) = 0\,, \text{ για κάθε } \varepsilon > 0.$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ το σύνολο $A_k := \left\{x \in E : \overline{\lim}\,|f_n(x)| > \frac{1}{k}\right\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Επειδή από το (α΄) είναι $A_k \subseteq \overline{\lim}\left\{x \in E : |f_n(x)| > \frac{1}{k}\right\}$, από την υπόθεση έπεται ότι $m(A_k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Όμως η ακολουθία (A_k) είναι αύξουσα, $A_k \nearrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \left\{x \in E : \overline{\lim}\,|f_n(x)| > 0\right\}$ και από γνωστή ιδιότητα του μέτρου

$$m\left(\{x \in E : \overline{\lim}\,|f_n(x)| > 0\}\right) = \lim_{k\to\infty} m(A_k) = 0\,.$$

Άρα, η ακολουθία (f_n) συγκλίνει σχεδόν παντού στο 0.

(γ΄) Επειδή για κάθε $\varepsilon > 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} m(\{x \in E : |f_n(x)| > \varepsilon\})$ συγκλίνει, από το λήμμα Borel– Cantelli[17] έχουμε ότι

$$m\left(\overline{\lim}\{x \in E : |f_n(x)| > \varepsilon\}\right) = 0\,.$$

Τότε, από το (β΄) έπεται ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει σχεδόν παντού στο 0.

$\square$

Παράδειγμα 2.1.2. *Έστω (f_n), $f_n : E \to \mathbb{R}$, ακολουθία συναρτήσεων συνεχών σχεδόν παντού στο μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$. Αν $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ομοιόμορφα στο E, τότε η f είναι συνεχής σχεδόν παντού στο E.*

Λύση. Έστω $D_n := \{x \in E : \text{η } f_n \text{ δεν είναι συνεχής στο } x\}$. Από την υπόθεση είναι $m(D_n) = 0$. Αν $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, τότε $m(D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(D_n) = 0$. Επομένως $m(D) = 0$. Επειδή οι συναρτήσεις f_n είναι συνεχείς στο $E \setminus D$ και η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο σύνολο $E \setminus D$, η f θα είναι συνεχής στο $E \setminus D$. Άρα, η f είναι συνεχής σχεδόν παντού στο E. ■

Παράδειγμα 2.1.3. *Έστω η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$ και συνεχής. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) Αν $E \subset [a, b]$ και $m(E) = 0$, τότε $m(f(E)) = 0$.

(ii) Για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subset [a, b]$, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο σύνολο.

Απόδειξη. Το πεδίο τιμών της f είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα, έστω $f([a, b]) = [c, d]$. Η συνάρτηση $f : [a, b] \to [c, d]$ είναι συνεχής και γνήσια μονότονη.

$\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$ Αν το $A \subset [a, b]$ είναι μετρήσιμο σύνολο, τότε ως γνωστόν $A = F \cup N$, όπου $F \subset A$ είναι ένα F_σ σύνολο και $N \subset A$ με $m(N) = 0$. Έστω $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, όπου (F_n) είναι ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του $[a, b]$. Τα F_n είναι συμπαγή σύνολα. Είναι $f(F) = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(F_n)$, οπότε

$$f(A) = f(F \cup N) = f(F) \cup f(N) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(F_n)\right) \cup f(N).$$

Τα σύνολα $f(F_n)$ είναι συμπαγή και επομένως μετρήσιμα ($\bigcup_{n=1}^{\infty} f(F_n)$ είναι ένα F_σ σύνολο). Επειδή από τη (i) είναι $m(f(N)) = 0$, το $f(N)$ είναι ένα μετρήσιμο σύνολο. Άρα, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο σύνολο.

$\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$ Έστω $E \subset [a, b]$, με $m(E) = 0$. Τότε το E είναι μετρήσιμο και από τη (ii) το $f(E)$ θα είναι μετρήσιμο σύνολο. Αν υποθέσουμε ότι $m(f(E)) > 0$, ως γνωστόν υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο $V \subset f(E)$(παραπέμπουμε στο [17]). Τότε $f^{-1}(V) \subset E$ και επομένως $m\left(f^{-1}(V)\right) = 0$. Κατά συνέπεια το $f^{-1}(V)$ είναι μετρήσιμο σύνολο. Από τη (ii) το $f\left(f^{-1}(V)\right) = V$ θα είναι μετρήσιμο σύνολο, άτοπο. Άρα, $m(f(E)) = 0$. □

Παράδειγμα 2.1.4. *Έστω*

$$f(x) = \frac{a_1}{x - c_1} + \frac{a_2}{x - c_2} + \cdots + \frac{a_n}{x - c_n}\,,$$

όπου $a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$ *και* $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$. *Να αποδειχθεί ότι για κάθε* $t > 0$

$$m\left(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > t\}\right) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{t}$$

και

$$m\left(\{x \in \mathbb{R} : f(x) < -t\}\right) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{t}\,.$$

Λύση. Έστω $E_t := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > t\}$. Η f είναι γνήσια φθίνουσα σε καθένα από τα ανοικτά διαστήματα $(c_1, c_2), (c_2, c_3), \ldots, (c_{n-1}, c_n)$ και $(c_n, +\infty)$. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = t$, τότε

$$c_1 < x_1 < c_2,\; c_2 < x_2 < c_3,\; \ldots,\; c_{n-1} < x_{n-1} < c_n,\; c_n < x_n < +\infty$$

και

$$E_t = \bigcup_{k=1}^{n} (c_k, x_k)\;, \quad \text{με} \quad m\left(E_t\right) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - c_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} c_k\,.$$

Θα υπολογίσουμε το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} x_k$ των ριζών της εξίσωσης $f(x) = t$. Παρατηρούμε ότι

$$f(x) = t \iff \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{P(x)}{x - c_k} = tP(x)\,, \quad \text{όπου} \quad P(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - c_k)\;.$$

Όμως

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{P(x)}{x - c_k} = tP(x) \iff tx^n - \left(t \sum_{k=1}^{n} c_k + \sum_{k=1}^{n} a_k \right) x^{n-1} + Q(x) = 0\,,$$

όπου ο βαθμός του πολυωνύμου $Q(x)$ είναι μικρότερος του $n - 1$. Επομένως,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{t \sum_{k=1}^{n} c_k + \sum_{k=1}^{n} a_k}{t} = \sum_{k=1}^{n} c_k + \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{n} a_k\,.$$

Άρα, $m\left(E_t\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)/t$.

Παρόμοια αποδεικνύεται η δεύτερη εξίσωση. ■

2.2 Ασκήσεις

1. Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που δεν είναι μετρήσιμο. Αν $f_\alpha = \chi_{A\cap[\alpha]}$, όπου $[\alpha]$ είναι το ακέραιο μέρος του $\alpha \in A$, να αποδειχθεί ότι η f_α είναι μετρήσιμη συνάρτηση ενώ η $\sup\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ δεν είναι μετρήσιμη.

2. Αν η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$ και επί, δηλαδή αμφιμονοσήμαντη, να αποδειχθεί ότι η f απεικονίζει σύνολα Borel σε σύνολα Borel.
<u>Υπόδειξη</u>. Αν
$$\mathfrak{M} = \{A \subseteq \mathbb{R} : f(A) \in \mathfrak{B}\}\ ,$$
όπου $\mathfrak{B}$ είναι η Borel σ-άλγεβρα, να αποδειχθεί ότι η $\mathfrak{M}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$ η οποία περιέχει τα σύνολα Borel.

3. Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν ο } x \text{ είναι άρρητος}\ , \\ 1/q & \text{αν } x = p/q, \text{ όπου } p, q \text{ ακέραιοι αριθμοί} \\ & \text{πρώτοι μεταξύ τους και } q > 0\ , \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = 1/n, \text{ όπου } n \in \mathbb{N}\ , \\ 0 & \text{διαφορετικά}\ , \end{cases}$$
είναι συνεχείς σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ και ότι η $g \circ f$ δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του $\mathbb{R}$.

4. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού, όπου $E \subset \mathbb{R}$ είναι ένα μετρήσιμο σύνολο με $m(E) < \infty$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $A \subset E$, τέτοιο ώστε $m\,(E \setminus A) < \varepsilon$ και η f είναι φραγμένη στο A.
<u>Υπόδειξη</u>. Αν $E_n = \{x \in E : f(x) > n\}$ και $N = \{x \in E : |f(x)| = \infty\}$, τότε $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

5. Έστω το μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει *σ-πεπερασμένο μέτρο*, δηλαδή $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ με $E_n \in \mathfrak{M}$ και $\mu\,(E_n) < \infty$ και έστω η $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι

μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $A \subset E$, $A \in \mathfrak{M}$, με $m(A) > 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $b > 0$ και $B \subset A$ με $B \in \mathfrak{M}$ και $0 < m(B) < \infty$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq b$ για κάθε $x \in B$.
<u>*Υπόδειξη*</u>. Αποδείξτε ότι

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left\{ x \in E : f(x) \geq \frac{1}{n} \right\} \cap E_n \cap A \right).$$

6. Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, να αποδειχθεί ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων (f_n), $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$, τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν

$$E_{kn} := \left\{ x \in E : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \quad \text{και} \quad f_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{kn}},$$

τότε $0 \leq f(x) - f_n(x) < 2^{-n}$ και $f_n \nearrow f$.

7. Να αποδειχθεί ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to [0, \infty]$, $E \in \mathcal{M}$, γράφεται στη μορφή $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_{A_n}$, όπου $0 \leq a_n < \infty$ και $A_n \in \mathcal{M}$.

Κεφάλαιο 3

Ολοκλήρωμα Lebesgue

3.1 Μερικά Βασικά Αποτελέσματα

Θεώρημα 3.1.1. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα. Τότε η παράγωγος f' είναι μετρήσιμη και*

$$\int_a^b f'(x)\,dm(x) \leq f(b) - f(a)\,. \tag{3.1}$$

Απόδειξη. Επεκτείνουμε την f στο διαστημα $[a, b+1]$ θέτοντας $f(x) = f(b)$ αν $b < x \leq b+1$. Η f είναι αύξουσα και επομένως μετρήσιμη. Επειδή κάθε μονότονη συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού, η f θα είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού στο $[a,b]$. Αν

$$f_n(x) := \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n}\,,$$

τότε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x)$ για κάθε x όπου η f είναι παραγωγίσιμη. Επομένως $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x)$ $\sigma.\pi.$ στο $[a,b]$. Επειδή $f_n(x) \geq 0$, για κάθε

$x \in [a,b]$, από το λήμμα Fatou έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\,dm(x) &\le \liminf \int_a^b f_n(x)\,dm(x)\\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b f_n(x)\,dm(x)\\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ n \int_a^b \left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right] dx \right\}.\end{aligned}$$

Ας σημειωθεί ότι οι $g_n(x) := f(x+1/n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ και η f είναι αύξουσες συναρτήσεις και κατά συνέπεια θα είναι ασυνεχείς το πολύ σε αριθμήσιμο το πλήθος σημεία. Δηλαδή οι g_n, f είναι συνεχείς σχεδόν παντού και προφανώς φραγμένες. Επομένως θα είναι και Riemann ολοκληρώσιμες. Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$\int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right) dx = \int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)\,dx\,,$$

έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_a^b \left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right] dx &= \int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\\ &= \int_b^{b+1/n} f(x)\,dx - \int_a^{a+1/n} f(x)\,dx\\ &= \frac{1}{n} f(b) - \int_a^{a+1/n} f(x)\,dx\\ &\qquad (\text{επειδή } f(x) = f(b) \text{ αν } b < x \le b+1)\\ &\le \frac{1}{n}[f(b) - f(a)]\,.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_a^b f'(x)\,dm(x) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ n \int_a^b \left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right] dx \right\} \le f(b) - f(a)\,.$$

□

Σημείωση. Η ανισότητα στην (3.1) γενικά δεν μπορεί να αντικατασταθεί από ισότητα. Αν f είναι η ιδιάζουσα συνάρτηση των Cantor- Lebesgue(βλέπε

[17]), τότε $f' = 0$ $\sigma.\pi.$ στο $[0,1]$ και επομένως

$$\int_a^b f'(x)\,dm(x) = 0 < 1 = f(1) - f(0)\,.$$

3.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 3.2.1. *Έστω $f \in L_1(X)$, όπου $X \subset \mathbb{R}$ είναι ένα μετρήσιμο σύνολο με $m(X) < \infty$. Ορίζουμε*

$$A_E(f) := \frac{1}{m(E)} \int_E f\,dm\,,$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq X$ με $m(E) > 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει M τέτοιο ώστε $|A_E(f)| \leq M$, για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq X$ με $m(E) > 0$. Να αποδειχθεί ότι $|f(x)| \leq M$ $\sigma.\pi.$ στο X.

Απόδειξη. *1ος τρόπος*. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύνολο

$$f^{-1}\left((-\infty, M) \cup (M, \infty)\right) = \{x \in X : |f(x)| > M\}$$

έχει μέτρο μηδέν. Είναι γνωστό ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος κλειστών και φραγμένων διαστημάτων, με τα αντίστοιχα ανοικτά διαστήματα ξένα ανά δύο. Έστω

$$(-\infty, M) \cup (M, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]\,.$$

Επειδή $f^{-1}\left((-\infty, M) \cup (M, \infty)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left([a_n, b_n]\right)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $m\left(f^{-1}\left([a_n, b_n]\right)\right) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Αν $[a_n, b_n] = [\alpha_n - \varepsilon_n,\, \alpha_n + \varepsilon_n]$ και

$$E_n = f^{-1}\left([\alpha_n - \varepsilon_n,\, \alpha_n + \varepsilon_n]\right) = \{x \in X : \alpha_n - \varepsilon_n \leq f(x) \leq \alpha_n + \varepsilon_n\}\ ,$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι $m(E_n) = 0$. Έστω $m(E_n) > 0$. Τότε

$$\begin{aligned}
|A_{E_n}(f) - \alpha_n| &= \left| \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} f\, dm - \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} \alpha_n\, dm \right| \\
&= \left| \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} (f - \alpha_n)\, dm \right| \\
&\leq \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} |f - \alpha_n|\, dm \\
&\leq \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} \varepsilon_n\, dm = \varepsilon_n\, .
\end{aligned}$$

Δηλαδή $A_{E_n}(f) \in [\alpha_n - \varepsilon_n, \alpha_n + \varepsilon_n]$. Άτοπο, επειδή $|A_{E_n}(f)| \leq M$. Άρα $m(E_n) = 0$.

2ος τρόπος. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το μετρήσιμο σύνολο

$$E = \{x \in X : |f(x)| > M\}$$

έχει μέτρο μηδέν. Αν $E_n := \left\{x \in X : |f(x)| > M + \frac{1}{n}\right\}$, τότε η (E_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Επειδή $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $m(E_n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν

$$E_n^+ := \left\{x \in X : f(x) > M + \frac{1}{n}\right\} \text{ και } E_n^- := \left\{x \in X : -f(x) > M + \frac{1}{n}\right\},$$

τότε $E_n = E_n^+ \cup E_n^-$, $n \in \mathbb{N}$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $m(E_n^+) = m(E_n^-) = 0$. Έστω $m(E_n^+) > 0$. Τότε

$$\int_{E_n^+} f\, dm \geq \int_{E_n^+} \left(M + \frac{1}{n}\right) dm = \left(M + \frac{1}{n}\right) m\left(E_n^+\right)$$

και κατά συνέπεια

$$m(E_n^+) \leq \frac{1}{M + 1/n} \int_{E_n^+} f\, dm = \frac{m(E_n^+)}{M + 1/n} \cdot \frac{1}{m(E_n^+)} \int_{E_n^+} f\, dm \leq \frac{m(E_n^+)}{M + 1/n} M\, .$$

Δηλαδή $M + 1/n \leq M$, $n \in \mathbb{N}^*$ και αυτό είναι άτοπο. Επομένως $m(E_n^+) = 0$ και παρόμοια $m(E_n^-) = 0$. Άρα $m(E_n) = 0$ □

Παράδειγμα 3.2.2. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση με $|f(x)| > 0$ για κάθε $x \in X$, όπου το $X \subset \mathbb{R}$ είναι ένα μετρήσιμο σύνολο με $m(X) < \infty$ και έστω $0 < \alpha < m(X)$. Να αποδειχθεί ότι*

$$\inf \left\{ \int_E |f| \, dm : \, m(E) \geq \alpha \, , \, \textit{όπου } E \subseteq X \textit{ μετρήσιμο σύνολο} \right\} > 0 \, .$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το $E \subseteq X$ είναι μετρήσιμο σύνολο με $m(E) \geq \alpha$. Επειδή η $|f|$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, τα σύνολα

$$A_n := \left\{ x \in E : \frac{1}{n+1} \leq |f(x)| < \frac{1}{n} \right\} , \quad n \in \mathbb{N}^* \, ,$$

είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο με $\{x \in E : 0 < |f(x)| < 1\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Είναι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in E : 0 < |f(x)| < 1\} = E \setminus \{x \in E : |f(x)| \geq 1\}$$

και επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = m(E) - m\left(\{x \in E : |f(x)| \geq 1\}\right) < \infty \, .$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ συγκλίνει, υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=N}^{\infty} m(A_n) < \frac{\alpha}{2} \, .$$

Αν

$$E_1 := \left\{ x \in E : |f(x)| \geq \frac{1}{N} \right\} ,$$

το E_1 είναι μετρήσιμο υποσύνολο του E με

$$\begin{aligned} E_1 &= E \setminus \left\{ x \in E : 0 < |f(x)| < \frac{1}{N} \right\} \\ &= E \setminus \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{ x \in E : \frac{1}{n+1} \leq |f(x)| < \frac{1}{n} \right\} = E \setminus \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n \, . \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} m(E_1) &= m(E) - m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) \\ &= m(E) - \sum_{n=N}^{\infty} m(A_n) > \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}\,. \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq X$ με $m(E) \geq \alpha$ είναι

$$\int_E |f|\,dm \geq \int_{E_1} |f|\,dm \geq \frac{1}{N} m(E_1) > \frac{\alpha}{2N} > 0\,.$$

Άρα,

$$\inf\left\{\int_E |f|\,dm :\, m(E) \geq \alpha\,,\ \text{όπου } E \subseteq X \text{ μετρήσιμο σύνολο}\right\} \geq \frac{\alpha}{2N} > 0\,.$$

□

Παράδειγμα 3.2.3. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : X \to [1,\infty)$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, όπου $X \subset \mathbb{R}$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(X) = 1$. Να αποδειχθεί ότι*

$$\lim_{p \downarrow 0} \left(\int_X f^p\,dm\right)^{1/p} = \exp\left(\int_X \ln f\,dm\right)\,.$$

Απόδειξη. Αρκει να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{p \downarrow 0} \frac{\ln\left(\int_X f^p\,dm\right)}{p} = \int_X \ln f\,dm\,. \tag{3.2}$$

Αν $f = 1$ $\sigma.\pi.$ στο X, η (3.2) προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $f > 1$ $\sigma.\pi.$ στο X. Έστω (p_n) φθίνουσα ακολουθία στο $(0,1)$ με $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$. Είναι

$$\begin{aligned} \frac{\ln\left(\int_X f^{p_n}\,dm\right)}{p_n} &= \frac{\ln\left(\int_X [1 + (f^{p_n} - 1)]\,dm\right)}{p_n} \\ &= \frac{\ln\left(1 + \int_X (f^{p_n} - 1)\,dm\right)}{\int_X (f^{p_n} - 1)\,dm} \cdot \frac{\int_X (f^{p_n} - 1)\,dm}{p_n}\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Αν $p \in (0,1)$, εύκολα αποδεικνύεται ότι για κάθε $t \geq 1$ ισχύει η ανισότητα $t^p - 1 < pt$. Επομένως, για $0 < p_n < 1$ και για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\frac{f(x)^{p_n} - 1}{p_n} < f(x)\,.$$

Επειδή

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x)^t - 1}{t} = \ln f(x)\,, \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}$$

είναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)^{p_n} - 1}{p_n} = \ln f(x)\,.$$

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_X (f^{p_n} - 1)\,dm}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \int_X \frac{f^{p_n} - 1}{p_n}\,dm = \int_X \ln f\,dm\,.$$

Επειδή $f(x)^{p_n} - 1 < f(x)$ και $\lim_{n\to\infty}(f(x)^{p_n} - 1) = 0$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue είναι

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (f^{p_n} - 1)\,dm = 0\,.$$

Όμως

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1\,, \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}$$

οπότε και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \int_X (f^{p_n} - 1)\,dm\right)}{\int_X (f^{p_n} - 1)\,dm} = 1\,.$$

Άρα, από την (3.3) έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\int_X f^{p_n}\,dm\right)}{p_n} = \int_X \ln f\,dm\,.$$

□

Παράδειγμα 3.2.4. *Να υπολογιστεί το*

$$\lim_{h\to 0^+} \int_0^\infty h e^{-x} \cos x \ln\left(x + \frac{1}{h}\right)\,dx\,.$$

Λύση. Είναι

$$\left|he^{-x}\cos x\ln\left(x+\frac{1}{h}\right)\right| < he^{-x}\left(x+\frac{1}{h}\right), \quad x \geq 0\,,\ h > 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε $\int_0^\infty he^{-x}\left(x+1/h\right)\,dx = h+1$, δηλαδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty he^{-x}\left(x+1/h\right)\,dx$ συγκλίνει. Επομένως, από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty he^{-x}\cos x\ln\left(x+\frac{1}{h}\right)\,dx$$

θα συγκλίνει απόλυτα. Τότε, από γνωστό θεώρημα η συνάρτηση $f(x) = he^{-x}\cos x\ln\left(x+1/h\right)$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$\int_{[0,\infty)} he^{-x}\cos x\ln\left(x+\frac{1}{h}\right)\,dm(x) = \int_0^\infty he^{-x}\cos x\ln\left(x+\frac{1}{h}\right)\,dx\,.$$

Έστω (h_n) ακολουθία θετικών αριθμών, με $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, και

$$f_n(x) := h_n e^{-x}\cos x\ln\left(x+\frac{1}{h_n}\right).$$

Είναι

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} he^{-x}\cos x\ln\left(x+\frac{1}{h}\right) &= e^{-x}\cos x\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln\left(x+1/h\right)}{1/h}\\
&= e^{-x}\cos x\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(x+t)}{t}\\
&= e^{-x}\cos x\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{x+t} = 0\,,
\end{aligned}$$

(κανόνας L'Hôpital)

οπότε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $h_n < 1$, για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= \left|h_n e^{-x}\cos x\ln\left(x+\frac{1}{h_n}\right)\right|\\
&< h_n e^{-x}\left(x+\frac{1}{h_n}\right)\\
&= e^{-x}\left(h_n x+1\right) < e^{-x}(x+1)\,, \quad \forall n \geq n_0\,.
\end{aligned}$$

Όμως

$$\int_{[0,\infty)} e^{-x}(x+1)\,dm(x) = \int_0^\infty e^{-x}(x+1)\,dx = 2$$

δηλαδή η $g(x) := e^{-x}(x+1) \in L_1([0,\infty))$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} &\int_0^\infty h e^{-x} \cos x \ln\left(x + \frac{1}{h}\right)\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} h_n e^{-x} \cos x \ln\left(x + \frac{1}{h_n}\right)\,dm(x) = 0\,.\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 3.2.5. *Έστω η $f \in L_1(\mathbb{R})$ είναι τέτοια ώστε*

$$\int_{[a,b]} f\,dm = 0\,, \text{ για κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα } [a,b]\,.$$

Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 0$ σ.π. στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. *1ος τρόπος.* Επειδή $\int_{(a,b)} f\,dm = \int_{[a,b]} f\,dm$, από την υπόθεση θα είναι και $\int_{(a,b)} f\,dm = 0$, για κάθε ανοικτό και φραγμένο διάστημα (a,b). Ως γνωστόν, κάθε ανοικτό υποσύνολο G του $\mathbb{R}$ είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος κλειστών και φραγμένων διαστημάτων, με τα αντίστοιχα ανοικτά διαστήματα ξένα ανά δύο. Έστω $G = \bigcup_{n=1}^\infty [a_n, b_n]$, όπου τα ανοικτά διαστήματα (a_n, b_n), $n \in \mathbb{N}$, είναι ξένα ανά δύο. Τότε

$$\int_G f\,dm = \int_{\bigcup_{n=1}^\infty [a_n,b_n]} f\,dm = \int_{\bigcup_{n=1}^\infty (a_n,b_n)} f\,dm = \sum_{n=1}^\infty \int_{(a_n,b_n)} f\,dm = 0\,.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το G είναι ένα G_δ σύνολο, δηλαδή $G = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$, όπου (G_n) είναι μια φθίνουσα ακολουθία ανοικτών συνόλων. Προφανώς

$$\lim_{n\to\infty} f\chi_{G_n} = f\chi_G \quad \text{και} \quad \left|f\chi_{G_n}\right| \le |f|\,.$$

Τότε, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue είναι

$$\int_G f\,dm = \int_{\mathbb{R}} f\chi_G\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f\chi_{G_n}\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_{G_n} f\,dm = 0\,.$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι το E είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από γνωστό θεώρημα(βλέπε [17]) το $E = G \backslash N$, όπου G είναι ένα G_δ σύνολο και $N = G \backslash E$ με $m(N) = 0$. Επειδή $G = E \cup N$, με $E \cap N = \emptyset$, είναι

$$\int_G f\,dm = \int_E f\,dm + \int_N f\,dm$$

και επομένως

$$\int_E f\,dm = \int_G f\,dm - \int_N f\,dm = 0 - 0 = 0\,.$$

Άρα $\int_E f\,dm = 0$, για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι $f(x) = 0$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος. Υποθέτουμε ότι η f δεν ισούται με το μηδέν σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$. Τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει μετρήσιμο υποσύνολο E του $\mathbb{R}$ με $0 < m(E) < \infty$, τέτοιο ώστε $f(x) > 0$, για κάθε $x \in E$ (διαφορετικά θεωρούμε τη $-f$). Από γνωστό θεώρημα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subseteq E$ τέτοιο ώστε $m(E \setminus F) < \varepsilon$. Αν πάρουμε $0 < \varepsilon < m(E)$, τότε $m(F) > m(E) - \varepsilon > 0$. Επειδή, όπως αποδείξαμε προηγουμένως, για κάθε ανοικτό σύνολο G είναι $\int_G f\,dm = 0$, έχουμε

$$\int_F f\,dm = \int_{\mathbb{R}} f\,dm - \int_{\mathbb{R}\backslash F} f\,dm = 0\,.$$

Άτοπο, επειδή $m(F) > 0$ και η f είναι θετική στο σύνολο F. Άρα $f(x) = 0$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$. □

Ορισμός 3.2.1. *Θα λέμε ότι το $\mathcal{K} \subset L_1(E)$ είναι* **ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο**, *αν* $\sup\left\{\int_E |f|\,dm : f \in \mathcal{K}\right\} < \infty$ *και*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \textit{τέτοιο ώστε} \ \sup\left\{\int_A |f|\,dm : f \in \mathcal{K}\right\} < \varepsilon,$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$ με $m(A) < \delta$.

Παράδειγμα 3.2.6. (Μια άλλη μορφή του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης) *Υποθέτουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) είναι ομοιόμορφα* *ολοκληρώσιμη στο* $L_1(E)$, *με* $f_n \longrightarrow f$ *σ.π. στο* $E \in \mathcal{M}$. *Αν* $m(E) < \infty$, *να αποδειχθεί ότι* $f \in L_1(E)$ *και* $\int_E |f_n - f|\, dm \longrightarrow 0$ *(επομένως* $\int_E f_n\, dm \to \int_E f\, dm$*).*

Λύση. Επειδή $f_n \longrightarrow f$ σ.π. στο E, τότε και $|f_n| \longrightarrow |f|$ σ.π. στο E. Από το λήμμα Fatou

$$\int_E |f|\, dm \le \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n|\, dm \le \sup_n \int_E |f_n|\, dm < \infty.$$

Επομένως $f \in L_1(E)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η (f_n) είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\sup_n \int_A |f_n|\, dm < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{για κάθε μετρήσιμο σύνολο } A \subseteq E \text{ με } m(A) < \delta\,.$$

Από το λήμμα Fatou, για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$ με $m(A) < \delta$ έχουμε

$$\int_A |f|\, dm \le \liminf_{n\to\infty} \int_A |f_n|\, dm \le \sup_n \int_A |f_n|\, dm < \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Επειδή $f_n \longrightarrow f$ σ.π. στο E και $m(E) < \infty$, από το θεώρημα Egorov υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subset E$ με $m(E \setminus F) < \delta$ και $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα στο F. Κατά συνέπεια υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \ge N$ είναι $\sup_{x\in F} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2m(E)}$. Επομένως, για κάθε $n \ge N$

$$\begin{aligned}
\int_E |f_n - f|\, dm &= \int_F |f_n - f|\, dm + \int_{E\setminus F} |f_n - f|\, dm \\
&\le \frac{\varepsilon}{2m(E)} m(F) + \int_{E\setminus F} |f_n|\, dm + \int_{E\setminus F} |f| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\, dm = 0$. ■

Παράδειγμα 3.2.7. *Έστω* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, *όπου τα* E_n *είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση* $f \in L_1(E)$ *αν και μόνο αν* $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|\, dm < \infty$ *και σ' αυτή την περίπτωση έχουμε*

$$\int_E f\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\, dm\,.$$

Απόδειξη. Έστω $f \in L_1(E)$, δηλαδή $\int_E |f|\, dm < \infty$. Επειδή $E_n \subseteq E$, τότε ως γνωστόν $f \in L_1(E_n)$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|\; dm = \int_E |f|\, dm < \infty\,.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|\, dm < \infty$. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f|\chi_{E_n}\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|\, dm < \infty\,.$$

Από το θεώρημα Beppo Levi η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{E_n}$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο E και το άθροισμά της είναι συνάρτηση Lebesgue ολοκληρώσιμη στο E. Επειδή $\chi_E = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}$, έπεται ότι $f = f\chi_E = \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{E_n}$, η $f \in L_1(E)$. Επίσης,

$$\int_E f\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f\chi_{E_n}\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\, dm\,.$$

$\square$

Παράδειγμα 3.2.8. *Έστω η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{αν } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{αν } x = 0\,. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι $f' \notin L_1(\mathbb{R})$.

Λύση. Εύκολα διαπιστώνεται ότι

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{αν } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{αν } x = 0\,. \end{cases}$$

Για να αποδείξουμε ότι $f' \notin L_1(\mathbb{R})$, αρκεί να δείξουμε ότι $f' \notin L_1(0,1]$. Έστω (I_n) ακολουθία κλειστών και φραγμένων διαστημάτων, με

$$I_n = \left[\frac{1}{\sqrt{(2n+1/3)\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{(2n-1/3)\,\pi}}\right], \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Παρατηρούμε ότι τα διαστήματα I_n είναι ξένα ανά δύο, με $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset (0,1]$. Για κάθε $x \in I_n$ είναι $\cos\left(1/x^2\right) \geq \cos\left((2n+1/3)\,\pi\right) = 1/2$, οπότε

$$|f'(x)| \geq \left|\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| - \left|2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \geq \frac{2}{x}\left|\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| - 2x \geq \frac{1}{x} - 2x > 0\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_{I_n} |f'(x)|\, dm(x) &\geq \int_{I_n} \left(\frac{1}{x} - 2x\right) dm(x) \\
&= \left(\ln x - x^2\right)\Big|_{x=((2n+1/3)\pi)^{-1/2}}^{x=((2n-1/3)\pi)^{-1/2}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{6n+1}{6n-1}\right) - \frac{6}{\pi}\cdot\frac{1}{36n^2-1}\,.
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1]} |f'(x)|\, dm(x) &\geq \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n} |f'(x)|\, dm(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} |f'(x)|\, dm(x) \\
&\geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{6n+1}{6n-1}\right) - \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{36n^2-1}\,.
\end{aligned}$$

Επειδή

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{6n+1}{6n-1}\right)}{\frac{2}{6n-1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{6n-1}\right)}{\frac{2}{6n-1}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1
\end{aligned}$$

και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{6n-1} = \infty$, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{6n+1}{6n-1}\right) = \infty\,.$$

Για τη δεύτερη σειρά έχουμε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2-1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\,.$$

Άρα,

$$\int_{(0,1]} |f'(x)|\, dm(x) = \infty\,.$$

<u>*Σημείωση*</u>. Είναι $f' = g + h$, όπου

$$g(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{αν } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad h(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{αν } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{αν } x = 0\,. \end{cases}$$

Όμως η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και επομένως Lebesgue ολοκληρώσιμη. Αρκεί λοιπόν να αποδείξει κανείς ότι η $h \notin L_1\,(0,1]$. ■

Παράδειγμα 3.2.9. *Έστω η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{αν } x \in C\,, \\ x + 1 & \text{αν } x \in [0,1] \setminus C\,, \end{cases}$$

όπου C είναι το τριαδικό σύνολο Cantor. Δείξτε ότι η f είναι ασυνεχής στο C και συνεχής στο $[0,1] \setminus C$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{[0,1]} f\, dm$.

Λύση. Έστω $x \in C$. Επειδή το $[0,1] \setminus C$ είναι πυκνό στο $[0,1]$, υπάρχει ακολουθία (x_n) σημείων του $[0,1] \setminus C$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Από την υπόθεση είναι $f(x_n) = x_n + 1$, $f(x) = x - 1$ και επομένως $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = x + 1 \neq f(x)$. Άρα, η f δεν είναι συνεχής στο $x \in C$.
Έστω τώρα $x \in [0,1] \setminus C$ και έστω (x_n) είναι ακολουθία σημείων του $[0,1]$, με $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Επειδή το $[0,1] \setminus C$ είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $(x - \varepsilon,\, x + \varepsilon) \subseteq [0,1] \setminus C$. Κατά συνέπεια, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ το $x_n \in (x - \varepsilon,\, x + \varepsilon) \subseteq [0,1] \setminus C$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ από την υπόθεση είναι $f(x_n) = x_n + 1$. Επειδή $f(x) = x + 1$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = x + 1 = f(x)$. Άρα, η f είναι συνεχής στο $x \in [0,1] \setminus C$.
Επειδή $m(C) = 0$, η f είναι συνεχής σχεδόν παντού στο $[0,1]$. Άρα, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και

$$\int_{[0,1]} f(x)\, dm(x) = \int_{[0,1]} (x+1)\, dm(x) = \int_0^1 (x+1)\, dx = \frac{3}{2}\,.$$

■

Παράδειγμα 3.2.10. *Έστω η συνάρτηση* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *με*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[kx]}{2^k}\,,$$

όπου $[kx]$ *είναι το ακέραιο μέρος του* kx. *Να αποδειχθεί ότι η* f *είναι φραγμένη, Riemann ολοκληρώσιμη στο* $[0,1]$ *και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα* $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Λύση. Για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $[kx] \le k$ και κατά συνέπεια

$$f(x) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} < +\infty\,.$$

Αν

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{[kx]}{2^k}\,,$$

τότε

$$0 \le f(x) - f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[kx]}{2^k} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{2^k}\,.$$

Ως γνωστόν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(k/2^k)$ συγκλίνει, οπότε $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}(k/2^k) = 0$. Επομένως $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Επειδή κάθε f_n είναι συνεχής σχεδόν παντού στο $[0,1]$ (είναι ασυνεχής σε ένα αριθμήσιμο σύνολο), από το παράδειγμα 2.1.2 και η f θα είναι συνεχής σχεδόν παντού. Αποδείξαμε λοιπόν ότι η f είναι φραγμένη και συνεχής σχεδόν παντού. Άρα, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_{[0,1]} f\,dm = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \int_{[0,1]} [kx]\,dm(x)\,.$$

Επειδή τα διαστήματα $[j/k,\ (j+1)/k)$, $j = 0,1,2,\ldots,(k-1)$, είναι ξένα ανά δύο και

$$[0,1) = \bigcup_{j=0}^{k-1} \left[\frac{j}{k},\ \frac{j+1}{k}\right)\,,$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\left[\frac{j}{k},\,\frac{j+1}{k}\right)}[kx]\,dm(x)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{j}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{k-1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{2^{k+1}}\,.\end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος της σειράς παρατηρούμε ότι με παραγώγιση της γεωμετρικής σειράς $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$, προκύπτει ότι $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, $|x|<1$. Άρα,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^{k-1}} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^2}\frac{1}{(1-1/2)^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

■

3.3 Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί ότι

   $(a)\ \int_0^{10}[x]\,dx = 45$ $\qquad$ $(b)\ \int_0^{2}\left[x^2\right]\,dx = 5-\sqrt{3}-\sqrt{2}$

   $(c)\ \int_0^{2\pi}[\sin x]\,dx = -\pi\,,$

   όπου $[x]$, $\left[x^2\right]$ και $[\sin x]$ είναι το ακέραιο μέρος της $y=x$, της $y=x^2$ και της $y=\sin x$ αντίστοιχα.

2. Έστω $s=\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ απλή συνάρτηση, όπου $a_1,\ldots,a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός και $\{A_1,\ldots,A_n\}$ είναι μία διαμέριση του $\mathbb{R}$ με $A_i\in\mathcal{M}$, $i=1,\ldots,n$. Να αποδειχθεί ότι η s είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $m\left(A_i\right)<\infty$, $i=1,\ldots,n$.

3. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ανήκουν στον $L_1\left[0,\infty\right)$;

(i) $f(x) = \frac{\sin x}{x}\,, \quad (0 < x < \infty)$

(ii) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad (0 \le x < \infty)$

(iii) χ_E, όπου $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n,\, n + 1/n^2\right]$

(iv) Η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών αριθμών στο $[0, \infty)$

(v) Η χαρακτηριστική συνάρτηση των άρρητων αριθμών στο $[0, \infty)$.

4. Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών και ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 1]$. Αν $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = c_n$, με $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{c_n} < \infty$, να αποδειχθεί ότι σχεδόν για όλα τα $x \in [0, 1]$ είναι $f_n(x) \le \sqrt{c_n}$ για μεγάλα $n \in \mathbb{N}^*$.

   Υπόδειξη.

   (i) Αν $E_n = \left\{x : f_n(x) > \sqrt{c_n}\right\}$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) = 0$.

   (ii) Έστω $E = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n$. Αν $x \notin E$, τότε υπάρχει $N = N(x) \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \ge N$ είναι $f_n(x) \le \sqrt{c_n}$.

5. Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων στο $[0, 1]$, με $f_n(x) = (n + 1)x^n$. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 \left(\liminf_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx < \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx\,.$$

6. Έστω η συνάρτηση f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και μη αρνητική στο διάστημα $[0, 1]$. Αν

$$\int_0^1 f(x)^n\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx\,, \quad n = 1, 2, 3, \dots\,,$$

   να αποδειχθεί ότι $f = \chi_E$ $\sigma.\pi.$ για κάποιο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subset [0, 1]$.

   Υπόδειξη. Λήμμα Fatou.

7. Αν $p > 0$, τότε

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^{px}\left(1 - e^{-x}\right)}\, dx = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x e^{-px-nx}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+p)^2}\,.$$

8. Έστω

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(x - n + 2^{-n}\right) \chi_{[n-2^{-n},\, n]} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(x - n - 2^{-n}\right) \chi_{[n,\, n+2^{-n}]} .$$

Να αποδειχθεί ότι $f \geq 0$ και

$$\int_{[0,\,\infty)} f\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\, n+2^{-n})} f\, dm = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = 1 .$$

9. (**Θεώρημα Μέσης Τιμής**) Έστω $f \in L_1(E)$ και έστω $g : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση στο $E \in \mathcal{M}$, τέτοια ώστε $\alpha \leq g(x) \leq \beta$ $\sigma.\pi.$ Να αποδειχθεί ότι $fg \in L_1(E)$ και ότι υπάρχει $\gamma \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$\int_E |f| g\, dm = \gamma \int_E |f|\, dm .$$

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την $|f|$ με την f στην παραπάνω ισότητα;
Υπόδειξη. Έστω $f = g = -\chi_{(-1,0)} + \chi_{(0,1)}$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$.

10. (**Θεώρημα Μέσης Τιμής**) Έστω η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και έστω το $E \subseteq [a, b]$, $E \in \mathcal{M}$, είναι τέτοιο ώστε $m(E) > 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_E f(x)\, dm = f(\xi) m(E) .$$

11. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f \in L_1(\mathbb{R})$ είναι συνεχής στο $a \in \mathbb{R}$. Αν (I_n) είναι ακολουθία διαστημάτων τέτοια ώστε $a \in I_n$ και $\lim_{n\to\infty} m(I_n) = 0$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(I_n)} \int_{I_n} f(x)\, dm(x) = f(a) .$$

12. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{t\to 1^-} (1 - t) \sum_{k=0}^{\infty} t^k f(t^k) = \int_0^1 f(x)\, dx .$$

13. Έστω η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{αν } \frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}\,,\ k = 1, 2, \dots\,, \\ 0 & \text{αν } x = 0\,. \end{cases}$$

(α΄) Για κάθε $\varepsilon > 0$ να βρεθεί διαμέριση P του διαστήματος $[0,1]$, τέτοια ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon\,.$$

Επομένως η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

(Το $U(f,P)$ είναι το άνω άθροισμα και το $L(f,P)$ είναι το κάτω άθροισμα της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση P.)

<u>*Παρατήρηση*</u>. Το ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ προκύπτει και από το γεγονός ότι η f είναι συνεχής σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

(β΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = 1 - \ln 2\,.$$

14. Υποθέτουμε ότι η $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda$. Τι συμπεραίνετε για το

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,dx\,;$$

15. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι το $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ υπάρχει. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\lambda > 0$, $g(x) := f(x)e^{-\lambda x} \in L_1\,[0,\infty)$ και ότι

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \int_0^{\infty} f(x)e^{-\lambda x}\,dx = f(0)\,, \quad \lim_{\lambda\to 0^+} \lambda \int_0^{\infty} f(x)e^{-\lambda x}\,dx = c\,.$$

16. Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με $f_n \in L_1\,(\mathbb{R})$. Αν $0 \leq f_n \leq 1$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ $\sigma.\pi.$ και $f_n(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus E$ όπου $E \in \mathcal{M}$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (1 - f_n(x))\ dm(x) = 0\,.$$

17. Υποθέτουμε ότι η

$$g(t) := \int_{[0,\infty)} e^{tx} f(x)\, dm(x)$$

είναι πεπερασμένη για κάθε $t \geq 0$, όπου f είναι μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στο $[0,\infty)$. Να αποδειχθεί ότι η g είναι συνεχής για $t > 0$, αποδεικνύοντας ότι για κάθε ακολουθία (h_n) με $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ είναι

$$\lim_{n\to\infty} g\left(t + h_n\right) = g(t)\,.$$

18. Έστω $f \in L_1\left(\mathbb{R}\right)$. Αν

$$g(x) := \int_x^{x+1} f(y)\, dy\,,$$

να αποδειχθεί ότι η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ότι $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

19. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και φραγμένη στο $\mathbb{R}$ και ότι η συνάρτηση g είναι μη αρνητική και ολοκληρώσιμη. Να υπολογιστεί το

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ng(nx) f(x)\, dx\,.$$

Αιτιολογήστε κάθε βήμα για τον υπολογισμό του ορίου.

20. Να αποδειχθεί ότι το όριο

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/2} \int_0^{\infty} (1+u^2)^{-t}\, du$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο.

Υπόδειξη. Αν $t > 1$ και $x > 0$, τότε $(1 + x/t)^t > 1 + x$

21. Αν $0 < a < 1$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^a (1-x)^n \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\,.$$

22. Έστω $f_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$ και

$$g_n(x) = f_n(x)\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-1/2} = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n-1/2}\,.$$

(α΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\,.$$

(β΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx &= 2\int_0^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx\\ &= 2\sqrt{n}\int_0^{\infty}(1+t^2)^{-n}\,dt = 2\sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}\theta\,d\theta\end{aligned}$$

και παρόμοια

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx = 2\sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-1}\theta\,d\theta\,.$$

(γ΄) Χρησιμοποιώντας τις (α΄) και (β΄) να αποδειχθεί ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Ως γνωστόν,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sin^k x\,dx &= \int_0^{\pi/2}\cos^k x\,dx\\ &= \begin{cases}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} & \text{αν } k=2n,\\ \frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} & \text{αν } k=2n+1.\end{cases}\end{aligned}$$

23. Έστω η $f\in L_1(\mathbb{R})$ είναι τέτοια ώστε

$$\int_{(-\infty,\,x)} f(x)\,dm(x) = 0\,,\quad \text{για κάθε}\, x\in\mathbb{R}\,.$$

Να αποδειχθεί ότι $f(x)=0$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$.

24. Να αποδειχθεί ότι η

$$f = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\chi_{[n,\,n+1)}$$

είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,\infty)$ και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{[0,\infty)} f\,\mathrm{d}m$.

25. Έστω η συνάρτηση $f : (0,1) \to [0,1)$ με $f(x) := d(x, C)$, όπου

$$d(x, C) = \inf\{|x - t| : t \in C\}$$

είναι η απόσταση του x από το τριαδικό σύνολο Cantor C. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_{(0,1)} f(x)\, dm(x) = \frac{1}{28}\,.$$

26. Έστω $(E_n) \nearrow$ αύξουσα αριθμήσιμη οικογένεια μετρήσιμων συνόλων. Αν $f \in L_1(E_n)$ και $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} |f|\, dm < \infty$, να αποδειχθεί ότι $f \in L_1(E)$, όπου $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και

$$\int_E f\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, dm\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Παράδειγμα 3.2.7.

27. Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{h\to\infty} \int_{[a,b]} |f(x+h) - f(x)|\, dm(x) = 0\,.$$

28. Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα και έστω (f_n) μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, $f_n \in L_1(\mathbb{R})$ με $\|f_n\|_1 \leq M < \infty$. Αν $F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$, $x \in [0,1]$, τότε $F \in L_1[0,1]$.

29. Να αποδειχθεί ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x/\left(1+n^2x^2\right)\right)$ συγκλίνει σημειακά αλλά όχι ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Αν

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}\,,$$

είναι

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x}{1+n^2x^2}\, dx\,;$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

30. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία με $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Να αποδειχθεί ότι η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n e^{-x a_n} - a_{n+1} e^{-x a_{n+1}} \right|$$
δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,\infty)$.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Θεώρημα Beppo Levi.

31. Έστω η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$, $0 < a < b$. Να αποδειχθεί ότι
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,\infty)} |f_n|\, dm = \infty \quad \text{και} \quad \int_{[0,\infty)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) dm \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,\infty)} f_n \, dm\,.$$

32. Να αποδειχθεί ότι
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\, dx = -\frac{\pi^2}{6} \quad \text{και} \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\, dx = -\frac{\pi^2}{12}\,.$$

33. (α΄) Αν $k \in \mathbb{N}^*$, να αποδειχθεί ότι
$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos kt \, \mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}\,.$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα
$$\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \Re \left(\sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{i}kt} \right) = \frac{\cos\left[(n+1)t/2\right] \cdot \sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\,, \quad t \neq 0\,,$$
να αποδειχθεί ότι
$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(n + 1/2\right) t \, \mathrm{d}t + \frac{\pi^2}{3}\,,$$
όπου
$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^2 - 2\pi t}{2\pi \sin(t/2)} & \text{αν } 0 < t \leq \pi\,, \\ -2 & \text{αν } t = 0\,. \end{cases}$$

(γ΄) Να αποδειχθεί ότι $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2) = \pi^2/6$.

34. (α΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\left(\cot x - x^{-1}\right)\sin 2nx\,dx = 0\,.$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας το (α΄) να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin 2nx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Να συμπεράνετε ότι

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

35. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

για $n = 0, 2, 3, 4\dots$;

Υπόδειξη. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\,\mathrm{d}x = -2\pi n i\,.$$

36. (α΄) Αν το σύνολο $E \subset [0,2\pi]$ είναι μετρήσιμο, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \cos nx\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E \sin nx\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

(β΄) Έστω $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Θεωρούμε το σύνολο

$$E = \{x \in [0,2\pi] : \text{ η ακολουθία } (\sin(k_n x)) \text{ συγκλίνει}\}\,.$$

Να αποδειχθεί ότι $m(E) = 0$.

Υπόδειξη. Επειδή $\lim_{n\to\infty}\int_E \cos(2k_n x)\,\mathrm{d}x = 0$, όπου E μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,2\pi]$, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cos(2k_n x) = 1 - 2\sin^2(k_n x)$, δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty}\sin(k_n x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ σχεδόν παντού στο E.

Κεφάλαιο 4

Λυμένες Ασκήσεις

4.1 Ακαδημαϊκό έτος 2016–17

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
1η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω $\{A_n\} \subset \mathfrak{M}$. Δείξτε ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο σύνολα $\{E_n\} \subset \mathfrak{M}$ τέτοια ώστε $E_n \subset A_n$ με $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Επίσης δείξτε ότι
$$\mu(A_n) = \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

2. Έστω $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ένας πλήρης χώρος μέτρου.
   (α') Αν $A \cup N \in \mathfrak{M}$, όπου $\mu(N) = 0$, δείξτε ότι το $A \in \mathfrak{M}$.
   (β') Αν τα $A, B \subseteq X$ είναι τέτοια ώστε $A \in \mathfrak{M}$ και $\mu(A \triangle B) = 0$, δείξτε ότι το $B \in \mathfrak{M}$ και είναι $\mu(A) = \mu(B)$.

3. Δείξτε ότι το σύνολο $B \subset \mathbb{R}$ δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν

   υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subset B$ είναι $m^*(B \setminus A) \geq \varepsilon$.

4. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}&\inf\{m(G) : E \subseteq G \,\text{και το}\, G \,\text{είναι ανοικτό}\}\\ =\;&\sup\{m(F) : F \subseteq E \,\text{και το}\, F \,\text{είναι κλειστό}\}\,. \qquad (4.1)\end{aligned}$$

(α΄) Αν $m^*(E) < \infty$, δείξτε ότι το σύνολο E είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(β΄) Αν $m^*(E) = \infty$, είναι το σύνολο E Lebesgue μετρήσιμο;

5. Έστω $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν το μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq X$ έχει σ-πεπερασμένο μέτρο, δείξτε ότι το E είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων που έχουν πεπερασμένο μέτρο. Δηλαδή $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, όπου τα F_n είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα με $m(F_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Λύση. Επειδή το $E \in \mathfrak{M}$ έχει σ-πεπερασμένο μέτρο, υπάρχει ακολουθία (E_n) μετρήσιμων συνόλων με $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και $m(E_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Ορίζουμε την ακολουθία συνόλων (F_n) ως εξής

$$F_1 = E_1, \qquad F_n = E_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\,, \quad n \geq 2\,.$$

Τότε τα σύνολα F_n είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο με $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Επειδή $F_n \subseteq E_n$, είναι $m(F_n) \leq m(E_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. ■

6. Έστω $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) < \infty$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathfrak{F} = \{E_i \in \mathfrak{M} : i \in I\}$, όπου τα E_i είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα τέτοια ώστε $\mu(E_i) > 0$ για κάθε $i \in I$. Δείξτε ότι η οικογένεια $\mathfrak{F}$ είναι το πολύ αριθμήσιμη.
Υπόδειξη. Αν $\mathfrak{F}_k = \left\{E_i \in \mathfrak{F} : \mu(E_i) \geq \frac{1}{k}\right\}$, $k \in \mathbb{N}^*$, τότε $\mathfrak{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{F}_k$.

Λύση. Επειδή $\mu(E_i) > 0$ για κάθε $i \in I$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $\mu(E_i) \geq \frac{1}{k}$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ έστω $\mathfrak{F}_k = \left\{E_i \in \mathfrak{F} : \mu(E_i) \geq \frac{1}{k}\right\}$. Τότε κάθε $E_i \in \mathfrak{F}$ ανήκει σε κάποια $\mathfrak{F}_k$, για κάποια $k \in \mathbb{N}^*$ και επομένως έχουμε

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{F}_k\,.$$

Υποθέτουμε ότι η οικογένεια $\mathfrak{F}$ είναι υπεραριθμήσιμη. Τότε για κάποιο $k_0 \in \mathbb{N}^*$ η $\mathfrak{F}_{k_0}$ θα είναι υπεραριθμήσιμη και κατά συνέπεια μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία (E_n) ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathfrak{F}_{k_0}$. Επειδή $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq X$, είναι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \mu(X) < \infty\,.$$

Όμως τα E_n είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα υποσύνολα της $\mathfrak{F}_{k_0}$ και επομένως

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_0} = \infty\,.$$

Καταλήξαμε σε άτοπο. Άρα η $\mathfrak{F}$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια. ∎

7. (α΄) Δείξτε ότι υπάρχει ένα G_δ-σύνολο G τέτοιο ώστε $G \supset \mathbb{Q}$ και $m(G) = 0$.
   Υπόδειξη. Αν $\mathbb{Q} = \{r_k : k \in \mathbb{N}^*\}$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών, θεωρείστε τα ανοικτά διαστήματα

   $$I_{k,n} := \left(r_k - \frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{n}\,,\, r_k + \frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{n}\right)\,, \quad k, n \in \mathbb{N}^*$$

   και τα ανοικτά σύνολα $O_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,n}$.

   (β΄) Δείξτε ότι το σύνολο P των άρρητων αριθμών στο $\mathbb{R}$ είναι ένα G_δ-σύνολο.

Λύση.

(α΄) Αν $\mathbb{Q} = \{r_k : k \in \mathbb{N}^*\}$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών, θεωρούμε τα ανοικτά διαστήματα

$$I_{k,n} := \left(r_k - \frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{n}\,,\, r_k + \frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{n}\right)\,, \quad k, n \in \mathbb{N}^*$$

και τα ανοικτά σύνολα $O_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,n}$. Τα ανοικτά σύνολα O_n περιέχουν το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ και είναι

$$m(O_n) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,n}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_{k,n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{n}\,.$$

Έστω $G := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$. Τότε το G είναι ένα G_δ-σύνολο το οποίο περιέχει το $\mathbb{Q}$ και επιπλέον

$$m(G) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n\right) \leq m(O_n) = \frac{1}{n}\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Επομένως $m(G) = 0$.

(β΄) Επειδή τα τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα στο $\mathbb{R}$, αν $F_n := \{r_n\}$ το $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι ένα F_σ-σύνολο. Αν P είναι το σύνολο των άρρητων αριθμών στο $\mathbb{R}$, τότε

$$P = \mathbb{Q}^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^c\,.$$

Επειδή τα F_n^c είναι ανοικτά σύνολα στο $\mathbb{R}$, το σύνολο P είναι ένα G_δ-σύνολο.

■

8. Έστω f_n ($n \in \mathbb{N}^*$) και g μετρήσιμες συναρτήσεις στο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ με $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\sigma.\pi.$ για κάθε n. Δείξτε ότι υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$ με $m(A) = 0$ και τέτοιο ώστε

$$|f_n(x)|\chi_{E\setminus A}(x) \leq g(x)\chi_{E\setminus A}(x)\,, \quad \text{για κάθε } x \in E\,,$$

όπου το A είναι ανεξάρτητο του n.

Λύση. Έστω $A_n = \{x \in E : |f_n(x)| > g(x)\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Από την υπόθεση είναι $m(A_n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Ορίζουμε το σύνολο $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq E$. Επειδή

$$m(A) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = 0\,,$$

το $A \subseteq E$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(A) = 0$. Άρα

$$|f_n(x)|\chi_{E\setminus A}(x) \leq g(x)\chi_{E\setminus A}(x)\,, \quad \text{για κάθε } x \in E\,.$$

■

9. Έστω $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το όριο $\lim_{t\to 0} \chi_{\mathbb{Q}+t}(x)$ δεν υπάρχει και επομένως

$$\lim_{t\to 0} \chi_{\mathbb{Q}+t}(x) \neq \chi_{\mathbb{Q}}(x)\,.$$

Λύση. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) := \chi_{\mathbb{Q}+t}(x_0)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Επειδή $\{0, 1\}$ είναι το πεδίο τιμών της f, αν το όριο $\lim_{t\to 0} f(t)$ υπάρχει θα είναι είτε $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$ ή $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$. Θα δείξουμε ότι το όριο $\lim_{t\to 0} f(t)$ δεν υπάρχει. Αν (ρ_n) είναι ακολουθία ρητών αριθμών και (α_n) είναι ακολουθία άρρητων αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} f(\rho_n) = \lim_{n\to\infty} \chi_{\mathbb{Q}+\rho_n}(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x_0 \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \chi_{\mathbb{Q}+\alpha_n}(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x_0 \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{αν } x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} f(\rho_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n)$ και άρα από την αρχή μεταφοράς έπεται ότι το όριο $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} \chi_{\mathbb{Q}+t}(x_0)$ δεν υπάρχει. ∎

10. Έστω ο χώρος Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$, έστω $\mathfrak{B}$ η Borel σ-άλγεβρα και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\mu : \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ με $\mu(A) := m(f^{-1}(A))$. Δείξτε ότι το μ είναι ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Λύση. Επειδή η f είναι Lebesgue μετρήσιμη, για κάθε $A \in \mathfrak{B}$ το $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ και επομένως η συνάρτηση μ είναι καλά ορισμένη.
(i) Είναι $\mu(\emptyset) = m(f^{-1}(\emptyset)) = m(\emptyset) = 0$.

(ii) Έστω (A_n) ακολουθία ξένων ανά δύο Borel μετρήσιμων συνόλων. Επειδή για $m \neq n$

$$f^{-1}(A_m) \cap f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A_m \cap A_n) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset\,,$$

τα σύνολα $f^{-1}(A_n)$ είναι ξένα ανά δύο και Lebesgue μετρήσιμα. Επειδή

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n),$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= m\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right)\\ &= m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m(f^{-1}(A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

Άρα το μ είναι ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

■

11. Έστω ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, όπου $\mathfrak{B}$ η Borel σ-άλγεβρα.

(α΄) Αν το $E \subset \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, δείξτε ότι $E \in \mathfrak{B}$.

(β΄) Αν το $E \subset \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι Borel μετρήσιμη στο E.

Λύση.

(α΄) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επειδη το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό σύνολο στο $\mathbb{R}$, το $\{x\} \in \mathfrak{B}$. Αν το $E \subset \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, το E είναι αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων και επομένως το $E \in \mathfrak{B}$.

(β΄) Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι Borel μετρήσιμη στο E, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{x \in E : f(x) \leq \alpha\} \in \mathfrak{B}, \quad \text{για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Επειδή το E είναι αριθμήσιμο σύνολο, το υποσύνολο $\{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$ του E είναι αριθμήσιμο σύνολο. Τότε από το (α΄) έπεται ότι το σύνολο $\{x \in E : f(x) \leq \alpha\} \in \mathfrak{B}$.

■

12. Έστω (f_n), $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}$ και έστω $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ στο X. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, έστω $E_n = \{X : f_n > \lambda\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ και έστω $E = \{X : f > \lambda\}$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} E_n = E$ και $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(E)$.

    Λύση. Επειδή η (f_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, (E_n) είναι αύξουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων και επομένως $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

    Θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} E_n = E$. Αν $x \in \lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, τότε $x \in E_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$ και κατά συνέπεια $f_n(x) > \lambda$. Επειδή $f_n \nearrow f$, έπεται ότι $f(x) > \lambda$, δηλαδή $x \in E$ και επομένως $\lim_{n\to\infty} E_n \subseteq E$.
    Αντίστροφα, έστω $x \in E$. Τότε $f(x) > \lambda$. Επειδή $f_n \nearrow f$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $f_n(x) > \lambda$. Τότε $x \in E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} E_n$ και επομένως $E \subseteq \lim_{n\to\infty} E_n$. Άρα $\lim_{n\to\infty} E_n = E$. Επειδή η (E_n) είναι αύξουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων, από γνωστή ιδιότητα $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(E)$. ■

4.2 Ακαδημαϊκό έτος 2015–16

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
1η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω (A_n) αριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) < \infty$. Αν
$$E = \{x \in \mathbb{R} : x \in A_n \text{ για άπειρα το πλήθος } n\},$$
δείξτε ότι $m^*(E) = 0$.

   Λύση. Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) < \infty$, είναι $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} m^*(A_k) = 0$. Το σύνολο $E \subseteq \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και επομένως
$$0 \leq m^*(E) \leq m^*\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} m^*(A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$
Άρα, $m^*(E) = 0$.
<u>*Σημείωση*</u>. Επειδή $E = \overline{\lim}\, A_n$, από το λήμμα Borel–Cantelli είναι γνωστό ότι $m(E) = 0$, όπου m είναι το μέτρο Lebesgue. ■

2. Δώστε ένα παράδειγμα ανοικτού συνόλου U στο $\mathbb{R}$ με $m(U) \leq 1$ και τέτοιου ώστε $U \cap [n, n+1] \neq \emptyset$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

   Λύση. Το
$$U := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(n,\, n + \frac{1}{2^n}\right)$$
είναι ένα παράδειγμα τέτοιου συνόλου. Πράγματι, το U είναι ανοικτό σύνολο με
$$m(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m\left(n,\, n + \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1\,.$$
Επίσης, $U \cap [n, n+1] \neq \emptyset$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. ■

3. Να βρεθεί ακολουθία διαστημάτων (J_n), $J_n \subset (0,1)$, τέτοια ώστε το σύνολο $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ να είναι πυκνό στο $(0,1)$ και το σύνολο $K := (0,1) \setminus U$ να

έχει θετικό μέτρο.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Αν $Q := \mathbb{Q} \cap (0,1)$, από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου Lebesgue υπάρχουν ανοικτά διαστήματα (I_n) με $Q \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon$. Θεωρείστε τα διαστήματα $J_n := I_n \cap (0,1)$.

Λύση. Επειδή το σύνολο Q είναι πυκνό πυκνό στο $(0,1)$ και

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \cap (0,1) \supseteq Q\,,$$

το σύνολο U είναι πυκνό στο $(0,1)$. Κάθε J_n είναι διάστημα(ή το κενό σύνολο), με $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και $m(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon$. Επομένως,

$$m(K) = m((0,1) \setminus U) = m((0,1)) - m(U) = 1 - m(U) > 1 - \varepsilon > 0\,.$$

■

4. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $X \neq \emptyset$ και $\mu(X) > 0$. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, έστω $F_n = \{X : f_n \geq \lambda\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ και $F = \{X : f \geq \lambda\}$. Κατασκευάστε αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων f_n στο X, τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} F_n \neq F$ και $\lim_{n\to\infty} m(F_n) < m(F)$.

   Λύση. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) := \lambda - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Η (f_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}$. Είναι $F_n = \{X : f_n \geq \lambda\} = \emptyset$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} f_n = \lambda$ στο X, το $F = \{X : f \geq \lambda\} = X$. Επομένως, $\lim_{n\to\infty} F_n = \emptyset \neq X = F$ και $\lim_{n\to\infty} m(F_n) = \lim_{n\to\infty} m(\emptyset) = 0 < \mu(X) = m(F)$. ■

5. Έστω η συνάρτηση $f : X \to Y$, όπου X, Y Lebesgue μετρήσιμα σύνολα. Αν $\mathcal{C}$ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Y, δείξτε ότι η $\mathcal{A} := \{f^{-1}(H) : H \in \mathcal{C}\}$ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X.

   Λύση. Το $X = f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$. Αν $E \in \mathcal{A}$, τότε $E = f^{-1}(H)$ για κάποιο $H \in \mathcal{C}$. Επειδή $X \setminus E = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(H) = f^{-1}(Y \setminus H)$, το $X \setminus E \in \mathcal{A}$. Τέλος, αν $E_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε $E_n = f^{-1}(H_n)$ για κάποια

$H_n \in \mathcal{C}$. Επειδή

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(H_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right),$$

όπου $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \in \mathcal{C}$, έπεται ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$. Άρα, η $\mathcal{A} := \{f^{-1}(H) : H \in \mathcal{C}\}$ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X. ■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω $(E_k)_{k=1}^N$ πεπερασμένη οικογένεια μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$. Υποθέτουμε η οικογένεια έχει την ιδιότητα ότι κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον n από τα E_k, $n \leq N$. Δείξτε ότι $m(E_k) \geq \frac{n}{N}$, για κάποια k, $1 \leq k \leq N$.

   Υπόδειξη. Από την υπόθεση είναι $\sum_{k=1}^N \chi_{E_k}(x) \geq n$, για κάθε $x \in [0,1]$.

   Λύση. Με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι $m(E_k) < \frac{n}{N}$, για κάθε k, $1 \leq k \leq N$. Τότε,

$$\begin{aligned} n = n \cdot m([0,1]) &= \int_{[0,1]} n\,dm \\ &\leq \int_{[0,1]} \sum_{k=1}^N \chi_{E_k}(x)\,dm \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{[0,1]} \chi_{E_k}(x)\,dm \\ &= \sum_{k=1}^N m(E_k) < \sum_{k=1}^N \frac{n}{N} = n\,. \qquad \text{(άτοπο)} \end{aligned}$$

   Άρα $m(E_k) \geq \frac{n}{N}$, για κάποια k, $1 \leq k \leq N$. ■

2. Δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-[x]}\,dx = \frac{e}{e-1},$$

   όπου $[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ είναι το ακέραιο μέρος του x.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[n,n+1)}(x) = 1$, για κάθε $x \geq 0$. Επομένως,

$$\int_0^\infty e^{-[x]}\,dx = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{-[x]}\chi_{[n,n+1)}(x)\,dx\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-[x]}\,dx &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{-[x]}\chi_{[n,n+1)}(x)\,dx \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-[x]}\chi_{[n,n+1)}(x)\,dx \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-n}\chi_{[n,n+1)}(x)\,dx \\ &= \sum_{n=0}^\infty e^{-n} \int_0^\infty \chi_{[n,n+1)}(x)\,dx \\ &= \sum_{n=0}^\infty e^{-n} = \frac{1}{1-1/e} = \frac{e}{e-1}\,.\end{aligned}$$

■

3. Έστω (f_n), $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $X \in \mathcal{M}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ $\sigma.\pi.$ Αν υπάρχει C τέτοιο ώστε

$$\int_X |f_n|\,dm < C\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,,$$

δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \left(|f_n - f| + |f| - |f_n|\right)\,dm = 0\,.$$

Λύση. Από το λήμμα Fatou

$$\int_X |f|\,dm = \int_X \underline{\lim}\,|f_n|\,dm \leq \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n|\,dm \leq C$$

και επομένως η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο X. Αν

$$g_n := |f_n - f| + |f| - |f_n|\,,$$

τότε η (g_n) είναι ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ $\sigma.\pi.$ και

$$g_n \leq |f_n| + |f| + |f| - |f_n| = 2|f| .$$

Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (|f_n - f| + |f| - |f_n|)\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, dm = 0 .$$

■

4. Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων στο $[0,\infty)$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{αν } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{αν } \frac{1}{n} \leq x < \infty . \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$\int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} f_n\, dm < \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} f_n\, dm .$$

Γιατί δεν εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue;

Λύση. Επειδή

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \infty & \text{αν } x = 0 \\ 0 & \text{αν } x > 0 , \end{cases}$$

είναι $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ $\sigma.\pi.$ κατά σημείο στο $[0,\infty)$. Επομένως $f = 0$ $\sigma.\pi.$ και κατά συνέπεια

$$\int_{[0,\infty)} f\, dm = \int_{[0,\infty)} 0\, dm = 0 .$$

Επειδή $\int_{[0,\infty)} f_n\, dm = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, είναι

$$\int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} f_n\, dm = 0 < 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} f_n\, dm .$$

Το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue δεν εφαρμόζεται επειδή προφανώς δεν υπάρχει συνάρτηση $g \in L_1([0,\infty))$ τέτοια ώστε $|f_n(x)| \leq g(x)$ σχεδόν παντού στο $[0,\infty)$. ■

5. Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$, υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos^n(\pi x)\,dm(x)\,.$$

Λύση. Επειδή $|\cos(\pi x)| < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, είναι $\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi x) = 0$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$(για κάθε $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$). Έστω $f_n(x) = f(x)\cos^n(\pi x)$. Επειδή $|f_n(x)| \leq f(x)$ και η $|f| \in L_1(\mathbb{R})$ από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos^n(\pi x)\,dm(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dm(x) = \int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dm(x) = 0\,.$$

■

6. Έστω η συνάρτηση $f_E(x) := m(E\cap(-x,x))$, $x \geq 0$, όπου $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Δείξτε ότι η συνάρτηση f_E είναι ομοιόμορφα συνεχής και απεικονίζει το $[0,\infty)$ επί του $[0,m(E)]$. Επιπλέον, δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f_E(x) = m(E)$. Για την απόδειξη χρησιμοποιείστε το γεγονός ότι

$$f_E(x) = m(E\cap(-x,x)) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{E\cap(-x,x)}\,dm = \int_{\mathbb{R}} \chi_E\cdot\chi_{(-x,x)}\,dm\,.$$

Έστω $x, y \geq 0$. Αν $y \geq x$, δείξτε ότι

$$|f_E(x) - f_E(y)| \leq 2(y-x) = 2|x-y|\,.$$

Λύση. Έστω $x, y \geq 0$. Αν $y \geq x$, τότε

$$\begin{aligned}
|f_E(x) - f_E(y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \chi_E\cdot\chi_{(-x,x))}\,dm - \int_{\mathbb{R}} \chi_E\cdot\chi_{(-y,y)}\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \chi_E\left|\chi_{(-x,x)} - \chi_{(-y,y)}\right|\,dm \\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi_E\left[\chi_{(-y,-x)} + \chi_{(x,y))}\right]\,dm \\
&(\chi_{(-y,y)} - \chi_{(-x,x)} = \chi_{(-y,y)\setminus(-x,x)} = \chi_{(-y,-x)\cup(x,y)}) \\
&= m(E\cap(-y,-x)) + m(E\cap(x,y)) \\
&\leq 2(y-x) = 2|x-y|\,.
\end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση f_E είναι ομοιόμορφα συνεχής. Επειδή $f_E(0) = 0$, το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής συνεπάγεται ότι η f_E απεικονίζει το $[0, \infty)$ επί του $[0, m(E)]$.

Αν $n \in \mathbb{N}^*$, θεωρούμε την αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων

$$f_E(n) := \chi_{E\cap(-n,n)} = \chi_E \cdot \chi_{(-n,n)} \,.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_E(n) = \lim_{x\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{E\cap(-n,n)}\, dm &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \chi_{E\cap(-n,n)}\, dm \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_E\, dm = m(E)\end{aligned}$$

και άρα $\lim_{x\to\infty} f_E(x) = m(E)$. ■

7. Έστω $f \in L_1(X)$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subset X$ με $m(E) < \infty$ και

$$\int_X |f|\, dm \leq \int_E |f|\, dm + \varepsilon \,.$$

Υπόδειξη. Αν $A = \{x \in X : |f(x)| > 0\}$ και $A_n = \{x \in X : |f(x)| > \frac{1}{n}\}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$m(X \setminus A) = m(\{x \in X : |f(x)| = \infty\} = 0 \quad \text{και} \quad |f| \cdot \chi_{A_n} \nearrow |f| \cdot \chi_A \,.$$

Λύση. ■

4.3 Ακαδημαϊκό έτος 2014–15

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
1η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν το μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq X$ έχει σ-πεπερασμένο μέτρο, δείξτε ότι το E είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων που έχουν πεπερασμένο μέτρο. Δηλαδή $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, όπου τα F_n είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα με $m(F_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

   Λύση. Επειδή το $E \in \mathfrak{M}$ έχει σ-πεπερασμένο μέτρο, υπάρχει ακολουθία (E_n) μετρήσιμων συνόλων με $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και $m(E_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Ορίζουμε την ακολουθία συνόλων (F_n) ως εξής

$$F_1 = E_1, \qquad F_n = E_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\,, \quad n \geq 2\,.$$

   Τότε τα σύνολα F_n είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο με $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Επειδή $F_n \subseteq E_n$, είναι $m(F_n) \leq m(E_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.
   ∎

2. Έστω $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) < \infty$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathfrak{F} = \{E_i \in \mathfrak{M} : i \in I\}$, όπου τα E_i είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα τέτοια ώστε $\mu(E_i) > 0$ για κάθε $i \in I$. Δείξτε ότι η οικογένεια $\mathfrak{F}$ είναι το πολύ αριθμήσιμη.
   <u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $\mathfrak{F}_k = \left\{E_i \in \mathfrak{F} : \mu(E_i) \geq \frac{1}{k}\right\}$, $k \in \mathbb{N}^*$, τότε $\mathfrak{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{F}_k$.

   Λύση. Επειδή $\mu(E_i) > 0$ για κάθε $i \in I$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $\mu(E_i) \geq \frac{1}{k}$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ έστω $\mathfrak{F}_k = \left\{E_i \in \mathfrak{F} : \mu(E_i) \geq \frac{1}{k}\right\}$. Τότε κάθε $E_i \in \mathfrak{F}$ ανήκει σε κάποια $\mathfrak{F}_k$, για κάποια $k \in \mathbb{N}^*$ και επομένως έχουμε

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{F}_k\,.$$

Υποθέτουμε ότι η οικογένεια $\mathfrak{F}$ είναι υπεραριθμήσιμη. Τότε για κάποιο $k_0 \in \mathbb{N}^*$ η $\mathfrak{F}_{k_0}$ θα είναι υπεραριθμήσιμη και κατά συνέπεια μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία (E_n) ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathfrak{F}_{k_0}$. Επειδή $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq X$, είναι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \mu(X) < \infty\,.$$

Όμως τα E_n είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα υποσύνολα της $\mathfrak{F}_{k_0}$ και επομένως

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_0} = \infty\,.$$

Καταλήξαμε σε άτοπο. Άρα η $\mathfrak{F}$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια. ■

3. (α΄) Δείξτε ότι υπάρχει ένα G_δ-σύνολο G τέτοιο ώστε $G \supset \mathbb{Q}$ και $m(G) = 0$. *Υπόδειξη*. Αν $\mathbb{Q} = \{r_k : k \in \mathbb{N}^*\}$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών, θεωρείστε τα ανοικτά διαστήματα

$$I_{k,n} := \left(r_k - \frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{n}\,,\, r_k + \frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{n}\right)\,, \quad k,n \in \mathbb{N}^*$$

και τα ανοικτά σύνολα $O_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,n}$.

(β΄) Δείξτε ότι το σύνολο P των άρρητων αριθμών στο $\mathbb{R}$ είναι ένα G_δ-σύνολο.

Λύση.

(α΄) Αν $\mathbb{Q} = \{r_k : k \in \mathbb{N}^*\}$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών, θεωρούμε τα ανοικτά διαστήματα

$$I_{k,n} := \left(r_k - \frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{n}\,,\, r_k + \frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{n}\right)\,, \quad k,n \in \mathbb{N}^*$$

και τα ανοικτά σύνολα $O_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,n}$. Τα ανοικτά σύνολα O_n περιέχουν το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ και είναι

$$m(O_n) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,n}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_{k,n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{n}\,.$$

Έστω $G := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$. Τότε το G είναι ένα G_δ-σύνολο το οποίο περιέχει το $\mathbb{Q}$ και επιπλέον

$$m(G) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n\right) \leq m(O_n) = \frac{1}{n}\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Επομένως $m(G) = 0$.

(β΄) Επειδή τα τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα στο $\mathbb{R}$, αν $F_n := \{r_n\}$ το $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι ένα F_σ-σύνολο. Αν P είναι το σύνολο των άρρητων αριθμών στο $\mathbb{R}$, τότε

$$P = \mathbb{Q}^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^c\,.$$

Επειδή τα F_n^c είναι ανοικτά σύνολα στο $\mathbb{R}$, το σύνολο P είναι ένα G_δ-σύνολο.

■

4. Έστω f_n ($n \in \mathbb{N}^*$) και g μετρήσιμες συναρτήσεις στο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ με $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\sigma.\pi.$ για κάθε n. Δείξτε ότι υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$ με $m(A) = 0$ και τέτοιο ώστε

$$|f_n(x)|\chi_{E\setminus A}(x) \leq g(x)\chi_{E\setminus A}(x)\,, \quad \text{για κάθε } x \in E \text{ (το } A \text{ είναι ανεξάρτητο του } n)\,.$$

Λύση. Έστω $A_n = \{x \in E : |f_n(x)| > g(x)\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Από την υπόθεση είναι $m(A_n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Ορίζουμε το σύνολο $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq E$. Επειδή

$$m(A) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = 0\,,$$

το $A \subseteq E$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(A) = 0$. Άρα

$$|f_n(x)|\chi_{E\setminus A}(x) \leq g(x)\chi_{E\setminus A}(x)\,, \quad \text{για κάθε } x \in E\,.$$

■

5. Έστω $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το όριο $\lim_{t\to 0} \chi_{\mathbb{Q}+t}(x)$ δεν υπάρχει και επομένως

$$\lim_{t\to 0} \chi_{\mathbb{Q}+t}(x) \neq \chi_{\mathbb{Q}}(x)\,.$$

Λύση. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) := \chi_{\mathbb{Q}+t}(x_0)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Επειδή $\{0, 1\}$ είναι το πεδίο τιμών της f, αν το όριο $\lim_{t\to 0} f(t)$ υπάρχει θα είναι είτε $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$ ή $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$. Θα δείξουμε ότι το όριο $\lim_{t\to 0} f(t)$ δεν υπάρχει. Αν (ρ_n) είναι ακολουθία ρητών αριθμών και (α_n) είναι ακολουθία άρρητων αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} f(\rho_n) = \lim_{n\to\infty} \chi_{\mathbb{Q}+\rho_n}(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x_0 \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \chi_{\mathbb{Q}+\alpha_n}(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x_0 \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{αν } x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} f(\rho_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n)$ και άρα από την αρχή μεταφοράς έπεται ότι το όριο $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} \chi_{\mathbb{Q}+t}(x_0)$ δεν υπάρχει. ■

6. Έστω ο χώρος Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$, έστω $\mathfrak{B}$ η Borel σ-άλγεβρα και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\mu : \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ με $\mu(A) := m(f^{-1}(A))$. Δείξτε ότι το μ είναι ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Λύση. Επειδή η f είναι Lebesgue μετρήσιμη, για κάθε $A \in \mathfrak{B}$ το $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ και επομένως η συνάρτηση μ είναι καλά ορισμένη.
(i) Είναι $\mu(\emptyset) = m(f^{-1}(\emptyset)) = m(\emptyset) = 0$.

(ii) Έστω (A_n) ακολουθία ξένων ανά δύο Borel μετρήσιμων συνόλων. Επειδή για $m \neq n$

$$f^{-1}(A_m) \cap f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A_m \cap A_n) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset\,,$$

τα σύνολα $f^{-1}(A_n)$ είναι ξένα ανά δύο και Lebesgue μετρήσιμα. Επειδή

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)\,,$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= m\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right)\\ &= m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f^{-1}(A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.\end{aligned}$$

Άρα το μ είναι ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

■

7. Έστω ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, όπου $\mathfrak{B}$ η Borel σ-άλγεβρα.

   (α΄) Αν το $E \subset \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, δείξτε ότι $E \in \mathfrak{B}$.

   (β΄) Αν το $E \subset \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι Borel μετρήσιμη στο E.

Λύση.

(α΄) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επειδη το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό σύνολο στο $\mathbb{R}$, το $\{x\} \in \mathfrak{B}$. Αν το $E \subset \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, το E είναι αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων και επομένως το $E \in \mathfrak{B}$.

(β΄) Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι Borel μετρήσιμη στο E, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{x \in E : f(x) \le \alpha\} \in \mathfrak{B}\,, \quad \text{για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Επειδή το E είναι αριθμήσιμο σύνολο, το υποσύνολο $\{x \in E : f(x) \le \alpha\}$ του E είναι αριθμήσιμο σύνολο. Τότε από το (α΄) έπεται ότι το σύνολο $\{x \in E : f(x) \le \alpha\} \in \mathfrak{B}$.

■

8. Έστω (f_n), $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}$ και έστω $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ στο X. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, έστω $E_n = \{X : f_n > \lambda\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ και έστω $E = \{X : f > \lambda\}$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} E_n = E$ και $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(E)$.

Λύση. Επειδή η (f_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, (E_n) είναι αύξουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων και επομένως $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} E_n = E$. Αν $x \in \lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, τότε $x \in E_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$ και κατά συνέπεια $f_n(x) > \lambda$. Επειδή $f_n \nearrow f$, έπεται ότι $f(x) > \lambda$, δηλαδή $x \in E$ και επομένως $\lim_{n\to\infty} E_n \subseteq E$.
Αντίστροφα, έστω $x \in E$. Τότε $f(x) > \lambda$. Επειδή $f_n \nearrow f$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $f_n(x) > \lambda$. Τότε $x \in E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} E_n$ και επομένως $E \subseteq \lim_{n\to\infty} E_n$. Άρα $\lim_{n\to\infty} E_n = E$. Επειδή η (E_n) είναι αύξουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων, από γνωστή ιδιότητα $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(E)$. ■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{M}$, Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε ως γνωστόν ισχύει η εξής πρόταση(*απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος*): για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$ με $m(A) < \delta$ είναι

$$\int_A |f| \, \mathrm{d}m < \varepsilon \, .$$

Αν $A_n := \{x \in E : |f(x)| \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, χρησιμοποιώντας αυτή την πρόταση δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot m(A_n) = 0 \, .$$

Σημείωση. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue, μια διαφορετική απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος δίνεται στη "2η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση", ακαδ. έτος 2010-11, άσκηση 3.(α').

Λύση. Επειδή

$$n \cdot m(A_n) \le \int_{A_n} |f|\, dm \le \int_E |f|\, dm = M < \infty\,, \text{ (ανισότητα Chebyshev)}$$

έχουμε $m(A_n) \le M/n$ και επομένως $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0$. Τότε από την απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f|\, dm = 0\,. \qquad \text{(γιατί;)}$$

Όμως

$$0 \le n \cdot m(A_n) \le \int_{A_n} |f|\, dm$$

και άρα $\lim_{n\to\infty} n \cdot m(A_n) = 0$. ∎

2. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f \in L_1(E)$ τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$.

   Σημείωση. Το μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει σ-πεπερασμένο μέτρο. Επομένως το E είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων που έχουν πεπερασμένο μέτρο. Δηλαδή $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, όπου τα E_n είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα με $m(E_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

   Λύση. (*i*) Έστω $m(E) = 0$. Τότε η συνάρτηση $f(x) = 1$, για κάθε $x \in E$, είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη με $\int_E f\, dm = 0$.

   (*ii*) Έστω $m(E) > 0$ και έστω

$$c_n = \begin{cases} \frac{r^n}{m(E_n)} & \text{αν } m(E_n) > 0 \\ 1 & \text{αν } m(E_n) = 0\,, \end{cases}$$

   όπου $0 < r < 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{E_n}\,.$$

Επειδή $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, όπου τα E_n είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα με $m(E_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, η f είναι καλά ορισμένη στο E. Επίσης η f είναι μετρήσιμη με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$. Είναι

$$\begin{aligned}\int_E f\,dm &= \int_E \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{E_n}\,dm \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_E \chi_{E_n}\,dm \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n m(E_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} < \infty\,.\end{aligned}$$

Άρα, $f \in L_1(E)$ ■

3. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι από δεξιά παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Έστω $a \in \mathbb{R}$.

   (α΄) Δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η $f\chi_{[a,\,a+\delta]} \in L_1(\mathbb{R})$.

   (β΄) Αν $n \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\left[a,\,a+\frac{1}{n}\right]} f(x)\,dm(x) = f(a)\,.$$

Λύση.

(α΄) Επειδή η f είναι από δεξιά παραγωγίσιμη στο a, η δεξιά παράγωγος της f στο a ορίζεται ως εξής

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{για κάθε } x \in [a, a+\delta]\,, \quad |f(x)-f(a)-f'_+(a)(x-a)| < \varepsilon(x-a) \quad (*)$$

και επομένως

$$\text{για κάθε } x \in [a, a+\delta]\,, \quad \begin{aligned}[t] |f(x)| &\le |f(a)| + (x-a)(|f'_+(a)| + \varepsilon) \\ &\le |f(a)| + \delta(|f'_+(a)| + \varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια

$$\int_{[a,a+\delta]} |f(x)|\, dm(x) \le \big(|f(a)| + \delta(|f'_+(a)| + \varepsilon)\big)\, \delta < +\infty$$

και άρα η $f\chi_{[a,\, a+\delta]} \in L_1(\mathbb{R})$.

(β΄) Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \ge n_0$ είναι $\frac{1}{n} < \delta$. Τότε για $n \ge n_0$ από την $(*)$ έχουμε

$$\text{για κάθε } x \in \left[a,\, a+\frac{1}{n}\right], \quad |f(x) - f(a)| < \frac{1}{n}(|f'_+(a)| + \varepsilon)$$

και επομένως

$$\begin{aligned} \left| n \int_{\left[a,\, a+\frac{1}{n}\right]} f(x)\, dm(x) - f(a) \right| &= \left| n \int_{\left[a,\, a+\frac{1}{n}\right]} (f(x) - f(a))\, dm(x) \right| \\ &\le n \int_{\left[a,\, a+\frac{1}{n}\right]} |f(x) - f(a)|\, dm(x) \\ &\le \frac{1}{n}(|f'_+(a)| + \varepsilon)\,, \end{aligned}$$

για κάθε $n \ge n_0$. Άρα

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\left[a,\, a+\frac{1}{n}\right]} f(x)\, dm(x) = f(a)\,.$$

■

4. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n := 2^n \chi_{[0,\, 2^{-n}]}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Να υπολογιστεί το $\lim_{n\to\infty} f_n$ καθώς επίσης και το $\lim_{n\to} \int_{[0,1]} f_n\, dm$. Γιατί δεν εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue;

Λύση. Είναι

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n \chi_{[0,\, 2^{-n}]}(x) = 0\,, \quad \text{για κάθε } x \ne 0$$

και επομένως $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ $\sigma.\pi.$ στο $[0,1]$. Επίσης έχουμε

$$\int_{[0,1]} f_n\, dm = \int_{[0,1]} 2^n \chi_{[0,\,2^{-n}]}\, dm = \int_{[0,\,2^{-n}]} 2^n\, dm = 1\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

και άρα

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n\, dm = 1 \neq 0 = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n\, dm\,.$$

Το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue δεν εφαρμόζεται επειδή δεν υπάρχει συνάρτηση $g \in L_1([0,1])$ τέτοια ώστε $|f_n(x)| \leq g(x)$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$. ■

5. Έστω f_n, f, $n \in \mathbb{N}^*$, θετικές μετρήσιμες συναρτήσεις στο $X \in \mathcal{M}$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ κατά σημείο στο X και ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, dm = c$. Δείξτε ότι

$$\int_X f\, dm \in [0,c]\,.$$

Ισχύει $\int_X f\, dm = c$;

Λύση. Επειδή η f είναι θετική μετρήσιμη συνάρτηση στο X, είναι

$$\int_X f\, dm \geq 0\,.$$

Όμως από το λήμμα Fatou έχουμε

$$\int_X f\, dm = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\, dm \leq \underline{\lim} \int_X f_n\, dm = c$$

και επομένως

$$\int_X f\, dm \in [0,c]\,.$$

Γενικά δεν είναι $\int_X f\, dm = c$, δηλαδή γενικά δεν ισχύει η ισότητα στο λήμμα Fatou. Έστω για παράδειγμα η ακολουθία

$$f_n := 2^n \chi_{[0,\,2^{-n}]} + 1 \quad \text{στο } X = (0,1]\,.$$

Είναι $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$ στο $(0,1]$ και $\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1]} f_n\, dm = 2$, δηλαδή $c = 2$. Επομένως $f = 1$ στο $(0,1]$ και

$$\int_{(0,1]} 1\, dm = 1 < 2\,.$$

■

6. Έστω $X \subset \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(X) < \infty$ και έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in X$. Υποθέτουμε ότι (E_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του X τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, dm = 0\,.$$

(α΄) Αν

$$A_p := \left\{ x \in X :\ f(x) > \frac{1}{p} \right\}, \quad p \in \mathbb{N}^*\,,$$

δείξτε ότι

$$\lim_{p\to\infty} \int_X \chi_{X\setminus A_p}\, dm = 0\,.$$

(β΄) Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = 0$.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Είναι $E_n = (E_n \cap A_p) \cup (E_n \setminus A_p)$.

(γ΄) Η (β΄) γενικά δεν ισχύει αν $m(X) = \infty$. Αν $X = [0,\infty)$, θεωρείστε τη συνάρτηση

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_{E_n}\,, \quad \text{όπου } E_n = [n-1, n)\,.$$

Λύση.

(α΄) Επειδή η f είναι μετρήσιμη, η (A_p) είναι μια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του X με

$$\lim_{p\to\infty} A_p = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p = \{x \in X : f(x) > 0\} = X\,.$$

Επομένως η $\left(\chi_{X\setminus A_p}\right)$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με $\lim_{p\to\infty}\chi_{X\setminus A_p} = \chi_{\emptyset} = 0$. Επειδή $\left|\chi_{X\setminus A_p}\right| \leq 1$, για κάθε $p \in \mathbb{N}^*$ και $m(X) < \infty$, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης

$$\lim_{p\to\infty}\int_X \chi_{X\setminus A_p}\,dm = \int_X \lim_{p\to\infty}\chi_{X\setminus A_p}\,dm = 0\,.$$

<u>*Σημείωση*</u>. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων.

(β΄) Έστω $\varepsilon > 0$. Από το (α΄) υπάρχει $P \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\text{για κάθε } p \geq P \Rightarrow \int_X \chi_{X\setminus A_p}\,dm < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f\,dm = 0$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\text{για κάθε } n \geq N \Rightarrow \int_{E_n} f\,dm < \frac{\epsilon}{2P}\,.$$

Για κάθε $n \geq N$ έχουμε

$$\begin{aligned}
m(E_n) &= m\left((E_n\cap A_P)\cup(E_n\setminus A_P)\right)\\
&= m(E_n\cap A_P) + m(E_n\setminus A_P)\\
&\leq \int_{E_n\cap A_P} dm + \int_{E_n\setminus A_P} dm\\
&\leq \int_{E_n\cap A_P} Pf\,dm + \int_{X\setminus A_P} dm \qquad (Pf > 1 \text{ στο } A_P)\\
&\leq P\int_{E_n} f\,dm + \int_X \chi_{X\setminus A_P}\,dm\\
&< P\frac{\epsilon}{2P} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

και άρα $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = 0$.

(γ΄) Είναι $m([0,\infty)) = \infty$, $f > 0$ στο $[0,\infty)$ και

$$\int_{E_n} f\,dm = \int_{[n-1,\,n)} \frac{1}{n}\,dm = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$.

■

7. Έστω $a, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Δώστε ένα παράδειγμα συναρτήσεων $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n, f \in L_1(\mathbb{R})$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, έτσι ώστε

   - $f_n \longrightarrow f$ κατά σημείο καθώς το $n \to \infty$,
   - $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = a_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$,
   - $\int_{\mathbb{R}} f \, dm = a$.

   Υπόδειξη. Θεωρείστε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με

$$f_n = 3a \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \chi_{[k,k+1)} + \left(a_n - 3a \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \right) \chi_{[n,n+1)}$$

   Λύση. Ως γνωστόν η γεωμετρική σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} = \frac{1}{3}\,.$$

   Αν

$$f = 3a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \chi_{[k,k+1)}\,,$$

   παρατηρούμε ότι $f_n, f \in L_1(\mathbb{R})$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επίσης έχουμε

   - $f_n \longrightarrow f$ κατά σημείο καθώς το $n \to \infty$,
   - $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = a_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$,
   - $\int_{\mathbb{R}} f \, dm = a$.

■

8. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{αν } x \in (0,1) \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus (0,1)\,. \end{cases}$$

Έστω $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ το σύνολο των ρητών αριθμών. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων (g_n) στο $\mathbb{R}$ με

$$g_n(x) := f(x - r_n)\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

και τη συνάρτηση g στο $\mathbb{R}$ με

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g_n(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

(α΄) Δείξτε ότι η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}} f\,dm$.

(β΄) Δείξτε ότι η g είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}} g\,dm$.

Λύση.

(α΄) Επειδή η συνάρτηση f είναι μη αρνητική και μετρήσιμη, το ολοκλήρωμα Lebesgue $\int_{\mathbb{R}} f\,dm$ ισούται με το γενικευμένο ολκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2 - \lim_{\epsilon \to 0^+} 2\sqrt{\epsilon} = 2\,.$$

Επομένως $\int_{\mathbb{R}} f\,dm$=2.

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dm(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x - r_n)\,dm(x) \\ &= \int_{\mathbb{R} - r_n} f(x)\,dm(x) \qquad \text{(γνωστό αποτέλεσμα)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dm(x) = 2 \end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dm(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g_n(x) \right\} dm(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dm(x) \qquad \text{(γνωστό θεώρημα)} \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 2\,.
\end{aligned}$$

Άρα, η g είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\int_{\mathbb{R}} g\,dm = 2$.

■

4.4 Ακαδημαϊκό έτος 2013–14

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
1η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Αν $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^m\right) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)\,.$$

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{Q}$. Τότε $x = \frac{p}{q}$ με $p \in \mathbb{Z}$ και $q \in \mathbb{N}^*$. Για κάθε $n \geq 2q$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $n!\pi x = 2k\pi$. Τότε $\cos(n!\pi x) = 1$ και επομένως

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^m\right) = 1\,.$$

Αν $x \notin \mathbb{Q}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι $n!\pi x \neq k\pi$ για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε $|\cos(n!\pi x)| < 1$ και επομένως

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^m\right) = 0\,.$$

■

2. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{P}(X)$ το δυναμοσύνολο του X. Αν $x_0 \in X$, ορίζουμε το $\delta_{x_0} : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ με

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{αν το } x_0 \in E, \\ 0 & \text{αν το } x_0 \notin E\,. \end{cases}$$

Δηλαδή $\delta_{x_0}(E) = \chi_E(x_0)$. Δείξτε ότι το δ_{x_0}, γνωστό και σαν **μέτρο Dirac στο** x_0, είναι ένα μέτρο πιθανότητας. Ποια υποσύνολα του X έχουν μέτρο Dirac μηδέν;

Λύση. Είναι $\delta_{x_0}(\emptyset) = \chi_{\emptyset}(x_0) = 0$. Αν (E_n) είναι αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο υποσυνόλων του X, τότε

$$\begin{aligned}
\delta_{x_0}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}(x_0) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x_0) \qquad\qquad (\text{τα } E_n \text{ είναι ξένα ανά δύο}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x_0}(E_n)\,.
\end{aligned}$$

Επίσης $\delta_{x_0}(X) = \chi_X(x_0) = 1$. Επομένως το δ_{x_0} είναι ένα μέτρο πιθανότητας.

Αν E είναι υποσύνολο του X, τότε $\delta_{x_0}(E) = \chi_E(x_0) = 0$ αν και μόνο αν το $x_0 \notin E$. Επομένως ένα υποσύνολο E του X έχει μέτρο Dirac μηδέν, αν και μόνο αν το E δεν περιέχει το x_0. ∎

3. Αν ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέτρο μηδέν, τότε το εσωτερικό του συνόλου είναι το κενό σύνολο. Ειδικά το μόνο ανοικτό σύνολο που έχει μέτρο μηδέν είναι το κενό σύνολο. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Δώστε παραδείγματα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ που ενώ το εσωτερικό τους είναι το κενό σύνολο, τα σύνολα έχουν θετικό μέτρο.

Λύση. (i) Το εσωτερικό του γενικευμένου συνόλου Cantor C_a, $0 < a < 1$, είναι το κενό σύνολο. Όμως είναι γνωστό ότι $m(C_a) = 1 - a > 0$.

(ii) Έστω το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ του οποίου το εσωτερικό είναι το κενό σύνολο (ως γνωστόν το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$). Όμως

$$+\infty = m(\mathbb{R}) = m(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) + m(\mathbb{Q}) = m(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\,.$$

∎

4. Έστω A το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο $[0, 1]$ τέτοιο ώστε $x \in A$ αν και μόνο αν στο δεκαδικό ανάπτυγμα του $x = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2k+1} a_{2k+2} \cdots$ δεν είναι $a_{2k+1} = a_{2k+2} = 2$ για κανένα $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι το A είναι σύνολο Borel και υπολογίστε το μέτρο Lebesgue του A.

Λύση. Διαιρούμε το διάστημα $[0,1]$ σε εκατό ίσα μέρη και αφαιρούμε το διάστημα $(0.22, 0.23)$. Ας σημειωθεί ότι $0.22 = 0.2199\cdots$. Έστω A_1 η ένωση των υπόλοιπων 99 κλειστών διαστημάτων μήκους 100^{-1} το καθένα. Είναι $m(A_1) = 99/100$.

Στη συνέχεια διαιρούμε καθένα από τα υπόλοιπα 99 κλειστά διαστήματα σε εκατό ίσα μέρη και αφαιρούμε τα αντίστοιχα διαστήματα της μορφής $(0.a_1a_2 22,\ 0.a_1a_2 23)$. Έστω A_2 η ένωση των υπόλοιπων 99^2 κλειστών διαστημάτων μήκους 100^{-2} το καθένα. Είναι $m(A_2) = (99/100)^2$.

Στο n-οστό βήμα διαιρούμε καθένα από από τα 99^{n-1} κλειστά διαστήματα σε εκατό ίσα μέρη και αφαιρούμε τα αντίστοιχα διαστήματα της μορφής $(0.a_1a_2\cdots a_n 22,\ 0.a_1a_2\cdots a_n 23)$. Έστω A_n η ένωση των υπόλοιπων 99^n κλειστών διαστημάτων μήκους 100^{-n} το καθένα. Είναι

$$m(A_n) = \left(\frac{99}{100}\right)^n.$$

Επειδή $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, όπου (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων Borel με $m(A_n) < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, το A είναι σύνολο Borel με

$$m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^n = 0.$$

■

5. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και έστω $\alpha > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε ανοικτό διάστημα I

$$m(A \cap I) \geq \alpha\ell(I).$$

Δείξτε ότι $m(A^c) = 0$.
Εφαρμογή. Έστω $A \subset (0,1)$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και έστω $\alpha > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $a, b \in [0,1]$ με $0 \leq a < b \leq 1$ είναι $m(A \cap (a,b)) \geq \alpha(b-a)$. Τότε $m(A) = 1$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε

$$\alpha\ell(I) \leq m(A \cap I) \leq m(I) = \ell(I)$$

και επομένως $0 < \alpha \leq 1$.

(i) *Έστω* $m(A^c) < \infty$. Η απόδειξη θα γίνει με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι $m(A^c) > 0$. Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων (I_n) τέτοια ώστε $A^c \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m(A^c) + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} m(A^c)\,.$$

Ισοδύναμα,

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m(A^c)\,.$$

Επειδή

$$m(A^c) = m\left(A^c \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^c \cap I_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A^c \cap I_n)\,,$$

έχουμε ότι

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m(A^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A^c \cap I_n)\,.$$

Επειδή αυτές οι σειρές έχουν πεπερασμένα αθροίσματα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\varepsilon \ell(I_{n_0}) < m(A^c \cap I_{n_0})\,.$$

Πράγματι, αν

$$\varepsilon \ell(I_n) \geq m(A^c \cap I_n)\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*,$$

τότε θα είχαμε

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(A^c \cap I_n)$$

που είναι άτοπο.

Επομένως, επειδή από την υπόθεση $m(A \cap I_{n_0}) \geq \alpha \ell(I_{n_0})$, έχουμε ότι

$$\ell(I_{n_0}) = m(A \cap I_{n_0}) + m(A^c \cap I_{n_0}) > (\alpha + \varepsilon)\ell(I_{n_0})\,. \tag{4.2}$$

Επειδή $0 < \alpha \leq 1$, επιλέγουμε το $\varepsilon \in (0,1)$ έτσι ώστε $\alpha + \varepsilon > 1$ και κατά συνέπεια η (4.2) δεν μπορεί να ισχύει. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι $m(A^c) > 0$. Άρα $m(A^c) = 0$.

(ii) *Γενική περίπτωση*. Αν $n \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$m(A^c \cap (-n,n)) = m((A \cup (-n,n)^c)^c) < \infty\,.$$

Επειδή

$$m\left((A \cup (-n,n)^c) \cap I\right) \geq m(A \cap I) \geq \alpha \ell(I)\,,$$

για κάθε ανοικτό διάστημα I του $\mathbb{R}$, από την προηγούμενη περίπτωση έχουμε $m(A^c \cap (-n,n)) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε

$$m(A^c) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^c \cap (-n,n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A^c \cap (-n,n)) = 0$$

και άρα $m(A^c) = 0$. □

6. Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $m^*(E) < +\infty$. Δείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο, αν και μόνο αν υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια (K_n) ξένων ανά δύο συμπαγών συνόλων και σύνολο Z μέτρου μηδέν με

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup Z\,. \tag{4.3}$$

Λύση. Έστω ότι ισχύει η (4.3). Επειδή τα συμπαγή σύνολα K_n καθώς επίσης και το Z είναι Lebesgue μετρήσιμα σύνολα, το σύνολο E είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Αντίστροφα, έστω $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο με $m(E) < +\infty$. Ως γνωστόν

$$m(E) = \sup\left\{m(K) : K \subseteq E \text{ και το } K \text{ είναι συμπαγές}\right\}\,.$$

Επομένως για $\varepsilon = 1$ υπάρχει συμπαγές σύνολο $K_1 \subseteq E$ με

$$m(E) < m(K_1) + 1 \text{ και ισοδύναμα } m(E \setminus K_1) < 1\,.$$

Υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί ξένα ανά δύο συμπαγή σύνολα K_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ με $K_i \subseteq E$ και

$$m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} K_i\right) < \frac{1}{n-1}\,, \quad \text{για } n \geq 2\,.$$

Τότε υπάρχει συμπαγές σύνολο $K_n \subseteq E \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} K_i$ τέτοιο ώστε

$$m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) = m\left(\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} K_i\right) \setminus K_n\right) < \frac{1}{n}\,.$$

Επαγωγικά ορίζουμε μ' αυτό τον τρόπο μια αριθμήσιμη οικογένεια (K_n) ξένων ανά δύο υποσυνόλων του E με

$$m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) < \frac{1}{n}\,,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Αν ορίσουμε $Z := E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, τότε $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \cup Z$ με

$$m(Z) = m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) \leq m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) < \frac{1}{n}\,,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Άρα $m(Z) = 0$. ■

7. (**Συνάρτηση κατανομής**) Ένα θετικό μέτρο μ στη Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ λέγεται **μέτρο Borel**. Υποθέτουμε ότι το μέτρο μ είναι πεπερασμένο, δηλαδή $\mu(\mathbb{R}) < \infty$. Η **συνάρτηση κατανομής** του μέτρου μ, συμβολίζεται με F, ορίζεται στο $\mathbb{R}$ με

$$F(x) = \mu((-\infty, x])\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Δείξτε ότι

(α΄) Η F είναι αύξουσα.

(β΄) Η F είναι από δεξιά συνεχής, δηλαδή $F(x+) = \lim_{t \to x^+} F(t) = F(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ΄) Η F είναι φραγμένη.

(δ΄) Είναι $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \mu(\mathbb{R})$.

Λύση.

(α΄) Αν $x \le y$, τότε $(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$ και επομένως

$$F(x) = \mu((-\infty, x]) \le \mu((-\infty, y]) = F(y)\,.$$

Άρα η F είναι αύξουσα συνάρτηση.

(β΄) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επειδή η F είναι αύξουσα, το όριο $\lim_{t\to x^+} F(t) = F(x+)$ υπάρχει. Είναι

$$(-\infty, x+1] \supset \left(-\infty, x+\frac{1}{2}\right] \supset \cdots \text{ και } \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\infty,\, x+\frac{1}{n}\right] = (-\infty, x]\,.$$

Επομένως, επειδή το μέτρο μ είναι πεπερασμένο, από γνωστή ιδιότητα του μέτρου

$$\begin{aligned} F(x) = \mu((-\infty, x]) &= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left(-\infty,\, x+\frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} F\left(x+\frac{1}{n}\right) = F(x+)\,. \end{aligned}$$

Άρα $F(x+) = F(x)$, δηλαδή η F είναι από δεξιά συνεχής στο x και αυτό ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ΄) Επειδή το μέτρο μ είναι πεπερασμένο, έχουμε $F(x) = \mu((-\infty, x]) \le \mu(\mathbb{R}) < \infty$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η F είναι φραγμένη.

(δ΄) Επειδή η συνάρτηση F είναι μονότονη, τα όρια $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ και $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ υπάρχουν. Επίσης έχουμε

$$(-\infty, -1] \supset (-\infty, -2] \supset \cdots \text{ και } \bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, -n] = \emptyset\,.$$

Επομένως, επειδή το μέτρο μ είναι πεπερασμένο, από γνωστή ιδιότητα του μέτρου

$$0 = \mu(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, -n]) = \lim_{n\to\infty} F(-n) = \lim_{x\to-\infty} F(x)\,.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή το όριο $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ υπάρχει.

Παρόμοια έχουμε

$$(-\infty, 1] \subset (-\infty, 2] \subset \cdots \text{ και } \bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, n] = \mathbb{R}\,.$$

Επομένως, από γνωστή ιδιότητα του μέτρου

$$0 = \mu(\mathbb{R}) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, n]) = \lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{x\to+\infty} F(x)\,.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή το όριο $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ υπάρχει.

■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο $\mathbb{R}$ με

$$f_n = \begin{cases} \chi_{[0,\frac{1}{4}]} & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \chi_{[\frac{1}{4},1]} & \text{αν } n \text{ περιττός}\,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι $\overline{\lim} f_n = \chi_{[0,1]}$, $\underline{\lim} f_n = \chi_{\{\frac{1}{4}\}}$ και

$$\int_{\mathbb{R}} \underline{\lim} f_n \, dm < \underline{\lim} \int_{\mathbb{R}} f_n \, dm < \overline{\lim} \int_{\mathbb{R}} f_n \, dm < \int_{\mathbb{R}} \overline{\lim} f_n \, dm\,.$$

Λύση. (i) Αν $x \in [-\infty, 0) \cup \left\{\frac{1}{4}\right\} \cup (1, +\infty)$, παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι σταθερή και είναι

$$\underline{\lim} f_n(x) = \overline{\lim} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in [-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ 1 & \text{αν } x = \frac{1}{4}\,. \end{cases}$$

Αν $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, 1\right]$, οι όροι της ακολουθίας $(f_n(x))$ είναι εναλλάξ 0 και 1 και επομένως για n σταθερό

$$\sup_{k\geq n} f_k(x) = 1 \quad \text{και} \quad \inf_{k\geq n} f_k(x) = 0\,.$$

Κατά συνέπεια,

$$\overline{\lim} f_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} f_k(x) \right) = 1$$

και

$$\underline{\lim} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} f_k(x) \right) = 0\,.$$

Άρα,

$$\overline{\lim} f_n = \chi_{[0,1]} \quad \text{και} \quad \underline{\lim} f_n = \chi_{\{\frac{1}{4}\}}\,.$$

(ii) Επειδή

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,\frac{1}{4}]}\, dm = \frac{1}{4} & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \int_{\mathbb{R}} \chi_{[\frac{1}{4},1]}\, dm = \frac{3}{4} & \text{αν } n \text{ περιττός}\,, \end{cases}$$

είναι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \underline{\lim} f_n\, dm = 0 < \frac{1}{4} &= \underline{\lim} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm \\ &< \frac{3}{4} = \overline{\lim} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm < 1 = \int_{\mathbb{R}} \overline{\lim} f_n\, dm\,. \end{aligned}$$

■

2. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, παραγωγίσιμη στο 0 και τέτοια ώστε $f(0) = 0$. Έστω

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0\,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η $g \in L_1(\mathbb{R})$.

Λύση. Επειδή

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)\,,$$

για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$, $x \neq 0$, είναι $|g(x) - f'(0)| < 1$. Επομένως για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$ είναι $|g(x)| < M$, όπου

$M := 1 + |f'(0)| > 0$. Αν $I := (-\delta, \delta)$, τότε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |g|\, dm &= \int_I |g|\, dm + \int_{I^c} |g|\, dm \\ &\le \int_I M\, dm + \int_{I^c} \left|\frac{f(x)}{x}\right| dm(x) \\ &\le Mm(I) + \int_{I^c} \frac{|f(x)|}{\delta}\, dm(x) \\ &\le 2M\delta + \frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}} |f|\, dm\,.\end{aligned}$$

Επειδή η $f \in L_1(\mathbb{R})$, συμπεραίνουμε ότι και η $g \in L_1(\mathbb{R})$. ■

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \ge 0$ αν $x \in [0,1]$, $f(x) = 0$ αν $x \in \mathbb{R}\setminus[0,1]$ και $\int_{[0,1]} f\, dm > 0$. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με

$$f_n(x) := \frac{f(x+n)}{n}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n\, dm = 0\,.$$

Αν $g(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$, δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} g\, dm = \infty\,.$$

Λύση. Από τον ορισμό της ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) είναι προφανές ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Επίσης, με αλλαγή μεταβλητής εύκολα φαίνεται ότι οι f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμες και ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = \frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\, dx\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n\, dm = 0\,.$$

Η μικρότερη δυνατή συνάρτηση που κυριαρχεί τις (f_n) είναι η $g(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$. Επειδή

$$\int_{\mathbb{R}} g\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\, dx = \infty\,,$$

οι (f_n) δεν κυριαρχούνται από καμία ολοκληρώσιμη συνάρτηση g. ■

4. Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων στο $[0,1]$ με

$$f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}\,.$$

(i) Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σημειακά στη μηδενική συνάρτηση στο $[0,1]$. Συγκλίνει η (f_n) ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση στο $[0,1]$;

(ii) Δείξτε ότι οι υποθέσεις του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης ικανοποιούνται και επομένως

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = 0\,.$$

(iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ και να επαληθεύσετε ότι

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0\,.$$

Λύση.

(i) Η (f_n) είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο στο 0. Επειδή για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\,,$$

η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

(ii) Έστω $x\in(0,1]$, x σταθερό. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(t) := \frac{t^{3/2}x}{1+t^2x^2}\,,\quad t\in[1,+\infty)\,.$$

Η h είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(t) = \frac{1}{2}\frac{x\sqrt{t}(3-t^2x^2)}{(1+t^2x^2)^2}\,,$$

Η h παίρνει τη μέγιστη τιμή της για $t = \frac{\sqrt{3}}{x}$ και είναι

$$h\left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right) = \frac{3^{3/4}}{4\sqrt{x}}\,.$$

Επομένως, αν $g(x) := \frac{3^{3/4}}{4\sqrt{x}}$, $x \in (0,1]$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} \leq g(x)\,, \quad \text{σχεδόν για κάθε } x \in [0,1]\,.$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{3^{3/4}}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{3^{3/4}}{2}$$

συγκλίνει, από γνωστό θεώρημα η $g \in L_1([0,1])$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = 0\,.$$

(iii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \frac{1}{2\sqrt{n}}\int_0^1 \frac{2n^2x}{1+n^2x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{n}}\ln(1+n^2x^2)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{n}}\ln(1+n^2)\,.\end{aligned}$$

Επειδή

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t^2)}{2\sqrt{t}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{2t^{3/2}}{1+t^2} = 0\,, \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}$$

είναι

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}\ln(1+n^2) = 0\,.$$

■

5. Έστω $f \in L_1(E)$, $E \in \mathcal{M}$ και έστω $a > 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{a\to\infty} am(\{|f| > a\}) = 0\,.$$

Λύση. Αν (a_n) είναι ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων (g_n) με

$$g_n := |f|\chi_{\{|f|>a_n\}}\,.$$

Επειδή η $f \in L_1(E)$, είναι $|f| < \infty$ $\sigma.\pi.$ στο E. Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} g_n = 0 \ \sigma.\pi. \text{ στο } E \quad \text{και } |g_n| \le |f| \ \sigma.\pi. \text{ στο } E\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Τότε, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E g_n\, dm = 0\,.$$

Όμως

$$a_n m(\{|f| > a_n\}) = \int_E a_n \chi_{\{|f|>a_n\}}\, dm \le \int_E |f|\chi_{\{|f|>a_n\}}\, dm = \int_E g_n\, dm\,,$$

και κατά συνέπεια $\lim_{n\to\infty} a_n m(\{|f| > a_n\}) = 0$. Άρα,

$$\lim_{a\to\infty} am(\{|f| > a\}) = 0\,.$$

■

6. Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων στο $[0,1]$ με $f_n(x) = x^n - 2x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

   (i) Δείξτε ότι
   $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{[0,1]} f_n\, dm\right) \ne \int_{[0,1]}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) dm\,.$$

   (ii) Δείξτε ότι
   $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{[0,1]} |f_n|\, dm\right) = \infty\,.$$

Λύση.

(i) Επειδή
$$\int_0^1 x^n\,dx = \int_0^1 2x^{2n+1}\,dx = \frac{1}{n+1}\,,$$
η f_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ με $\int_{[0,1]} f_n\,dm = 0$. Επομένως,
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{[0,1]} f_n\,dm\right) = 0\,.$$
Είναι $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(1) = -\infty$. Αν $x \in [0,1)$, χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά έχουμε
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(x^n - 2x^{2n+1})\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\\ &= \frac{1}{1-x} - 2x\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}\end{aligned}$$
και κατά συνέπεια
$$\int_{[0,1]}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)dm(x) = \int_{[0,1]}\frac{1}{1+x}\,dm(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln 2\,.$$
Άρα,
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{[0,1]} f_n\,dm\right) = 0 \neq \ln 2 = \int_{[0,1]}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)dm\,.$$

(ii) Επειδή $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{[0,1]} f_n\,dm\right) \neq \int_{[0,1]}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)dm$, από το θεώρημα Beppo Levi έπεται ότι
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{[0,1]} |f_n|\,dm\right) = \infty\,.$$
Αυτό όμως αποδεικνύεται και χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Beppo Levi. Πράγματι, επειδή $f_n(x) \geq 0$ για $x \leq 2^{-1/(n+1)}$ και

$f_n(x) \leq 0$ για $x \geq 2^{-1/(n+1)}$, είναι

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_n(x)|\,dx &= \int_0^{2^{-1/(n+1)}} (x^n - 2x^{2n+1})\,dx \\ &\quad + \int_{2^{-1/(n+1)}}^1 (2x^{2n+1} - x^n)\,dx \\ &= \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)}\,.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{[0,1]} |f_n|\,dm \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty\,.$$

■

7. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο $T > 0$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(t) := g(t)e^{-t}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$ και ότι

$$\int_0^{\infty} g(t)e^{-t}\,dt = \frac{1}{1 - e^{-T}} \int_0^T g(t)e^{-t}\,dt\,.$$

Εφαρμογή. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} e^{-x}|\sin x|\,dx$.

Λύση. Επειδή g είναι συνεχής και περιοδική, η g θα είναι φραγμένη και κατά συνέπεια υπάρχει M τέτοιο ώστε

$$0 \leq g(t) \leq M\,, \quad \text{για κάθε } t \in [0, \infty)\,.$$

Επομένως,

$$\int_0^{\infty} g(t)e^{-t}\,dt \leq M \int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = M$$

Δηλαδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} f(t)\,dt$ συγκλίνει απόλυτα και από γνωστό θεώρημα η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$.

Για κάθε $N \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$\begin{aligned}\int_0^{NT} g(t)e^{-t}\,dt &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nT}^{(n+1)T} g(t)e^{-t}\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^T g(x+nT)e^{-(x+nT)}\,dx \\ &\qquad\qquad \text{(αντικατάσταση } t = x+nT\text{)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-nT} \int_0^T g(x+nT)e^{-x}\,dx \\ &= \frac{1-e^{-NT}}{1-e^{-T}} \int_0^T g(x)e^{-x}\,dx\,.\end{aligned}$$

και άρα

$$\int_0^\infty g(t)e^{-t}\,dt = \frac{1}{1-e^{-T}} \int_0^T g(t)e^{-t}\,dt\,.$$

Εφαρμογή. Επειδή η $y = |\sin x|$ είναι συνεχής και π-περιοδική, από τον παραπάνω τύπο έχουμε

$$\int_0^\infty e^{-x}|\sin x|\,dx = \frac{1}{1-e^{-\pi}} \int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx\,.$$

Το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx$ υπολογίζεται εύκολα με παραγοντική ολοκλήρωση και είναι

$$\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx = \frac{1-e^{-\pi}}{2}\,.$$

Άρα,

$$\int_0^\infty e^{-x}|\sin x|\,dx = \frac{1}{2}\,.$$

■

4.5 Ακαδημαϊκό έτος 2012–13

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω (a_n) πραγματική ακολουθία και έστω $A_n := (-\infty, a_n)$.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι

$$(i) \quad (-\infty, \underline{\lim}\, a_n) \subseteq \underline{\lim}\, A_n \subseteq (-\infty, \underline{\lim}\, a_n]$$

και

$$(ii) \quad (-\infty, \overline{\lim}\, a_n) \subseteq \overline{\lim}\, A_n \subseteq (-\infty, \overline{\lim}\, a_n]\,.$$

(β΄) Αν $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$, να αποδειχθεί ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} a_n$ υπάρχει(μπορεί να ισούται και με $\pm\infty$). Να αποδειχθεί ότι γενικά το αντίστροφο δεν ισχύει.

Λύση.

(α΄) Αν $x \in (-\infty, \underline{\lim}\, a_n)$, δηλαδή $x < \underline{\lim}\, a_n$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $x < a_n$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $x \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k$ και κατά συνέπεια $x \in \underline{\lim}\, A_n$. Δηλαδή $(-\infty, \underline{\lim}\, a_n) \subseteq \underline{\lim}\, A_n$.
Αν $x \in \underline{\lim}\, A_n$, τότε υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $x \in \bigcap_{k=n_1}^{\infty} A_k$. Δηλαδή $x \in A_k$ για κάθε $k \geq n_1$. Επομένως $x < a_k$ για κάθε $k \geq n_1$ και αυτό συνεπάγεται ότι $x \leq \underline{\lim}\, a_n$. Δηλαδή $\underline{\lim}\, A_n \subseteq (-\infty, \underline{\lim}\, a_n]$.
Ανάλογη είναι η απόδειξη της (ii).

(β΄) Αν $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$, από τις (i) και (ii) έπεται ότι

$$(-\infty, \overline{\lim}\, a_n) \subseteq (-\infty, \underline{\lim}\, a_n]$$

οπότε $\overline{\lim}\, a_n < \underline{\lim}\, a_n$. Επειδή $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$, συμπεραίνουμε ότι $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$ και επομένως το όριο $\lim_{n\to\infty} a_n$ υπάρχει(μπορεί να ισούται και με $\pm\infty$). Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πράγματι, αν $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ και

$$\underline{\lim}\, A_n = (-\infty, 0) \subset (-\infty, 0] = \overline{\lim}\, A_n\,.$$

■

2. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και έστω $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ συνάρτηση με $\mu(A) < +\infty$ για κάποιο $A \in \mathcal{A}$. Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

   (i) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ με $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Δηλαδή το μ είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο.

   (ii) $\mu(\emptyset) = 0$ και $\forall A, B \in \mathcal{A}$: $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

   (iii) $\forall A, B \in \mathcal{A} : \mu(A \triangle B) + \mu(A \cap B) = \mu(A \cup B)$.

   Αν το μ είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο, τότε για κάθε αριθμήσιμη οικογένεια (A_n) ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων είναι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

Λύση. $\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$: Αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < +\infty$, τότε $A \cap \emptyset = \emptyset$ και από τη (i) έχουμε

$$\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset) \Rightarrow \mu(\emptyset) = 0\,.$$

Αν $A, B \in \mathcal{A}$, χρησιμοποποιώντας τη (i) έχουμε

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (A \cap (B \setminus A) = \emptyset) \\ &= \mu(A) + \mu(B) \qquad ((B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset) \end{aligned}$$

$\underline{(ii) \Rightarrow (iii)}$: Εφαρμόζουμε τη (ii) για τα μετρήσιμα σύνολα $A \triangle B$ και $A \cap B$. Τότε,

$$\begin{aligned} \mu(A \triangle B) + \mu(A \cap B) &= \mu\left((A \triangle B) \cup (A \cap B)\right) + \mu\left((A \triangle B) \cap (A \cap B)\right) \\ &= \mu(A \cup B) + \mu(\emptyset) = \mu(A \cup B)\,. \end{aligned}$$

$\underline{(iii) \Rightarrow (i)}$: Έστω $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \cap B = \emptyset$. Από την (iii) για το ζεύγος των μετρήσιμων συνόλων $(A \cup B,\, B)$ έχουμε

$$\mu\left((A \cup B) \triangle B\right) + \mu\left((A \cup B) \cap B\right) = \mu\left((A \cup B) \cup B\right)\,,$$

οπότε

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B)\,.$$

Υποθέτουμε ότι το μ ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο. Έστω $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B$. Επειδή τα σύνολα A και $B \setminus A$ είναι ξένα, από τη (i) έχουμε

$$\mu(B) = \mu\,(A \cup (B \setminus A) = \mu(A) + m(B \setminus A)$$

και επομένως $\mu(A) \le \mu(B)$.

Έστω (A_n) αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων. Επαγωγικά από τη (i) έχουμε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)\,, \quad \text{για κάθε } N \in \mathbb{N}^*\,.$$

Επομένως

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \ge \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)\,, \quad \text{για κάθε } N \in \mathbb{N}^*\,.$$

Άρα,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \ge \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

■

3. Έστω ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ και έστω $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ με

$$\nu(A) = \begin{cases} 0 & \text{αν } A = \emptyset \\ \sum\limits_{n \in A} \frac{1}{n^2} & \text{αν το } A \text{ είναι πεπερασμένο σύνολο και δεν περιέχει το } 0 \\ +\infty & \text{αν το } A \text{ είναι απειροσύνολο ή το } A \text{ περιέχει το } 0\,. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι το ν είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο. Είναι το ν σ-αθροιστικό θετικό μέτρο;

Λύση.

(α΄) Θα δείξουμε ότι το ν είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο. Έστω A και B ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του $\mathbb{N}$

1η περίπτωση : Το 0 ανήκει στο $A \cup B$. Από τον ορισμό του ν είναι $\nu(A \cup B) = \infty$. Επειδή $0 \in A$ ή $0 \in B$, είναι $\nu(A) + \nu(B) = \infty$ και επομένως

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)\,.$$

2η περίπτωση : Το 0 δεν ανήκει στο $A \cup B$. Το $A \cup B$ είναι πεπερασμένο σύνολο ή απειροσύνολο.

– Αν το $A \cup B$ είναι πεπερασμένο, τα A, B είναι πεπερασμένα σύνολα και επομένως

$$\nu(A \cup B) = \sum_{n \in A \cup B} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \in B} \frac{1}{n^2} = \nu(A) + \nu(B)\,.$$

– Αν το $A \cup B$ είναι απειροσύνολο, τότε είτε το A είναι απειροσύνολο ή το B είναι απειροσύνολο και επομένως

$$\nu(A \cup B) = \infty = \nu(A) + \nu(B)\,.$$

Άρα το ν είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο.

(β΄) Αν $A_n = \{n\}$, τότε

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{n\}\right) = \nu(\mathbb{N}^*) = \infty$$

ενώ

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \nu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\,.$$

Δηλαδή

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{n\}\right) \neq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \nu(\{n\})$$

και επομένως το ν δεν είναι σ-αθροιστικό θετικό μέτρο.

■

4. Έστω $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και έστω

$$I_{k,n} := \left(r_n - \frac{1}{k2^{n+1}}, r_n + \frac{1}{k2^{n+1}}\right), \; A_k := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n} \;, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}^* .$$

Αν $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, ποιο είναι το μέτρο Lebesgue του A; Είναι $A = \mathbb{Q}$;

Σημείωση. Είναι γνωστό ότι το σύνολο των άρρητων αριθμών $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$(προκύπτει εύκολα από το θεώρημα κατηγορίας του Baire).

Λύση. Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι $I_{k+1,n} \subset I_{k,n}$, η (A_k) είναι φθίνουσα ακολουθία ανοικτών συνόλων με μέτρο Lebesgue

$$m(A_k) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(I_{k,n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k2^n} = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{k} .$$

Επομένως $\lim_{k\to\infty} m(A_k) = 0$.
Το $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ είναι ένα σύνολο Borel. Επειδή η (A_k) είναι φθίνουσα ακολουθία ανοικτών συνόλων με $m(A_k) < \infty$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$, έχουμε

$$m(A) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(A_k) = 0 .$$

Είναι $A \neq \mathbb{Q}$. Αν υποθέσουμε ότι $A = \mathbb{Q}$, τότε

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus A_k)$$

δηλαδή το σύνολο των άρρητων αριθμών $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Άτοπο, επειδή από το θεώρημα κατηγορίας του Baire το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. ∎

5. Για $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a σταθερό, ορίζουμε την οικογένεια

$$\mathcal{T}_a := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \; A + a \in \mathfrak{B}\} \;,$$

όπου $A + a = \{x + a : \; x \in A\}$ και $\mathfrak{B}$ η Borel σ-άλγεβρα.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{T}_a$ είναι μία σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$.

(β΄) Να αποδειχθεί ότι $\mathfrak{B} = \mathcal{T}_a$ (δηλαδή η Borel σ-άλγεβρα είναι αναλλοίωτη ως προς τη μεταφορά).

(γ΄) Για κάθε $A \in \mathfrak{B}$ θέτουμε $\mu(A) := m(A + a)$, όπου m είναι το μέτρο Lebesgue. Να αποδειχθεί ότι το μ είναι ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ και να συμπεράνετε ότι $m(A+a) = m(A)$ για κάθε $A \in \mathfrak{B}$.

Λύση.

(α΄) Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{T}_a$ είναι μία σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$.
– Επειδή $\mathbb{R} + a = \mathbb{R} \in \mathfrak{B}$, το $\mathbb{R} \in \mathcal{T}_a$.
– Έστω $A \in \mathcal{T}_a$. Τότε

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{T}_a &\Leftrightarrow A + a \in \mathfrak{B} && \text{(ορισμός της } \mathcal{T}_a\text{)} \\ &\Leftrightarrow (A + a)^c \in \mathfrak{B} && (\mathfrak{B} \text{ είναι σ-άλγεβρα}) \\ &\Leftrightarrow A^c + a \in \mathfrak{B} && ((A + a)^c = A^c + a) \\ &\Leftrightarrow A^c \in \mathcal{T}_a\,. && \text{(ορισμός της } \mathcal{T}_a\text{)} \end{aligned}$$

– Έστω (A_n) αριθμήσιμη οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{T}_a$. Επειδή $A_n + a \in \mathfrak{B}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και η $\mathfrak{B}$ είναι σ-άλγεβρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n + a) \in \mathfrak{B}$. Τότε

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + a = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n + a) \in \mathfrak{B}$$

και επομένως $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}_a$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι η $\mathcal{T}_a$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$.

Σημείωση. Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$(A + a)^c = A^c + a \quad \text{και} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n + a) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + a\,.$$

(β΄) Θα αποδείξουμε ότι $\mathfrak{B} = \mathcal{T}_a$.
– Θα δείξουμε πρώτα ότι $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}_a$. Επειδή $(x, y)+a = (x+a, y+a) \in \mathfrak{B}$, το ανοικτό και φραγμένο διάστημα $(x, y) \in \mathcal{T}_a$. Όμως η Borel

σ-άλγεβρα $\mathfrak{B}$ παράγεται από τα ανοικτά και φραγμένα διαστήματα. Επομένως $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}_a$.

– Θα δείξουμε τώρα ότι $\mathcal{T}_a \subseteq \mathfrak{B}$. Έστω $A \in \mathcal{T}_a$. Τότε $A + a \in \mathfrak{B}$. Αν αντικαταστήσουμε το a με το $-a$, αποδείξαμε προηγουμένως ότι $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}_{-a}$. Επομένως $A+a \in \mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}_{-a}$ και κατά συνέπεια $(A+a)-a = A \in \mathfrak{B}$. Άρα $\mathcal{T}_a \subseteq \mathfrak{B}$.

(γ') – Επειδή $\emptyset + a = \emptyset$, είναι $\mu(\emptyset) = m(\emptyset) = 0$.

– Έστω (A_n) αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο συνόλων Borel. Τότε

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + a = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n + a)\,,$$

όπου $(A_n + a)$ είναι ξένα ανά δύο σύνολα Borel. Επομένως

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= m\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + a\right) && \text{(ορισμός του } \mu\text{)} \\ &= m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n + a)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n + a) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \end{aligned}$$

και άρα το μ είναι σ-αθροιστικό θετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Επειδή για κάθε ανοικτό και φραγμένο διάστημα (x, y) είναι

$$\mu((x,y)) = m((x,y) + a) = m((x+a, y+a)) = m((x,y))\,,$$

από γνωστό θεώρημα έπεται ότι $\mu = m$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ισχύει $m(A + a) = m(A)$ για κάθε $A \in \mathfrak{B}$ (αυτό φυσικά είναι γνωστό αποτέλεσμα του μέτρου Lebesgue).

■

6. Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση στο μετρήσιμο σύνολο E. Τότε υπάρχουν ακολουθίες απλών συναρτήσεων (s_n) και (t_n) στο E,

τέτοιες ώστε η (s_n) είναι αύξουσα, η (t_n) είναι φθίνουσα και $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n = f$ ομοιόμορφα στο E.

Λύση. Επειδή η συνάρτηση f είναι φραγμένη, υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $-N < f < N$ στο E. Για κάθε $n \geq N$ θεωρούμε τη διαμέριση $P_n = \left\{y_0, y_1, \ldots, y_{m(n)}\right\}$ του $[-N, N]$ με

$$\|P_n\| = \max\{y_k - y_{k-1} : 1 \leq k \leq m(n)\} < \frac{1}{n}.$$

Αν $I_k = [y_k - y_{k-1})$ και

$$E_k = f^{-1}(I_k) = \{x \in E : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}, \ 1 \leq k \leq m(n),$$

τα E_k είναι μετρήσιμα υποσύνολα του E. Ορίζουμε τις απλές συναρτήσεις φ_n και ψ_n με

$$\varphi_n := \sum_{k=1}^{m(n)} y_{k-1}\chi_{E_k} \quad \text{και} \quad \psi_n := \sum_{k=1}^{m(n)} y_k \chi_{E_k}.$$

Για $x \in E$ υπάρχει μοναδικό k, $1 \leq k \leq m(n)$, τέτοιο ώστε $y_{k-1} \leq f(x) < y_k$ και επομένως

$$\varphi_n(x) = y_{k-1} \leq f(x) < y_k = \psi_n(x).$$

Επειδή $y_k - y_{k-1} < 1/n$, παρατηρούμε ότι

$$0 \leq f - \varphi_n \leq \psi_n - \varphi_n < \frac{1}{n} \text{ στο } E$$

και

$$0 \leq \psi_n - f \leq \psi_n - \varphi_n < \frac{1}{n} \text{ στο } E.$$

Δηλαδή

$$0 \leq f(x) - \varphi_n(x) < \frac{1}{n} \text{ και } 0 \leq \psi_n(x) - f(x) < \frac{1}{n},$$

για κάθε $x \in E$ και για κάθε $n \geq N$. Άρα $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \psi_n = f$ ομοιόμορφα στο E.

Έστω $s_n := \max\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ και $t_n := \min\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Τότε η (s_n) είναι αύξουσα και η (t_n) είναι φθίνουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n = f$ ομοιόμορφα στο E. ∎

2η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω (a_n) ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε τη συνάρτηση f στο $[1,\infty)$ με $f(x) = a_n$ αν $n \le x < n+1$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι μετρήσιμη με

$$\int_{[1,\infty)} f\,dm = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.$$

Λύση. Η συνάρτηση

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{[n,n+1)}$$

είναι μετρήσιμη και ισχύει

$$\int_{[1,\infty)} f\,dm = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{[1,\infty)} \chi_{[n,n+1)}\,dm = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.$$

■

2. Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$.

(α΄) Έστω $M \ge 0$ τέτοιο ώστε $\int_E f_n\,dm \le M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Δείξτε ότι

$$\int_E (\underline{\lim}\, f_n)\; dm \le M\,.$$

(β΄) Να αποδειχθεί ότι η ιδιότητα (α΄) είναι ισοδύναμη με το λήμμα Fatou, δηλαδή

$$\int_E (\underline{\lim}\, f_n)\; \mathrm{dm} \le \underline{\lim} \int_E f_n\,dm\,.$$

Λύση.

(α΄) Από το λήμμα Fatou έχουμε

$$\int_E (\underline{\lim}\, f_n)\; dm \le \underline{\lim} \int_E f_n\,dm \le M\,.$$

(β′) Υποθέτουμε ότι αν $\int_E f_n\,dm \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε έχουμε $\int_E (\underline{\lim}\, f_n)\,\mathrm{d}m \leq M$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\underline{\lim} \int_E f_n\,\mathrm{d}m \leq M\,.$$

Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ από την υπόθεση έχουμε

$$\inf_{k\geq n} \int_E f_k\,\mathrm{d}m \leq \int_E f_n\,\mathrm{d}m \leq M$$

και επομένως

$$\underline{\lim} \int_E f_n\,dm = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} \int_E f_k\,dm \right) \leq M\,.$$

■

3. Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων στο χώρο $L_1(E)$, $E \in \mathcal{M}$. Αν $f_n \to f$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_1$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\,dm = 0$$

και $\lim_{n\to\infty} f_n = g$ $\sigma.\pi.$ στο E, να αποδειχθεί ότι $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο E.

Λύση. Από το λήμμα Fatou έχουμε

$$\int_E \underline{\lim}\, |f_n - f|\,dm \leq \underline{\lim} \int_E |f_n - f|\,dm\,.$$

Επειδή από την υπόθεση $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\,dm = 0$ και η ακολουθία $(|f_n - f|)$ συγκλίνει στη $|g - f|$ $\sigma.\pi.$ στο E, έπεται ότι

$$\int_E |g - f|\,dm = 0\,.$$

Άρα, $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο E. ■

4. Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^1 (1-x)^n \sin(\pi x)\,dx\,.$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = t/n$, $t \in [0, n]$, έχουμε

$$\begin{aligned} n^2 \int_0^1 (1-x)^n \sin(\pi x)\, dx &= \int_0^n n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \sin\left(\frac{\pi t}{n}\right) dt \\ &= \int_0^\infty f_n(t)\, dt\,, \end{aligned}$$

όπου

$$f_n(t) := n\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \sin\left(\frac{\pi t}{n}\right) \chi_{(0,n)}(t)\,, \quad t \in (0,\infty)\,,\, n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Η (f_n) είναι ακολουθία συνεχών και μη αρνητικών συναρτήσεων στο $(0,\infty)$. Επειδή για $t \in (0,\infty)$ είναι

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{\pi t}{n}\right) = \pi t \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi t/n)}{\pi t/n} = \pi \lim_{u\to\infty} \frac{\sin u}{u} = \pi t\,,$$

η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στη $g(t) := e^{-t}\pi t$, $t \in (0,\infty)$. Επίσης

$$f_n(t) = n\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \sin\left(\frac{\pi t}{n}\right) \chi_{(0,n)}(t) \le n e^{-t} \cdot \frac{\pi t}{n} = g(t)\,, \quad t \in (0,\infty)$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(t)\, dt = \pi \int_0^\infty t e^{-t}\, dt & \\ &= -\pi \lim_{t\to\infty} t e^{-t} + \pi \int_0^\infty e^{-t}\, dt \quad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\ &= \pi \end{aligned}$$

συγκλίνει. Επομένως η g είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0,\infty)$ με

$$\int_{(0,\infty)} g(t)\, dm(t) = \int_0^\infty g(t)\, dt = \pi\,.$$

Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^1 (1-x)^n \sin(\pi x)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} f_n(t)\, dm(t) \\ &= \int_{(0,\infty)} g(t)\, dm(t) = \pi\,. \end{aligned}$$

■

5. Έστω f Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και έστω $\alpha > 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{-\alpha}f(nx)\right) = 0 \text{ σχεδόν για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = nx$, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |n^{-\alpha}f(nx)|\,dm(x) = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} |n^{-\alpha}f(t)|\,dm(t) = \frac{1}{n^{\alpha+1}}\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dm(t)\,.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n^{\alpha+1}\right)$ συγκλίνει (είναι $\alpha+1 > 1$) και η $f \in L_1(\mathbb{R})$, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} |n^{-\alpha}f(nx)|\,dm(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dm(t) < \infty$$

συγκλίνει. Επομένως, από το θεώρημα Beppo Levi η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{-\alpha}f(nx)\right)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κατά συνέπεια $\lim_{n\to\infty}\left(n^{-\alpha}f(nx)\right) = 0$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ■

6. Έστω $f \in L_1(E)$ και έστω (A_n) αριθμήσιμη οικογένεια μετρήσιμων υποσυνόλων του $E \in \mathcal{M}$. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \left|\chi_{A_n} - f\right|\,dm = 0\,.$$

(α΄) Να αποδειχθεί ότι $\{|f| > 2\} \subset \left\{\left|f - \chi_{A_n}\right| > 1\right\}$ και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebyshev να συμπεράνετε ότι

$$|f| \leq 2 \ \sigma.\pi. \ \text{ στο } E\,.$$

(β΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \left|\chi_{A_n} - f^2\right|\,dm = 0\,.$$

(γ΄) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο A, $A \subset E$, τέτοιο ώστε $f = \chi_A$ $\sigma.\pi.$ στο E.

(δ΄) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n \triangle A) < \infty$, να αποδειχθεί ότι $\chi_{A_n} \longrightarrow \chi_A$ $\sigma.\pi.$ στο E.

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\begin{aligned} m(\{x \in E : |f(x)| > 2\}) &\leq m\left(\left\{x \in E : \left|f(x) - \chi_{A_n}(x)\right| > 1\right\}\right) \\ &\leq \int_E \left|f - \chi_{A_n}\right| dm \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,. \end{aligned}$$

(ανισότητα Chebyshev)

Επομένως $m(\{x \in E : |f(x)| > 2\}) = 0$ και αυτό συνεπάγεται ότι $|f| \leq 2$ $\sigma.\pi.$ στο E.

(β΄) Επειδή

$$\begin{aligned} \int_E \left|\chi_{A_n} - f^2\right| dm &= \int_E \left|\chi_{A_n}^2 - f^2\right| dm \qquad (\chi_{A_n}^2 = \chi_{A_n}) \\ &= \int_E \left|\chi_{A_n} - f\right| \left|\chi_{A_n} + f\right| dm \\ &\leq \int_E \left|\chi_{A_n} - f\right| \left(\chi_{A_n} + |f|\right) dm \\ &\leq 3 \int_E \left|\chi_{A_n} - f\right| dm\,, \end{aligned}$$

έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \left|\chi_{A_n} - f^2\right| dm = 0\,.$$

(γ΄) Επειδή

$$\begin{aligned} \int_E |f - f^2|\, dm &= \int_E \left|\left(f - \chi_{A_n}\right) + \left(\chi_{A_n} - f^2\right)\right| dm \\ &\leq \int_E \left|\chi_{A_n} - f\right| dm + \int_E \left|\chi_{A_n} - f^2\right| dm \end{aligned}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \left|\chi_{A_n} - f\right| dm = \lim_{n\to\infty} \int_E \left|\chi_{A_n} - f^2\right| dm = 0\,,$$

έχουμε ότι $\int_E |f - f^2|\, dm = 0$. Επομένως $f^2 = f$ $\sigma.\pi.$ στο E και αυτό συνεπάγεται ότι $f = \chi_A$ $\sigma.\pi.$ στο E, όπου A μετρήσιμο υποσύνολο του E.

(δʹ) Επειδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E \left|\chi_{A_n} - \chi_A\right| \, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E \chi_{A_n \triangle A}\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n \triangle A) < \infty\,,$$

από το θεώρημα Beppo Levi η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\chi_{A_n} - \chi_A\right)$ συγκλίνει $\sigma.\pi.$ στο E και κατά συνέπεια $\chi_{A_n} \longrightarrow \chi_A$ $\sigma.\pi.$ στο E.

■

7. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + x^2} \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x)\,.$$

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι μετρήσιμη, Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}} f\, dm\,.$$

Λύση. Επειδή $m(\mathbb{Q}) = 0$, αν $g(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$, είναι $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$. Όμως η g είναι συνεχής και κατά συνέπεια μετρήσιμη. Επομένως και η f θα είναι μετρήσιμη. Αν αποδείξουμε ότι η g είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε και η f θα είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη.

Για να αποδείξουμε ότι η g είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx$ συγκλίνει απόλυτα. Αυτό όμως ισχύει επειδή

$$|g(x)| = \left|\frac{\sin x}{1 + x^2}\right| \le \frac{1}{1 + x^2}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \pi$$

συγκλίνει. Επειδή $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f\,dm &= \int_{\mathbb{R}} g\,dm \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx = 0\,.\end{aligned}$$

(η g είναι περιττή συνάρτηση)

■

4.6 Ακαδημαϊκό έτος 2011–12

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
1η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω $\mathfrak{F}'$ οικογένεια υποσυνόλων του X η οποία ορίζεται ως εξής

$$\mathfrak{F}' = \{E \subseteq X : \text{υπάρχουν } A, B \in \mathfrak{F}, \text{ τέτοια ώστε } A \subseteq E \subseteq B \\ \text{με } \mu\,(B \setminus A) = 0\}\ .$$

Δείξτε ότι η $\mathfrak{F}'$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X.

Λύση. Είναι προφανές ότι το $X \in \mathfrak{F}'$.

Έστω $E \in \mathfrak{F}'$. Τότε υπάρχουν $A, B \in \mathfrak{F}$ τέτοια ώστε $A \subseteq E \subseteq B$ με $\mu\,(B \setminus A) = 0$. Τα $A^c, B^c \in \mathfrak{F}$ με $B^c \subseteq E^c \subseteq A^c$ και $A^c \setminus B^c = B \setminus A$. Επομένως,

$$\mu\,(A^c \setminus B^c) = \mu\,(B \setminus A) = 0$$

και κατά συνέπεια το $E^c \in \mathfrak{F}'$.

Αν $E_n \in \mathfrak{F}'$, $n \in \mathbb{N}^*$, τότε υπάρχουν $A_n, B_n \in \mathfrak{F}$ με $A_n \subseteq E_n \subseteq B_n$ και $\mu\,(B_n \setminus A_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Είναι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ με $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{F}$ και

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n)\ .$$

Επομένως,

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\,(B_n \setminus A_n) = 0$$

και κατά συνέπεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{F}'$. Άρα η $\mathfrak{F}'$ είναι μία σ-άλγεβρα στο X. ∎

2. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας και έστω (A_n) μια αριθμήσιμη οικογένεια ενδεχόμενων.

(α΄) Αν η (A_n) είναι αριθμήσιμη οικογένεια *ανεξάρτητων* ενδεχόμενων με $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, δείξτε ότι

$$P\left(\overline{\lim} A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1\,.$$

(β΄) Να βρεθεί αριθμήσιμη οικογένεια (A_n) μη ανεξάρτητων ενδεχόμενων, τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ και $P\left(\overline{\lim} A_n\right) \neq 1$.

Υπόδειξη. (α΄) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $e^{-x} \geq 1 - x$, $x \geq 0$, να αποδειχθεί ότι $P(E_n^c) = 0$, όπου $E_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Λύση.

(α΄) Αν $E_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, είναι

$$E_n^c := \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c \text{ με } \bigcap_{k=n}^{N} A_k^c \searrow \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
P\left(E_n^c\right) &= P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} P\left(A_k^c\right) && (\text{τα } A_k^c \text{ είναι ανεξάρτητα}) \\
&= \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} \left(1 - P(A_k)\right) \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} e^{-P(A_k)} \\
&= \lim_{N\to\infty} \exp\left(-\sum_{k=n}^{N} P(A_k)\right) \\
&= 0\,. && (\lim_{N\to\infty} \textstyle\sum_{k=n}^{N} P(A_k) = \infty)
\end{aligned}$$

Άρα $P(E_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή

$$E_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \,,$$

τελικά έχουμε

$$P\left(\overline{\lim}\, A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n) = 1\,.$$

(β') Ρίχνουμε ένα ζάρι και ορίζουμε A_n, $n \in \mathbb{N}^*$, να είναι το ενδεχόμενο να έλθει έξι(6). Είναι

$$A_1 = A_2 = A_3 = \cdots\,.$$

Τα μη ανεξάρτητα ενδεχόμενα A_n είναι τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} = \infty$$

και

$$P\left(\overline{\lim}\, A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P(A_1) = \frac{1}{6} \neq 1\,.$$

■

3. (α') Έστω (E_n) ακολουθία ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων και έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*\left(A \cap E_n\right)\,.$$

(β') Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων συνόλων (B_n) με $A_n \subseteq B_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Χρησιμοποιώντας το (α') να αποδειχθεί ότι

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*\left(A_n\right)\,.$$

Λύση.

(α΄) Επειδή το εξωτερικό μέτρο m^* είναι υποαθροιστικό, έχουμε

$$m^*\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\right)=m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A\cap E_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}m^*\left(A\cap E_n\right).$$

Όμως, για κάθε $N\in\mathbb{N}^*$ είναι

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}m^*\left(A\cap E_n\right)&=m^*\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{N}E_n\right)\right) && \text{(γνωστό λήμμα)}\\ &\leq m^*\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\right)\end{aligned}$$

και επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty}m^*\left(A\cap E_n\right)\leq m^*\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\right).$$

Άρα,

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m^*\left(A_n\right).$$

(β΄) Αν $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, τότε $A\cap B_n=A_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$. Επομένως,

$$\begin{aligned}m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)&=m^*\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\right)\\ &=m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A\cap B_n\right) && \text{(από το (α΄))}\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}m^*\left(A_n\right).\end{aligned}$$

■

4. Έστω E υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A_\varepsilon\subseteq E$ τέτοιο ώστε $m^*\left(E\setminus A_\varepsilon\right)<\varepsilon$.

Λύση. Αν το E είναι Lebesgue μετρήσιμο, τότε για $A=E$ έχουμε $m^*\left(E\setminus A\right)=0<\varepsilon$.

Αντίστροφα, αν η συνθήκη ικανοποιείται, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο A_n με $A_n \subseteq E$ και $m^*(E \setminus A_n) < 1/n$. Θέτουμε $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Το A είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $A \subseteq E$ και $E \setminus A \subseteq E \setminus A_n$. Επομένως

$$m^*(E \setminus A) \leq m^*(E \setminus A_n) < \frac{1}{n}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Άρα $m^*(E \setminus A) = 0$ και κατά συνέπεια το σύνολο $E \setminus A$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Επειδή $E = A \cup (E \setminus A)$, τότε και το E θα είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. ■

5. Έστω $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και έστω $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

   (α΄) Δείξτε ότι υπάρχουν Lebesgue μετρήσιμα σύνολα $G, G_n \in \mathcal{M}$ τέτοια ώστε

   $$A \subseteq G, \quad A_n \subseteq G_n \subseteq G$$

   με

   $$m^*(A) = m(G) \text{ και } m^*(A_n) = m(G_n), \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

   (β΄) Δείξτε ότι

   $$m^*(A) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} m^*(A_n).$$

Λύση.

(α΄) Ως γνωστόν υπάρχουν G_δ σύνολα G, C_n, τέτοια ώστε $A \subseteq G$, $A_n \subseteq C_n$ με $m^*(A) = m(G)$ και $m^*(A_n) = m(C_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή $A_n \subseteq C_n \cap G \subseteq C_n$, έχουμε

$$m(C_n) = m^*(A_n) \leq m(C_n \cap G) \leq m(C_n)$$

και επομένως $m(C_n) = m(C_n \cap G)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Τα σύνολα $G_n := C_n \cap G$, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι τα ζητούμενα.

(β΄) Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το μέτρο Lebesgue είναι σ-αθροιστικό και γι' αυτό θέτουμε

$$D_n := \bigcap_{k=n}^{\infty} G_k\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Επειδή

$$A_n \subseteq A_k \subseteq G_k\,, \quad \forall k \geq n\,,$$

έχουμε $A_n \subseteq D_n \subseteq G_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως

$$m^*(A_n) \leq m^*(D_n) = m(D_n) \leq m(G_n)$$

και κατά συνέπεια $m^*(A_n) = m(D_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Η (D_n) είναι αύξουσα αριθμήσιμη οικογένεια Lebesgue μετρήσιμων συνόλων και κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty} m^*(A_n) = \lim_{n\to\infty} m(D_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right)\,.$$

Επειδή

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \subseteq G$$

και $m^*(A) = m(G)$, έχουμε $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = m^*(A)$. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} m^*(A_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = m^*(A) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\,.$$

■

6. (**Κατασκευή γενικευμένου συνόλου Cantor**)

Δίνεται πραγματικός αριθμός $k \geq 3$ και θέτουμε $E_1 = I_{1,1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)$. Το σύνολο $[0,1] \setminus E_1 = J_{1,1} \cup J_{1,2}$ είναι η ένωση δύο κλειστών διαστημάτων $J_{1,1}$ και $J_{1,2}$ μήκους $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right) > \frac{1}{k^2}$ το καθένα.
Έστω $I_{2,1}$ και $I_{2,2}$ τα ανοικτά διαστήματα μήκους $\frac{1}{k^2}$ το καθένα με κέντρα τα κέντρα των διαστημάτων $J_{1,1}$ και $J_{1,2}$ αντίστοιχα. Θέτουμε $E_2 = I_{2,1} \cup I_{2,2}$.

Αποδείξτε ότι επαγωγικά μπορούμε να ορίσουμε την αριθμήσιμη οικογένεια $(I_{n,i})_{1\leq i\leq 2^{n-1}}$, $n\geq 1$, ανοικτών και ξένων ανά δύο διαστημάτων μήκους $\frac{1}{k^n}$ το καθένα. Θέτουμε

$$E_n=\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} I_{n,i} \text{ και } C(k)=[0,1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\,.$$

Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $C(k)$ είναι συμπαγές, δεν περιέχει ανοικτά διαστήματα και το μέτρο Lebesgue

$$m\left(C(k)\right)=\frac{k-3}{k-2}\,.$$

<u>*Σημείωση*</u>. Το $C(3)$ είναι το τριαδικό σύνολο Cantor.

Λύση.

<u>**Πρώτο βήμα**</u>. Αφαιρώντας από το μέσο $1/2$ του $[0,1]$ ανοικτό διάστημα μήκους $1/k$, δηλαδή το διάστημα

$$E_1=I_{1,1}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\,,\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}\right)\,,$$

παίρνουμε το σύνολο $C_1(k)=J_{1,1}\cup J_{1,2}$, όπου

$$J_{1,1}=\left[0\,,\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}\right] \quad \text{και} \quad J_{1,2}=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}\,,\,1\right].$$

Είναι

$$\ell\left(J_{1,1}\right)=\ell\left(J_{1,2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)>\frac{1}{k^2}\,.$$

<u>**Δεύτερο βήμα**</u>. Στη συνέχεια αφαιρούμε από τα μέσα των $J_{1,1}$ και $J_{1,2}$ τα ανοικτά διαστήματα $I_{2,1}$ και $I_{2,2}$ αντίστοιχα μήκους $1/k^2$ το καθένα. Αν $E_2=I_{2,1}\cup I_{2,2}$, τότε προκύπτει το σύνολο $C_2(k)=[0,1]\setminus(E_1\cup E_2)=\bigcup_{i=1}^{2^2} J_{2,i}$ με

$$\ell\left(J_{2,i}\right)=\frac{1}{2^2}\left[1-\frac{1}{k}\left(1+\frac{2}{k}\right)\right]\,.$$

<u>**n-οστό βήμα**</u>. Υποθέτουμε ότι έχουμε κατασκευάσει το σύνολο

$$C_{n-1}(k)=[0,1]\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right)=\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} J_{n-1,i}\,,$$

όπου τα κλειστά διαστήματα $J_{n-1,i}$, $i = 1, \dots, 2^{n-1}$, είναι ξένα ανά δύο με μήκος

$$\ell\left(J_{n-1,i}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\left[1 - \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{2}{k}\right)^{p-1}\right].$$

Για να αποδείξουμε ότι το μήκος $\ell\left(J_{n-1,i}\right) > 1/k^n$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{k}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{2}{k}\right)^{p-1} < 1\,.$$

Πράγματι, είναι

$$\frac{1}{k}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{2}{k}\right)^{p-1} < \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k}\right)^{p-1} = \frac{1}{k-2} \leq 1\,.$$

Επομένως, από το μέσο κάθε διαστήματος $J_{n-1,i}$ μπορούμε να αφαιρέσουμε ανοικτό διάστημα $I_{n,i}$ μήκους $1/k^n$. Αν $E_n = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} I_{n,i}$, τότε προκύπτει το σύνολο $C_n(k) = [0,1] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \bigcup_{i=1}^{2^n} J_{n,i}$, όπου τα κλειστά διαστήματα $J_{n,i}$, $i = 1, \dots, 2^n$, είναι ξένα ανά δύο με μήκος

$$\ell\left(J_{n,i}\right) = \frac{1}{2^n}\left[1 - \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{2}{k}\right)^{p-1}\right] - \frac{1}{2k^n} = \frac{1}{2^n}\left[1 - \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{2}{k}\right)^{p-1}\right].$$

Έχουμε λοιπόν κατασκευάσει αριθμήσιμη οικογένεια $(C_n(k))$ κλειστών και φραγμένων συνόλων, τέτοια ώστε $C_{n+1}(k) \subset C_n(k)$.

Το γενικευμένο σύνολο Cantor είναι το

$$C(k) := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n(k)\,.$$

Το $C(k)$ είναι ένα συμπαγές σύνολο που δεν περιέχει ανοικτά διαστήματα. Επειδή $C_n(k) \searrow C(k)$ με

$$m\left(C_n(k)\right) = \sum_{i=1}^{2^n}\ell(J_{n,i}) = 1 - \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{2}{k}\right)^{p-1},$$

το μέτρο Lebesgue του $C(k)$ ισούται με

$$m\left(C(k)\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(C_n(k)\right) = 1 - \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k}\right)^{p-1} = 1 - \frac{1}{k-2} = \frac{k-3}{k-2}\,.$$

■

7. Έστω (f_n), $f_n : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε $|f_n(x)| < \infty$ σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$. Ζητείται να αποδειχθεί ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) θετικών αριθμών, τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{a_n} = 0\,, \quad \text{σχεδόν για κάθε } x \in [0,1]\,.$$

(i) Αποδείξτε πρώτα ότι $\lim\limits_{k\to\infty} m(\{x \in [0,1] : |f_n(x)| > k\}) = 0\,.$

(ii) Αποδείξτε στη συνέχεια ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) θετικών αριθμών, τέτοια ώστε

$$m\left(\left\{x \in [0,1] : \left|\frac{f_n(x)}{a_n}\right| > \frac{1}{n}\right\}\right) < \frac{1}{2^n}$$

και εφαρμόστε το λήμμα Borel- Cantelli.

Λύση.

(i) Αν $A_k := \{x \in [0,1] : |f_n(x)| > k\}$ και $A := \{x \in [0,1] : |f_n(x)| = \infty\}$, από την υπόθεση είναι $m(A) = 0$. Η (A_k) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = E$ και επομένως

$$\lim_{k\to\infty} m\left(\{x \in [0,1] : |f_n(x)| > k\}\right) = m(A) = 0\,.$$

(ii) Το (i) συνεπάγεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $a_n > 0$ τέτοιο ώστε

$$m(E_n) < \frac{1}{2^n}\,, \text{ όπου } E_n := \left\{x \in [0,1] : \left|\frac{f_n(x)}{a_n}\right| > \frac{1}{n}\right\}.$$

Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty$ και από το λήμμα Borel– Cantelli σχεδόν όλα τα $x \in [0,1]$ ανήκουν σε πεπερασμένα το πολύ E_n. Επομένως υπάρχει

$N \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ σχεδόν κάθε $x \in [0,1]$ δεν ανήκει στο E_n. Ισοδύναμα,

$$\text{για κάθε } n \geq N\text{:} \quad \left|\frac{f_n(x)}{a_n}\right| \leq \frac{1}{n}\,, \quad \text{σχεδόν για κάθε } x \in [0,1]\,.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{a_n} = 0\,, \quad \text{σχεδόν για κάθε } x \in [0,1]\,.$$

■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω (f_n), $f_n : E \to [0,\infty]$, $E \in \mathcal{M}$, ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων με $f_1 \in L_1(E)$. Αν $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ $\sigma.\pi.$ στο E, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \left(\min_{1\leq k\leq n} f_k\right)\, dm = 0\,.$$

Λύση. Αν

$$g_n := \min_{1\leq k\leq n} f_k\,,$$

η (g_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων με $g_1 = f_1 \in L_1(E)$ και $g_n \leq f_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ $\sigma.\pi.$ στο E και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n\, dm = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_E \left(\min_{1\leq k\leq n} f_k\right)\, dm = 0\,.$$

■

2. Έστω $f : E \subseteq \mathbb{R} \to [0,\infty]$, $E \in \mathcal{M}$, μετρήσιμη συνάρτηση. Αν

$$m\left(f^{-1}((0,\infty])\right) = m\left(\{x \in E : f(x) > 0\}\right) > 0$$

να αποδειχθεί ότι

$$\int_E f\, dm > 0\,.$$

Λύση. Έστω $A = f^{-1}((0,\infty])$ και

$$A_n = f^{-1}\left([\frac{1}{n},\infty]\right) = \left\{x \in E : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Η (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E με $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Επειδή από γνωστή ιδιότητα του μέτρου

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(A) > 0,$$

υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $m(A_{n_0}) > 0$. Τότε,

$$\int_E f\,dm \geq \int_{A_{n_0}} f\,dm \geq \int_{A_{n_0}} \frac{1}{n_0}\,dm = \frac{1}{n_0} m(A_{n_0}) > 0.$$

■

3. Έστω η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με

$$f_n(x) = \chi_{[-n,n]}(x)\sin\left(\frac{\pi x}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(α΄) Να βρεθεί η $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Δείξτε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Συγκλίνει η (f_n) ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$;

(β΄) Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,dm = \int_{\mathbb{R}} f\,dm$.

(γ΄) Ισχύουν οι υποθέσεις το θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue;

Λύση.

(α΄) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$|f_n(x)| = \left|\chi_{[-n,n]}(x)\sin\left(\frac{\pi x}{n}\right)\right| \leq \frac{\pi|x|}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

και επομένως $f_n \longrightarrow 0$ σημειακά στο $\mathbb{R}$. Αν $K \subset \mathbb{R}$ είναι ένα συμπαγές σύνολο, το K είναι κλειστό και φραγμένο και επομένως υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|x| \leq M$ για κάθε $x \in K$. Τότε,

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup\{|f_n(x)| : x \in K\} \leq M \cdot \frac{\pi}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

και επομένως $f_n \longrightarrow 0$ ομοιόμορφα στο K. Όμως η (f_n) δεν συγκλίνει στο 0 ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι,

$$\|f_n\|_\infty \geq f_n\left(\frac{n}{2}\right) = 1$$

και άρα $\|f_n\|_\infty \nrightarrow 0$.

(β΄) Επειδή $f = 0$ και

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dm(x) = \int_{-n}^{n} \sin\left(\frac{\pi x}{n}\right)\, dx = 0\,,$$

είναι $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = 0 = \int_{\mathbb{R}} f\, dm$.

(γ΄) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $g \in L_1(\mathbb{R})$, τέτοια ώστε $|f_n(x)| \leq g(x)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dm(x) &\geq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\, dm(x)\\ &= \int_{-n}^{n} \left|\sin\left(\frac{\pi x}{n}\right)\right|\, dx\\ &= 2\int_{0}^{n} \sin\left(\frac{\pi x}{n}\right)\, dx\\ &= \frac{4n}{\pi}\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,. \qquad \text{(άτοπο)}\end{aligned}$$

Άρα δεν ισχύει η υπόθεση το θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue.

■

4. Έστω $f \in L_1(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι

$$\lim_{T\to\infty} \int_{T}^{\infty} |f(x)|\, dx = 0\,.$$

Λύση. Αν (t_n) είναι πραγματική ακολουθία με $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_n}^{\infty} |f(x)|\, dx = 0\,.$$

Είναι

$$\int_{t_n}^{\infty} |f(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\chi_{[t_n,\infty)}(x)\, dm(x)\,.$$

Έστω $f_n(x) := |f(x)|\chi_{[t_n,\infty)}(x)$. Αν $A_n := [t_n,\infty)$, είναι

$$\lim A_n = \liminf A_n = \limsup A_n = \emptyset$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{[t_n,\infty)} = \chi_{\emptyset} = 0\,.$$

Επειδή η $f \in L_1(\mathbb{R})$, είναι $|f| < \infty$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$. Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ σχεδόν για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } |f_n(x)| \leq |f(x)| \in L_1(\mathbb{R})\,.$$

Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_n}^{\infty} |f(x)|\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\chi_{[t_n,\infty)}(x)\, dm(x) = 0\,.$$

■

5. Υποθέτουμε ότι η μετρήσιμη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αυξάνει το πολύ γραμμικά, δηλαδή $|F(x)| \leq c|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $c > 0$. Αν η F είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $F'(0) = a$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{nF(x)}{x(1+n^2x^2)}\, dx = \pi a\,.$$

Λύση. Από την υπόθεση είναι $F(0) = 0$, $F'(0) = a$ και επομένως

$$\lim_{x\to 0} \frac{nF(x)}{x(1+n^2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0}\,\frac{n}{1+n^2x^2} = na\,.$$

Έστω $F_n(x) = \frac{nF(x)}{x(1+n^2x^2)}$, αν $x \neq 0$ και $F_n(0) = na$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x)| &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{nF(x)}{x(1+n^2x^2)}\right| dx \\
&\leq c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}\, dx && (|F(x)| \leq c|x|) \\
&= c\left(\lim_{x\to\infty} \arctan nx - \lim_{x\to -\infty} \arctan nx\right) = c\pi
\end{aligned}$$

και επομένως $F_n \in L_1(\mathbb{R})$. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = nx$ έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{nF(x)}{x(1+n^2x^2)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{nF(t/n)}{t(1+t^2)}\, dt\,.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{t\to 0} \frac{nF(t/n)}{t(1+t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{F(t/n)-F(0)}{t/n-0} \frac{1}{1+n^2t^2} = a\,.$$

Έστω $G_n(t) = \frac{nF(t/n)}{t(1+t^2)}$, αν $t \neq 0$ και $G_n(0) = a$. Τότε,

$$\lim_{n\to\infty} G_n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(t/n)-F(0)}{t/n-0} \frac{1}{1+t^2} = \frac{a}{1+t^2}$$

και για κάθε $t \neq 0$

$$|G_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} \in L_1(\mathbb{R})\,. \qquad (|F(t/n)| \leq |t|/n)$$

Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{nF(x)}{x(1+n^2x^2)}\, dx = a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \pi a\,.$$

■

6. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0,\infty)$. Στη συνέχεια αποδείξτε τη σχέση

$$\int_{(0,\infty)} \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1}\, dm(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}\,.$$

Σημείωση. Είναι η άσκηση 7 της "2ης Σειράς Ασκήσεων-ακαδ. έτος 2007-8", για $a = 1$.

Λύση. Για κάθε $x > 0$ είναι $0 < e^{-x} < 1$ και επομένως

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-x}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\,.$$

Άρα,

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin x\,, \quad x > 0\,.$$

Επειδή

$$\int_0^\infty xe^{-nx}\,dx = -\lim_{x\to\infty}\frac{x}{n}e^{-nx} + \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-nx}\,dx = \frac{1}{n^2}\,,$$

είναι

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \left|e^{-nx}\sin x\right|\,dx \le \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty xe^{-nx}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty\,.$$

Επομένως, από το θεώρημα Beppo Levi η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0,\infty)$ και

$$\int_{(0,\infty)} \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1}\,dm(x) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx}\sin x\,dx\,.$$

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty e^{-nx}\sin x\,dx = \frac{1}{n^2+1}\,.$$

Άρα,

$$\int_{(0,\infty)} \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1}\,dm(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+1}\,.$$

■

7. Δίνεται ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων (f_n) με $f_n \in L_1(X)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, όπου $X \subset \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(X) < \infty$. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (f_n) ικανοποιεί την εξής συνθήκη:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } M > 0 \text{ τέτοιο ώστε } \int_X |f_n|\chi_A\,dm < \varepsilon\,, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,,$$

όπου $A = \{x \in X : |f_n(x)| > M\}$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ σχεδόν παντού στο X. Δείξτε ότι η $f \in L_1(X)$ και ότι η σημειακή σύγκλιση της (f_n) συνεπάγεται την ισχυρή σύγκλιση, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0\,.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned}\int_A |f|\,dm &= \int_A \left(\lim_{n\to\infty} |f_n|\right)\,dm \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \int_A |f_n|\,dm && \text{(λήμμα Fatou)} \\ &\le \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Επειδή $X\setminus A = \{x \in X : |f_n(x)| \le M\}$, από την υπόθεση έχουμε $|f| \le M$ σχεδόν παντού στο $X \setminus A$ και επομένως

$$\int_X |f|\,dm = \int_{X\setminus A} |f|\,dm + \int_A |f|\,dm \le Mm(X\setminus A) + \varepsilon\,.$$

Όμως $m(X \setminus A) \le m(X) < \infty$ οπότε η $f \in L_1(X)$. Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ σχεδόν παντού στο } X\setminus A \text{ και } |f_n| \le M \text{ στο } X\setminus A\,,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X\setminus A} |f_n - f|\,dm = 0\,.$$

Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$\begin{aligned}\int_X |f_n - f|\,dm &= \int_A |f_n - f|\,dm + \int_{X\setminus A} |f_n - f|\,dm \\ &\le \int_A |f_n|\,dm + \int_A |f|\,dm + \int_{X\setminus A} |f_n - f|\,dm \\ &< 2\varepsilon + \int_{X\setminus A} |f_n - f|\,dm\end{aligned}$$

και κατά συνέπεια

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,dm \le 2\varepsilon\,, \quad \text{για κάθε } \varepsilon > 0\,.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,dm = \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,dm = 0\,.$$

Δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0\,.$$

□

4.7 Ακαδημαϊκό έτος 2010–11

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
1η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω ο χώρος μέτρου $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mu)$, όπου μ είναι το *αριθμητικό μέτρο*. Δηλαδή
$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{αν το } A \text{ είναι πεπερασμένο σύνολο} \\ \infty & \text{αν το } A \text{ είναι απειροσύνολο ,} \end{cases}$$
όπου $|A|$ είναι ο πληθάριθμος του A. Έστω $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \to [0, \infty]$ με
$$\nu(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mu(A \cap \{1, \dots, n\})$$
και έστω $\mathcal{A}$ η οικογένεια όλων των υποσυνόλων A του $\mathbb{N}^*$ για τα οποία το όριο
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mu(A \cap \{1, \dots, n\}) \text{ υπάρχει.}$$
   (α΄) Αν το A είναι πεπερασμένο σύνολο να αποδειχθεί ότι $\nu(A) = 0$.

   (β΄) Να αποδειχθεί ότι το ν είναι πεπερασμένα αθροιστικό στην οικογένεια $\mathcal{A}$. Είναι το ν σ-αθροιστικό στην οικογένεια $\mathcal{A}$;

Λύση.

(α΄) Για κάθε $A, B \subset \mathbb{N}^*$ είναι $|A \cap B| \leq \inf\{|A|, |B|\}$. Επομένως,
$$\mu(A \cap \{1, \dots, n\}) \leq \mu(A)$$
και κατά συνέπεια
$$\nu(A) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(A)}{n} = 0\,.$$
Άρα, $\nu(A) = 0$.

(β΄) Έστω τα σύνολα $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ είναι ξένα ανά δύο . Αν $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, τότε

$$A \cap \{1, \dots, n\} = \bigcup_{i=1}^k A_i \cap \{1, \dots, n\}$$

και τα σύνολα $A_i \cap \{1, \dots, n\}$, $1 \le i \le k$, είναι ανά δύο ξένα. Επομένως,

$$|A \cap \{1, \dots, n\}| = \sum_{i=1}^k |A_i \cap \{1, \dots, n\}| \ .$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mu\left(A \cap \{1, \dots, n\}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |A \cap \{1, \dots, n\}| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k |A_i \cap \{1, \dots, n\}| \\
&= \sum_{i=1}^k \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |A_i \cap \{1, \dots, n\}| \right) \\
&= \sum_{i=1}^k \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mu\left(A_i \cap \{1, \dots, n\}\right) \right) = \sum_{i=1}^k \nu(A_i) \, .
\end{aligned}$$

Το ν δεν είναι σ-αθροιστικό στην οικογένεια $\mathcal{A}$. Πράγματι, έστω $A_n = \{n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Τα $(A_n)_{n=1}^\infty$ είναι ξένα ανά δύο υποσύνολα της οικογένειας $\mathcal{A}$ με $\mathbb{N}^* = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Τότε,

$$\nu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mu\left(A_n \cap \{1, \dots, n\}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

και

$$\nu(\mathbb{N}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mu\left(\mathbb{N} \cap \{1, \dots, n\}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1 \, .$$

Άρα, $\nu(\mathbb{N}^*) = 1 \neq 0 = \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n)$.

■

2. Έστω (μ_n) ακολουθία θετικών μέτρων στη σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}$ του συνόλου X και έστω (p_n) ακολουθία θετικών αριθμών.

(α΄) Αν $\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu_n(A)$, για κάθε $A \in \mathfrak{M}$, να αποδειχθεί ότι το $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu_n$ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}$.

(β΄) Αν τα (μ_n) είναι μέτρα πιθανότητας (δηλαδή $\mu_n(X) = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$) και $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$, να αποδειχθεί ότι το $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu_n$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στη σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}$.

(γ΄) *Εφαρμογή*. Έστω τα θετικά μέτρα

$$\mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k\,, \quad \mu_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k\delta_k \quad \text{και} \quad \mu_3 = m\,,$$

όπου δ_k το μέτρο Dirac στο k και m το μέτρο Lebesgue. Θεωρούμε τα Lebesgue μετρήσιμα σύνολα

$$A_n = \left[n,\, n+1+\frac{1}{n^2}\right],\ n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \text{ και } B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Να υπολογιστούν τα μέτρα $\mu_i\left(A_n\right)$, $\mu_i\left(B_n\right)$ και $\mu_i\left(B\right)$, $i = 1, 2, 3$.

Λύση.

(α΄) Επειδή $\mu_n(\emptyset) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από τον ορισμό του μ συνεπάγεται ότι και $\mu(\emptyset) = 0$. Έστω (A_k) ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων της σ-άλγεβρας $\mathfrak{M}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu_n \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(A_k)\right) \qquad \text{(τα } \mu_n \text{ είναι θετικά μέτρα)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu_n(A_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\,.
\end{aligned}$$

Επομένως το $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu_n$ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}$.

<u>*Σημείωση*</u>. Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι αν $a_{n,k} \geq 0$ για κάθε $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}\right).$$

(β΄) Αν $\mu_n(X) = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$, τότε

$$\mu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu_n(X) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1\,.$$

Επομένως, το $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} p_n\mu_n$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στη σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}$.

(γ΄) <u>*Εφαρμογή*</u>.

(i) Είναι

$$\mu_1(A_1) = \delta_1\left([1,3]\right) + \delta_2\left([1,3]\right) + \delta_3\left([1,3]\right) = 1+1+1 = 3$$

και για κάθε $n \geq 2$

$$\mu_1(A_n) = \delta_n(A_n) + \delta_{n+1}(A_n) = \chi_{A_n}(n) + \chi_{A_n}(n+1) = 1+1 = 2\,.$$

Παρόμοια,

$$\mu_2(A_1) = \delta_1\left([1,3]\right) + 2\delta_2\left([1,3]\right) + 3\delta_3\left([1,3]\right) = 1+2+3 = 6$$

και για κάθε $n \geq 2$

$$\begin{aligned}\mu_2(A_n) &= n\delta_n(A_n) + (n+1)\delta_{n+1}(A_n)\\ &= \chi_{A_n}(n) + (n+1)\chi_{A_n}(n+1)\\ &= n + (n+1) = 2n+1\,.\end{aligned}$$

Επίσης $\mu_3(A_n) = m\left([n,\, n+1+1/n^2]\right) = 1 + 1/n^2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Είναι

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} \left[k,\, k+1+\frac{1}{k^2}\right] = \left[1,\, n+1+\frac{1}{n^2}\right]$$

και

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[k,\, k+1+\frac{1}{k^2}\right] = [1,\infty)\,.$$

Επομένως,

$$\mu_1(B_1) = 3\,, \quad \mu_2(B_1) = 6\,.$$

Αν $n \geq 2$, τότε

$$\mu_1(B_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \delta_k\left(\left[1,\, n+1+\frac{1}{n^2}\right]\right) = 1+1+\cdots+1 = n+1\,,$$

$$\begin{aligned}\mu_2(B_n) &= \sum_{k=1}^{n+1} k\delta_k\left(\left[1,\, n+1+\frac{1}{n^2}\right]\right)\\ &= 1+2+\cdots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

και $\mu_3(B_n) = m\left([1,\, n+1+1/n^2]\right) = n+1/n^2$.

Τέλος,

$$\mu_1(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k\left([1,\infty)\right) = \infty\,, \quad \mu_2(B) = \sum_{k=1}^{\infty} k\delta_k\left([1,\infty)\right) = \infty$$

και $\mu_3(B) = m\left([1,\infty)\right) = \infty$.

Ας σημειωθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \mu_i(B_n) = \mu_i(B)$, $i = 1,2,3$.

■

3. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ είναι ένας χώρος πιθανότητας, δηλαδή ένας χώρος μέτρου με $P(\Omega) = 1$. Αν $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ με $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) > n-1$, να αποδειχθεί ότι $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) > 0$.

Λύση. Για κάθε i, $1 \leq i \leq 1$, είναι

$$P(A_i) + P(A_i^c) = P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow P(A_i^c) = 1 - P(A_i)\ .$$

Τότε,

$$\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i^c\right) = n - \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) < n - (n-1) = 1$$

και επομένως

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i^c\right) < 1\,.$$

Άρα,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) > 1 - 1 = 0\,.$$

■

4. (**Κατασκευή εξωτερικών μέτρων**) Αν $\mathcal{P}(X)$ είναι το δυναμοσύνολο ενός συνόλου X, $X \neq \emptyset$, το $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ λέγεται *εξωτερικό μέτρο* αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

   (α΄) $\mu(\emptyset) = 0$.

   (β΄) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

   (γ΄) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, για κάθε ακολουθία (E_n) υποσυνόλων του X.

   Έστω $\mathcal{F}$ μία μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του X και έστω $f : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ μία συνάρτηση. Ορίζουμε το $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ με $\mu(\emptyset) = 0$ και για κάθε $A \neq \emptyset$

$$\mu(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} f(A_n) : A_n \in \mathcal{F} \text{ και } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\},$$

   με $\inf \emptyset = \infty$. Να αποδειχθεί ότι το μ είναι ένα εξωτερικό μέτρο.

   Λύση.

   (α΄) Από τον ορισμό είναι $\mu(\emptyset) = 0$.

(β΄) Έστω $A \subseteq B$ και έστω (A_n) ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{F}$ με $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Τότε, $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(A_n)$. Επομένως,

$$\mu(A) \leq \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f(A_n) : A_n \in \mathcal{F} \text{ και } B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} = \mu(B)\,.$$

(Αν δεν υπάρχει ακολουθία (A_n) στοιχείων του $\mathcal{F}$ με $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε $\mu(B) = \inf \emptyset = \infty$ και κατά συνέπεια $\mu(A) \leq \mu(B)$.)

(γ΄) Έστω (E_n) ακολουθία υποσυνόλων του X.
Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \infty$, τότε προφανώς $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.
Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ και έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ επιλέγουμε ακολουθία $(A_{n,i})$ στοιχείων του $\mathcal{F}$ τέτοια ώστε

$$E_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n,i} \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{\infty} f(A_{n,i}) < \mu(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\,.$$

Τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n,i}$ και επομένως

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f(A_{n,i}) < \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) + \varepsilon\,.$$

Άρα,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\,.$$

■

5. Έστω $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ χώρος μέτρου, έστω $E \in \mathfrak{M}$ με $\mu(E) < \infty$ και έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ορίζουμε

$$\mathcal{C}_n = \left\{ A \in \mathcal{A} :\ \mu(A \cap E) \geq \frac{\mu(E)}{n} \right\}.$$

Αποδείξτε ότι το $\mathcal{C}_n$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Αν

$$\mathcal{C} = \{ A \in \mathcal{A} :\ \mu(A \cap E) \neq 0 \}\,,$$

αποδείξτε ότι το $\mathcal{C}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο απειροσύνολο.

Λύση. Θα αποδείξουμε ότι κάθε $\mathcal{C}_n$ έχει το πολύ n στοιχεία. Πράγματι, έστω $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{C}_n$ με $k > n$. Τότε τα σύνολα $A_1 \cap E, \ldots, A_k \cap E$ είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο οπότε

$$\frac{k\mu(E)}{n} \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i \cap E) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k}(A_i \cap E)\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap E\right) \leq \mu(E)\,,$$

δηλαδή $k \leq n$ που είναι άτοπο. Επομένως κάθε $\mathcal{C}_n$ είναι πεπερασμένο σύνολο.

Είναι $\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$. Πράγματι, επειδή προφανώς $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{C}$, αρκεί να αποδειχθεί ότι $\mathcal{C} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$. Αν $A \in \mathcal{C}$ και υποθέσουμε ότι $A \notin \mathcal{C}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$\mu(A \cap E) < \frac{\mu(E)}{n}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

και αυτό συνεπάγεται ότι $\mu(A \cap E) = 0$ που είναι άτοπο. Επομένως $A \in \mathcal{C}_n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$ και κατά συνέπεια $A \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$. Άρα, το $\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ είναι το πολύ αριθμήσιμο απειροσύνολο. ∎

6. Έστω A το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο $[0, 1)$ τέτοιο ώστε $x \in A$ αν και μόνο αν στο δυαδικό ανάπτυγμα του x εμφανίζεται το ψηφίο 0 στις άρτιες θέσεις, δηλαδή

$$x = \frac{d_1}{2} + \frac{d_3}{2^3} + \cdots + \frac{d_{2n+1}}{2^{2n+1}} + \cdots\,, \quad \text{με } d_{2k+1} = 0 \text{ ή } 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Να αποδειχθεί ότι το A είναι Borel μετρήσιμο και να υπολογιστεί το μέτρο Lebesgue του A.

Λύση. Αφαιρούμε από το διάστημα $[0, 1)$ τα ανοικτά υποδιαστήματα $(1/4, 1/2)$, $(3/4, 1)$ και συμβολίζουμε με A_1 την ένωση των δύο κλειστών και ξένων μεταξύ τους διαστημάτων που απομένουν, δηλαδή

$$A_1 = [0, 1/4] \cup [2/4, 3/4]\ .$$

Το σύνολο A_1 αποτελείται από όλα εκείνα τα $x \in [0, 1)$ που στο δυαδικό τους ανάπτυγμα το δεύτερο ψηφίο είναι 0. Ας σημειωθεί ότι

$$\frac{1}{4} \underset{2}{=} 0.0011\cdots,\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \underset{2}{=} 0.1000\cdots \ \text{ και } \ \frac{3}{4} \underset{2}{=} 0.1011\cdots\ .$$

Είναι $m(A_1) = 2 \times 2^{-2} = 2^{-1}$.

Στο δεύτερο βήμα διαιρούμε το διάστημα $[0, 1/4]$ σε τέσσερα ίσα υποδιαστήματα και αφαιρούμε τα ανοικτά διαστήματα: $\left(1/4^2, 2/4^2\right)$ και $\left(3/4^2, 4/4^2\right)$. Παρόμοια, διαιρούμε το διάστημα $[2/4, 3/4]$ σε τέσσερα ίσα υποδιαστήματα και αφαιρούμε τα ανοικτά διαστήματα: $\left(9/4^2, 10/4^2\right)$ και $\left(11/4^2, 12/4^2\right)$. Συμβολίζουμε με A_2 την ένωση των 4 κλειστών και ξένων ανά δύο διαστημάτων που απομένουν, δηλαδή

$$A_2 = \left[0, 1/4^2\right] \cup \left[2/4^2, 3/4^2\right] \cup \left[8/4^2, 9/4^2\right] \cup \left[10/4^2, 11/4^2\right] .$$

Το σύνολο A_2 αποτελείται από όλους εκείνα τα $x \in [0, 1)$ που στο δυαδικό τους ανάπτυγμα το δεύτερο και το τέταρτο ψηφίο είναι 0. Είναι $m(A_2) = 4 \times 4^{-2} = 2^{-2}$.

Συνεχίζοντας τη διαδικασία, στο n-οστό βήμα παίρνουμε το σύνολο A_n που αποτελείται από 2^n ξένα ανά δύο κλειστά διαστήματα μήκους 4^{-n} το καθένα. Είναι $m(A_n) = 2^n \times 4^{-n} = 2^{-n}$. Είναι προφανές ότι

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

και

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Άρα, το σύνολο A είναι Borel μετρήσιμο και

$$m(A) = \lim_{n \to \infty} m(A_n) = \lim_{n \to \infty} 2^{-n} = 0 .$$

■

7. Είναι γνωστό ότι υπάρχει $A \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{B}$, δηλαδή σύνολο A που είναι Lebesgue και όχι Borel μετρήσιμο, με $m(A) = 0$. Επίσης είναι γνωστό ότι υπάρχει G_δ σύνολο G με $G \supset A$ και $m(G) = m(A)$. Έστω οι συναρτήσεις $f = \chi_{\mathbb{R}}$ και

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus G, \\ 1/2 & \text{αν } x \in G \setminus A, \\ 0 & \text{αν } x \in A . \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f, g είναι Lebesgue μετρήσιμες και ότι $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο χώρο Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$. Η f είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Είναι η συνάρτηση g Borel μετρήσιμη;

Λύση. Είναι $f = \chi_{\mathbb{R}}$ και $g = \chi_{\mathbb{R}\setminus G} + (1/2)\,\chi_{G\setminus A}$. Τα σύνολα $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus G$ και $G \setminus A$ είναι Lebesgue μετρήσιμα και επομένως οι f, g είναι Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Επειδή $f = g$ στο $\mathbb{R}$ και $f \neq g$ στο σύνολο Borel G με $m(G) = 0$, είναι $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο χώρο Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$. Επίσης, επειδή $g^{-1}(\{0\}) = A \notin \mathcal{B}$, η συνάρτηση g δεν είναι Borel μετρήσιμη.

Παρατήρηση. Είναι γνωστό ότι αν η $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη, $E \in \mathcal{M}$ και η $g : E \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι τέτοια ώστε $f = g$ $\sigma.\pi.$, τότε και η g είναι Lebesgue μετρήσιμη. Η άσκηση αυτή δείχνει ότι το ανάλογο αποτελεσμα γενικά δεν ισχύει στην περίπτωση που είναι $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο χώρο Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$. ■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Αν η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\, dx = f(1)\,.$$

Λύση. *1ος τρόπος.* Είναι

$$n \int_0^1 x^n f(x)\, dx = \int_0^1 t^{1/n} f(t^{1/n})\, dt\,. \qquad \text{(αντικατάσταση } t = x^n\text{)}$$

Οι συναρτήσεις $f_n(t) = t^{1/n} f(t^{1/n})$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[0, 1]$. Επειδή η συνεχής συνάρτηση f είναι φραγμένη στο διάστημα $[0, 1]$, έστω $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [0, 1]$, τότε

$$|f_n(t)| \leq M\,, \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1]$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} t^{1/n} f(t^{1/n}) = f(1)\,,$$

για κάθε $t \in (0,1]$ (δηλαδή $\sigma.\pi.$ στο $[0,1]$). Άρα, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 t^{1/n} f(t^{1/n})\,dt$$
$$= \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} t^{1/n} f(t^{1/n})\right)\,dt = f(1)\,.$$

<u>*2ος τρόπος*</u>. Ο υπολογισμός του ορίου γίνεται και χωρίς τη χρήση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. Παρατηρούμε ότι

$$n\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \frac{n}{n+1}f(1) + n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,dx\,.$$

Επομένως,

$$\left| n\int_0^1 x^n f(x)\,dx - \frac{n}{n+1}f(1)\right| = n\left|\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,dx\right|$$
$$\leq n\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|\,dx\,.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1, υπάρχει $\delta > 0$, $0 < \delta < 1$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [1-\delta, 1]$ είναι $|f(x)-f(1)| < \varepsilon/2$. Τότε,

$$\begin{aligned}
n\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|\,dx &= n\int_0^{1-\delta} x^n|f(x)-f(1)|\,dx \\
&\quad + n\int_{1-\delta}^1 x^n|f(x)-f(1)|\,dx \\
&\leq n\int_0^{1-\delta} x^n|f(x)-f(1)|\,dx + n\frac{\varepsilon}{2}\int_{1-\delta}^1 x^n\,dx \\
&= n\int_0^{1-\delta} x^n|f(x)-f(1)|\,dx \\
&\quad + \frac{n}{n+1}\frac{\varepsilon}{2}\left[1-(1-\delta)^{n+1}\right] \\
&< n\int_0^{1-\delta} x^n|f(x)-f(1)|\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\,.
\end{aligned}$$

Έστω $M = \max\{|f(x) - f(1)| : x \in [0,1]\}$. Τότε,

$$n\int_0^{1-\delta} x^n |f(x) - f(1)|\, dx \leq nM \int_0^{1-\delta} x^n\, dx = \frac{n}{n+1} M(1-\delta)^{n+1}\,.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} M(1-\delta)^{n+1} = 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ είναι

$$n\int_0^{1-\delta} x^n |f(x) - f(1)|\, dx \leq \frac{n}{n+1} M(1-\delta)^{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Επομένως, για κάθε $n \geq n_0$ είναι

$$\left| n\int_0^1 x^n f(x)\, dx - \frac{n}{n+1} f(1)\right| < \varepsilon\,.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} f(1) = f(1)\,.$$

■

2. (α΄) Έστω (f_n), $f_n : E \to [0,\infty]$, $E \in \mathcal{M}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ $\sigma.\pi.$ Αν $f, f_n \in L_1(E)$ με $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, dm = \int_E f\, dm$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 = 0$. Δηλαδή ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\; dm = 0\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Θεωρείστε την ακολουθία συναρτήσεων $g_n := \inf\{f, f_n\}$.

(β΄) Αν

$$f_n = -n\chi_{(-\frac{1}{n},0)} + n\chi_{(0,\frac{1}{n})}\,,$$

να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ $\sigma.\pi.$ και $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = 0$. Είναι $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n|\; dm = 0$;

Λύση.

(α΄) Αν

$$g_n := \inf\{f, f_n\} = \frac{f + f_n - |f - f_n|}{2}\,,$$

η (g_n) είναι ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων με $g_n \leq f$ και $\lim_{n\to\infty} g_n = f$ $\sigma.\pi.$ Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n \, dm = \int_E f \, dm \, .$$

Επειδή $|f - f_n| = f + f_n - 2g_n$, είναι

$$\int_E |f_n - f| \, dm = \int_E f \, dm + \int_E f_n \, dm - 2 \int_E g_n \, dm \, .$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, dm = \int_E f \, dm + \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, dm - 2 \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \, dm = 0 \, .$$

(β΄) Από τον ορισμό της f_n είναι $f_n(0) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Αν το $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ είναι $|x| > 1/n$ και κατά συνέπεια $f_n(x) = 0$. Επομένως, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = -\int_{\mathbb{R}} n\chi_{(-\frac{1}{n},0)} \, dm + \int_{\mathbb{R}} n\chi_{(0,\frac{1}{n})} \, dm = -1 + 1 = 0 \, ,$$

είναι $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = 0$. Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n| \, dm = \int_{\mathbb{R}} n\chi_{(-\frac{1}{n},0)} \, dm + \int_{\mathbb{R}} n\chi_{(0,\frac{1}{n})} \, dm = 1 + 1 = 2 \, ,$$

οπότε $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| \, dm \neq 0$.

■

3. (α΄) Έστω η συνάρτηση $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{M}$, είναι μετρήσιμη. Αν $\int_E |f|^p \, dm < \infty$, $p > 0$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} n^p m \left(\{x \in E : |f(x)| \geq n\}\right) = 0 \, .$$

(β΄) Αν
$$f = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\ln k} \chi_{[\frac{1}{k},\, \frac{1}{k-1})}\,,$$
είναι η f Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0,1)$;
Είναι $\lim_{n\to\infty} nm\left(\{x \in (0,1) : |f(x)| \geq n\}\right) = 0$;
<u>*Υπόδειξη*</u>. Αποδείξτε ότι για $n \geq 2$ είναι
$$\{x \in (0,1) : |f(x)| \geq n\} \subseteq \left(0,\, \frac{1}{n\ln n - 1}\right)\,.$$

Λύση.

(α΄) Επειδή $\int_E |f|^p\, dm < \infty$, $p > 0$, είναι $|f| < \infty$ $\sigma.\pi.$ στο E. Έστω $A_n := \{x \in E : |f(x)| \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Είναι
$$n^p \chi_{A_n} \leq |f|^p \chi_{A_n} \leq |f|^p\,.$$
Αν $f_n = |f|^p \chi_{A_n}$, η (f_n) είναι ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Παρατηρούμε ότι αν $|f| < \infty$ στο E, τότε $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. Επομένως,
$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0 \ \sigma.\pi. \text{ στο } E \text{ και } f_n \leq |f|^p, \text{ όπου } |f|^p \in L_1(E).$$
Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έχουμε $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, dm = 0$. Όμως $\int_E n^p \chi_{A_n}\, dm \leq \int_E f_n\, dm$ και κατά συνέπεια
$$\lim_{n\to\infty} \int_E n^p \chi_{A_n}\, dm = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n^p m\left(\{x \in E : |f(x)| \geq n\}\right) = 0\,.$$

(β΄) Επειδή
$$\begin{aligned}
\int_{(0,1)} |f|\, dm &= \int_{(0,1)} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\ln k} \chi_{[\frac{1}{k},\, \frac{1}{k-1})} \right) dm \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\ln k} \int_{(0,1)} \chi_{[\frac{1}{k},\, \frac{1}{k-1})}\, dm \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\ln k} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)\ln k} = +\infty\,,
\end{aligned}$$

η f δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0,1)$.

Έστω $x \in (0,1)$ με $|f(x)| \geq n \geq 2$. Επειδή

$$(0,1) = \bigcup_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right) ,$$

τότε υπάρχει μοναδικό $k \geq 2$ με $x \in \left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right)$ και $\frac{k}{\ln k} \geq n$. Όμως για να είναι $\frac{k}{\ln k} \geq n$, με $k, n \geq 2$, θα πρέπει να είναι $k \geq n$. Πράγματι, αν $n = 2$ τότε για κάθε $k \geq 2$ είναι $\frac{k}{\ln k} > 2$. Αν $n \geq 3$, τότε $\frac{2}{\ln 2} < n$ και

$$n \leq \frac{k}{\ln k} < k \,. \qquad \text{(για κάθε } k \geq 3\text{)}$$

Κατά συνέπεια είναι $k \geq n \ln n$ και το

$$x \in \left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right) \subset \left(0, \frac{1}{k-1}\right) \subseteq \left(0, \frac{1}{n \ln n - 1}\right) .$$

Επομένως, για $n \geq 2$ είναι

$$\{x \in (0,1) : |f(x)| \geq n\} \subseteq \left(0, \frac{1}{n \ln n - 1}\right) .$$

Άρα,

$$nm\left(\{x \in (0,1) : |f(x)| \geq n\}\right) \leq \frac{n}{n \ln n - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \,.$$

■

4. Έστω η μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{C}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $E \in \mathcal{M}$. Να αποδειχθεί ότι

$$\left| \int_E f \, dm \right| \leq \int_E |f| \, dm \qquad (4.4)$$

και η ισότητα ισχύει στην (4.4) αν και μόνο αν υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f = |f| e^{i\theta}$ $\sigma.\pi.$

Λύση. Επειδή $\int_E f\,dm \in \mathbb{C}$, $\int_E f\,dm = \left|\int_E f\,dm\right| e^{i\theta}$, για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\left|\int_E f\,dm\right| &= e^{-i\theta}\int_E f\,dm \\ &= \int_E f e^{-i\theta}\,dm \\ &= \int_E \Re\left(fe^{-i\theta}\right)\,dm \\ &\le \int_E \left|fe^{-i\theta}\right|\,dm = \int_E |f|\,dm\,.\end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει στην (4.4) αν και μόνο αν

$$\begin{aligned}\int_E \Re\left(fe^{-i\theta}\right)\,dm = \int_E \left|fe^{-i\theta}\right|\,dm &\Leftrightarrow \int_E \left(\left|fe^{-i\theta}\right| - \Re\left(fe^{-i\theta}\right)\right)\,dm = 0 \\ &\Leftrightarrow \left|fe^{-i\theta}\right| = \Re\left(fe^{-i\theta}\right)\ \sigma.\pi.\end{aligned}$$

Τότε, $\Im\left(fe^{-i\theta}\right) = 0$ $\sigma.\pi.$ και επομένως $|f| = fe^{-i\theta}$ $\sigma.\pi.$ ∎

5. Έστω η μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{C}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $E \in \mathcal{M}$.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \int_E \frac{|1+hf|-1}{h}\,dm = \int_E \Re f\,dm$$

και

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \int_E \frac{|1-hif|-1}{h}\,dm = \int_E \Im f\,dm\,.$$

(β΄) Υποθέτουμε ότι $m(E) = 1$. Αν $\int_E |1+zf|\,dm \ge 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, τότε

$$\int_E f\,dm = 0\,.$$

Υπόδειξη. Αν $z \in \mathbb{C}$, τότε

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{|1+hz|-1}{h} = \Re z\,.$$

Λύση.

(α΄) Έστω (h_n), $h_n \neq 0$, πραγματική ακολουθία με $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|1+h_n f|-1}{h_n} = \Re f\,.$$

Επίσης εύκολα διαπιστώνεται ότι

$$\left|\frac{|1+h_n f|-1}{h_n}\right| \leq |f|\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Επειδή $\int_E |f|\,dm < \infty$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \int_E \frac{|1+hf|-1}{h}\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_E \frac{|1+h_n f|-1}{h_n}\,dm = \int_E \Re f\,dm\,.$$

Αν τώρα στη θέση της συνάρτησης f θεωρήσουμε την $-if$, έχουμε

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \int_E \frac{|1-ihf|-1}{h}\,dm = \int_E \Re(-if)\,dm = \int_E \Im f\,dm\,.$$

(β΄) Από την υπόθεση έχουμε $\int_E |1+hf|\,dm \geq 1$ για κάθε $h \in \mathbb{R}$. Επειδή $m(E) = 1$, είναι

$$\int_E (|1+hf|-1)\,dm = \int_E |1+hf|\,dm - 1 \geq 0\,.$$

Τότε το (α΄) συνεπάγεται ότι

$$\lim_{h\to 0^+} \int_E \frac{|1+hf|-1}{h}\,dm = \int_E \Re f\,dm \geq 0$$

και

$$\lim_{h\to 0^-} \int_E \frac{|1+hf|-1}{h}\,dm = \int_E \Re f\,dm \leq 0\,.$$

Επομένως $\int_E \Re f\,dm = 0$.

Παρόμοια, από την υπόθεση έχουμε $\int_E |1-hif|\,dm \geq 1$ για κάθε $h \in \mathbb{R}$. Επειδή $m(E) = 1$, είναι

$$\int_E (|1-hif|-1)\,dm = \int_E |1-hif|\,dm - 1 \geq 0\,.$$

Τότε το (α') συνεπάγεται ότι

$$\lim_{h\to 0^+}\int_E \frac{|1-hif|-1}{h}\,dm = \int_E \Im f\,dm \geq 0$$

και

$$\lim_{h\to 0^-}\int_E \frac{|1-hif|-1}{h}\,dm = \int_E \Im f\,dm \leq 0\,.$$

Επομένως $\int_E \Im f\,dm = 0$. Άρα,

$$\int_E f\,dm = \int_E \Re f\,dm + i\int_E \Im f\,dm = 0\,.$$

■

6. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{nx^\alpha \arctan nx}{1+nx^2}\,dx = \begin{cases} \infty & \text{αν } \alpha \geq 1\,, \\ \frac{\pi}{2(1-\alpha)} & \text{αν } \alpha < 1\,. \end{cases}$$

Λύση. Έστω

$$f_n(x) := \frac{nx^\alpha \arctan nx}{(1+nx^2)}\,,\ x\in[1,\infty)\,,\ n\in\mathbb{N}^* \text{ και } \alpha\in\mathbb{R}\,.$$

Επειδή για κάθε $x\in[1,\infty)$ και για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$

$$\frac{nx^\alpha \arctan nx}{1+nx^2} < \frac{nx^\alpha \arctan (n+1)x}{1+nx^2} < \frac{(n+1)x^\alpha \arctan (n+1)x}{1+(n+1)x^2}\,,$$

η (f_n) είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{nx^\alpha \arctan nx}{1+nx^2} &= \lim_{t\to\infty}\frac{tx^\alpha \arctan tx}{1+tx^2}\\ &= \frac{x^\alpha}{x^2}\lim_{t\to\infty}\left(\arctan tx + \frac{tx}{1+t^2x^2}\right)\\ &\qquad\qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}\\ &= \frac{\pi}{2x^{2-\alpha}}\,.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{nx^\alpha \arctan nx}{1+nx^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x^{2-\alpha}}\,dx$$

(θεώρημα μονότονης σύγκλισης)

$$= \begin{cases} \infty & \text{αν } \alpha \geq 1\,, \\ \frac{\pi}{2(1-\alpha)} & \text{αν } \alpha < 1\,. \end{cases}$$

Σημείωση. Για τον υπολογισμό του ορίου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. ■

7. Αν $0 < a < b$, θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με

$$f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}\,, \quad x \in [0,\infty)\,.$$

Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^\infty f_n$. Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{[0,\infty)} f_n(x)\,dm(x) \neq \int_{[0,\infty)} \left(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right) dm(x)$$

και $\sum_{n=1}^\infty \int_{[0,\infty)} |f_n(x)|\,dm(x) = \infty$.

Λύση. Επειδή

$$\int_0^\infty ae^{-nax}\,dx = \int_0^\infty be^{-nbx}\,dx = \frac{1}{n}\,,$$

η f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,\infty)$ με

$$\int_{[0,\infty)} f_n(x)\,dm(x) = \int_{[0,\infty)} ae^{-nax}\,dm(x) - \int_{[0,\infty)} be^{-nbx}\,dm(x) = 0\,.$$

Επομένως,

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{[0,\infty)} f_n(x)\,dm(x) = 0\,.$$

Είναι $\sum_{n=1}^\infty f_n(0) = \sum_{n=1}^\infty (a-b) = -\infty$. Αν $x > 0$, τότε

$$\sum_{n=1}^\infty f_n(x) = \sum_{n=1}^\infty (ae^{-nax} - be^{-nbx})$$

$$= a\sum_{n=1}^\infty (e^{-ax})^n - b\sum_{n=1}^\infty (e^{-bx})^n = a\frac{e^{-ax}}{1-e^{-ax}} - b\frac{e^{-bx}}{1-e^{-bx}}$$

και

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right) dx &= \int_0^\infty \left(a\frac{e^{-ax}}{1-e^{-ax}} - b\frac{e^{-bx}}{1-e^{-bx}}\right) dx \\ &= \ln\left(\frac{1-e^{-ax}}{1-e^{-bx}}\right)\Bigg|_0^\infty = \ln b - \ln a\,.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{-ax}}{1-e^{-bx}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{ae^{-ax}}{be^{-bx}} = \frac{a}{b} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{1-e^{-ax}}{1-e^{-bx}}\right) = \ln a - \ln b\,.$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{[0,\infty)} f_n(x)\, dm(x) = 0 \neq \ln b - \ln a = \int_{[0,\infty)}\left(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right) dm(x)\,.$$

Επειδή $\sum_{n=1}^\infty \int_{[0,\infty)} f_n(x)\, dm(x) \neq \int_{[0,\infty)} \left(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right) dm(x)$, από το θεώρημα Beppo Levi έπεται ότι

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{[0,\infty)} |f_n(x)|\, dm(x) = \infty\,.$$

Αυτό όμως αποδεικνύεται και χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Beppo Levi. Πράγματι, επειδή $f_n(x) \leq 0$ για $x \leq x_0$ και $f_n(x) \geq 0$ για $x \geq x_0$, όπου $x_0 = \frac{\ln b - \ln a}{n(b-a)}$, είναι

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |f_n(x)|\, dx &= \int_0^{x_0} (be^{-nbx} - ae^{-nax})\, dx + \int_{x_0}^\infty (ae^{-nax} - be^{-nbx}) \\ &= \frac{e^{-nax_0} - e^{-nbx_0}}{n} - \frac{e^{-nbx_0} - e^{-nax_0}}{n} \\ &= 2\frac{e^{-ac} - e^{-bc}}{n}\,. \qquad\qquad (c = \tfrac{\ln b - \ln a}{b-a})\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{[0,\infty)} |f_n(x)|\, dm(x) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty |f_n(x)|\, dx = 2(e^{-ac} - e^{-bc})\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty\,.$$

■

4.8 Ακαδημαϊκό έτος 2009–10

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
1η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω ο χώρος μέτρου $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ με την ιδιότητα

$$\forall A \in \mathfrak{M} \text{ με } \mu(A) = \infty, \text{ υπάρχει } B \in \mathfrak{M} \text{ τέτοιο ώστε } B \subset A$$
$$\text{και } 0 < \mu(B) < \infty\,.$$

Να αποδειχθεί ότι κάθε $A \in \mathfrak{M}$, τέτοιο ώστε $\mu(A) = \infty$, περιέχει ένα σύνολο $B \in \mathfrak{M}$ με $\mu(B) = \infty$ που έχει *σ-πεπερασμένο μέτρο*. Δηλαδή $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ με $B_n \in \mathfrak{M}$ και $\mu(B_n) < \infty$.
Υπόδειξη. Αν $A \in \mathfrak{M}$ με $\mu(A) = \infty$, έστω

$$\alpha = \sup\left\{\mu(B) :\ B \in \mathfrak{M},\ B \subset A,\ \mu(B) < \infty\right\}\,.$$

Λύση. Έστω αύξουσα ακολουθία (α_n), $0 < \alpha_n < \alpha$, με $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ (μπορεί να είναι $\alpha = \infty$). Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει σύνολο $B_n \in \mathfrak{M}$, τέτοιο ώστε $B_n \subset A$, $\mu(B_n) < \infty$ και

$$\alpha_n \le \mu(B_n) < \alpha\,.$$

Έστω $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ και $C_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. Τότε $C_n \subset A$, $\mu(C_n) < \infty$ και

$$\mu(C_n) \le \alpha\,.$$

Επειδή $C_n \nearrow B$, είναι $\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \mu(B)$ και επομένως

$$\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(C_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \mu(B) \le \alpha\,.$$

Άρα $\mu(B) = \alpha$ και το B έχει σ-πεπερασμένο μέτρο. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mu(B) = \alpha = \infty$.

Υποθέτουμε ότι $\mu(B) = \alpha < \infty$. Τότε για κάθε $C \in \mathfrak{M}$ τέτοιο ώστε $C \subset A \setminus B$ και $\mu(C) < \infty$ έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha + \mu(C) &= \mu(B) + \mu(C) \\ &= \mu(B \cup C) + \mu(B \cap C) && \text{(γνωστή ιδιότητα του μέτρου)} \\ &= \mu(B \cup C) && (B \cap C = \emptyset) \\ &\leq \alpha\,, && (B \cup C \subset A \text{ και } \mu(B \cup C) < \infty) \end{aligned}$$

οπότε $\mu(C) = 0$. Επομένως θα πρέπει να είναι $\mu(A \setminus B) < \infty$ (αν ήταν $\mu(A \setminus B) = \infty$, από την υπόθεση της άσκησης θα έπρεπε να υπάρχει $C \subset A \setminus B$ με $0 < \mu(C) < \infty$). Τότε

$$\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B) < \infty$$

που είναι άτοπο. Άρα, $\mu(B) = \alpha = \infty$. ■

2. Αν $E \subseteq \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : \; E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \right\} ,$$

όπου το infimum το παίρνουμε πάνω σε όλα τα καλύμματα του E από αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών και φραγμένων διαστημάτων $[a_n, b_n]$, με τα αντίστοιχα ανοικτά διαστήματα (a_n, b_n) ξένα ανά δύο.

Λύση. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m^*(E) < \infty$. Ως γνωστόν

$$m^*(E) = \inf \{ m(G) : \; G \supseteq E, \; G \text{ είναι ανοικτό σύνολο} \} .$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει ανοικτό σύνολο $G_\varepsilon \supseteq E$ με

$$m(G_\varepsilon) < m^*(E) + \varepsilon .$$

Όμως κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος κλειστών και φραγμένων διαστημάτων με τα αντίστοιχα ανοικτά διαστήματα ξένα ανά δύο. Έστω $G_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} [c_n, d_n]$ με τα ανοικτά διαστήματα $(c_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ξένα ανά δύο. Τότε

$$m(G_\varepsilon) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [c_n, d_n] \right) = \sum_{n=1}^{\infty} m([c_n, d_n]) = \sum_{n=1}^{\infty} (d_n - c_n) .$$

Επομένως $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}[c_n, d_n]$ με

$$\sum_{n=1}^{\infty}(d_n - c_n) < m^*(E) + \varepsilon$$

και αυτό αποδεικνύει την άσκηση. ■

3. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ με $0 < m^*(A) < \infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα $I = (a, b)$, τέτοιο ώστε

$$m^*(A \cap I) > \alpha \ell(I) = \alpha(b - a)\,.$$

Υπόδειξη. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια (I_n) ξένων ανά δύο ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων, τέτοια ώστε

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \cap I_n)\,.$$

Λύση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο $G \supseteq A$ τέτοιο ώστε

$$m(G) < m^*(A) + \varepsilon\,.$$

Επειδή $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, όπου (I_n) αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων, είναι

$$m^*(A) \leq m(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(A) + \varepsilon\,.$$

Για $\varepsilon = \frac{1-\alpha}{\alpha} m^*(A)$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(A) + \frac{1-\alpha}{\alpha} m^*(A)$$

και ισοδύναμα

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(A)\,.$$

Επειδή

$$m^*(A) = m^*(A \cap G) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap I_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \cap I_n)\,,$$

τελικά εχουμε

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \cap I_n)\,.$$

Επειδή αυτές οι σειρές έχουν πεπερασμένα αθροίσματα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\alpha \ell(I_{n_0}) < m^*(A \cap I_{n_0})$$

και αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. Πράγματι, αν

$$\alpha \ell(I_n) \geq m^*(A \cap I_n)\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,,$$

τότε θα είχαμε

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \cap I_n)$$

που είναι άτοπο. ■

4. Έστω A και B υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $m^*(A) < \infty$ και $m^*(B) < \infty$. Τότε,

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B) \tag{4.5}$$

αν και μόνο αν υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα G_1 και G_2 τέτοια ώστε $A \subseteq G_1$, $B \subseteq G_2$ και $m(G_1 \cap G_2) = 0$.
Υπόδειξη. Υπάρχουν G_δ σύνολα G_1 και G_2 τέτοια ώστε $A \subseteq G_1$, $B \subseteq G_2$ και $m(G_1) = m^*(A)$, $m(G_2) = m^*(B)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα G_1 και G_2 τέτοια ώστε $A \subseteq G_1$, $B \subseteq G_2$ και $m(G_1 \cap G_2) = 0$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο $G \supseteq A \cup B$ τέτοιο ώστε

$$m(G) < m^*(A \cup B) + \varepsilon\,.$$

Επειδή $A \subseteq G \cap G_1$ και $B \subseteq G \cap G_2$, έχουμε

$$\begin{aligned} m^*(A) + m^*(B) &\leq m(G \cap G_1) + m(G \cap G_2) \\ &= m\left((G \cap G_1) \cup (G \cap G_2)\right) + m\left((G \cap G_1) \cap (G \cap G_2)\right) \\ &\hspace{6cm} \text{(γνωστή ιδιότητα του μέτρου)} \\ &= m\left(G \cap (G_1 \cup G_2)\right) + m(G \cap G_1 \cap G_2) \\ &= m\left(G \cap (G_1 \cup G_2)\right) \qquad\qquad (m(G \cap G_1 \cap G_2) = 0) \\ &\leq m(G) < m^*(A \cup B) + \varepsilon\,, \end{aligned}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ και κατά συνέπεια $m^*(A) + m^*(B) \leq m^*(A \cup B)$. Όμως από γνωστή ιδιότητα του εξωτερικού μέτρου Lebesgue είναι $m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$ οπότε η (4.5) ισχύει.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η (4.5) ισχύει. Ως γνωστόν υπάρχουν G_δ σύνολα G_1 και G_2 τέτοια ώστε $A \subseteq G_1$, $B \subseteq G_2$ και $m(G_1) = m^*(A)$, $m(G_2) = m^*(B)$. Θα αποδείξουμε ότι $m(G_1 \cap G_2) = 0$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $m(G_1 \cap G_2) > 0$, τότε

$$\begin{aligned} m^*(A \cup B) &= m^*(A) + m^*(B) \\ &= m(G_1) + m(G_2) \\ &= m(G_1 \cup G_2) + m(G_1 \cap G_2) \quad \text{(γνωστή ιδιότητα του μέτρου)} \\ &> m(G_1 \cup G_2) \geq m^*(A \cup B)\,, \end{aligned}$$

πού είναι άτοπο. □

5. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν

$$\text{για κάθε } P \subseteq E \text{ και για κάθε } Q \subseteq E^c, \quad m^*(P \cup Q) = m^*(P) + m^*(Q). \tag{4.6}$$

Απόδειξη. Αν το E είναι Lebesgue μετρήσιμο, τότε για κάθε $P \subseteq E$ και για κάθε $Q \subseteq E^c$ είναι

$$\begin{aligned} m^*(P \cup Q) &= m^*\left((P \cup Q) \cap E\right) + m^*\left((P \cup Q) \cap E^c\right) \\ &= m^*\left((P \cap E) \cup (Q \cap E)\right) + m^*\left((P \cap E^c) \cup (Q \cap E^c)\right) \\ &= m^*(P) + m^*(Q)\,. \end{aligned}$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η (4.6) ισχύει. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε $A \cap E \subseteq E$, $A \cap E^c \subseteq E^c$ και επομένως

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*\left((A \cap E) \cup (A \cap E^c)\right) \\ &= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)\,. & \text{(λόγω της (4.6))} \end{aligned}$$

Άρα, το E είναι Lebesgue μετρήσιμο. □

6. Έστω A το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο $[0,1]$ τέτοιο ώστε $x \in A$ αν και μόνο αν στο δεκαδικό ανάπτυγμα του x υπάρχουν όλα τα ψηφία $1, 2, \ldots, 9$. Να βρεθεί το μέτρο Lebesgue του A.

Λύση. Έστω A_k το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο $[0,1]$ τέτοιο ώστε $x \in A_k$ αν και μόνο αν στο δεκαδικό ανάπτυγμα του x υπάρχει το ψηφίο k, $k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Τότε $A = \bigcap_{k=1}^{9} A_k$. Όμως $m\left([0,1] \setminus A_k\right) = 0$ (παραπέμπουμε στην άσκηση 3, "1η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση", ακ. έτος $2004 - 5$). Επομένως,

$$\begin{aligned} m\left([0,1] \setminus A\right) &= m\left([0,1] \setminus \bigcap_{k=1}^{9} A_k\right) \\ &= m\left(\bigcup_{k=1}^{9} \left([0,1] \setminus A_k\right)\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{9} m\left([0,1] \setminus A_k\right) = 0\,. \end{aligned}$$

Δηλαδή $m\left([0,1] \setminus A\right) = 0$ και κατά συνέπεια

$$m(A) = 1\,.$$

■

7. Έστω $f : X \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ συνάρτηση μετρήσιμη και πεπερασμένη σχεδόν παντού στο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο X με $m(X) < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση g στο X τέτοια ώστε

$$m\{x : g(x) \neq f(x)\} < \varepsilon\,.$$

Λύση. Έστω

$$A_n = \{x \in X : |f(x)| > n\}\;,\; n \in \mathbb{N}^* \quad \text{και} \quad A_\infty = \{x \in X : |f(x)| = \infty\}\;.$$

Από την υπόθεση, $m(A_\infty) = 0$. Επειδή η $|f|$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, η (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων με

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_\infty \text{ και } m(A_n) \leq m(X) < \infty\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(A_\infty) = 0\,.$$

Άρα, υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $m(A_N) < \varepsilon$. Έστω

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } x \in X \setminus A_N, \\ 0 & \text{αν } x \in A_N\,. \end{cases}$$

Τότε η συνάρτηση g είναι μετρήσιμη και $|g(x)| \leq N$ για κάθε $x \in X$. Επειδή

$$\{x : g(x) \neq f(x)\} = A_N$$

και $m(A_N) < \varepsilon$, η g είναι η ζητούμενη συνάρτηση. ■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω $A = [0, \infty)$ και έστω $f_n = \chi_{[n,\infty)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ στο A. Για $\varepsilon > 0$ να αποδειχθεί ότι δεν

υπάρχει μετρήσιμο υποσύνολο B του A, τέτοιο ώστε $m(A \setminus B) < \varepsilon$ και $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ ομοιόμορφα στο B.

Λύση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μετρήσιμο υποσύνολο B του A, τέτοιο ώστε $m(A \setminus B) < \varepsilon$ και $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ ομοιόμορφα στο B. Επειδή

$$\infty = m(A) = m(A \setminus B) + m(B) < \varepsilon + m(B),$$

είναι $m(B) = \infty$ και επομένως το B δεν είναι φραγμένο σύνολο. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $x_n \in B \cap [n, \infty)$. Είναι $f_n(x_n) = 1$ και κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in B} f_n(x) = 1$$

που είναι άτοπο. Άρα, δεν υπάρχει μετρήσιμο υποσύνολο B του A, τέτοιο ώστε $m(A \setminus B) < \varepsilon$ και $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ ομοιόμορφα στο B. ∎

2. Έστω $f \in L_1(E)$, $E \in \mathcal{M}$.

   (α΄) Αν $A_n = \{x \in E : 1/n \leq |f(x)| \leq n\}$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδειχθεί ότι
   $$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f|\, dm = \int_E |f|\, dm.$$

   (β΄) Χρησιμοποιώντας το (α΄) να αποδειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $A \subset E$, τέτοιο ώστε
   $$m(A) < \infty, \quad \sup_{x\in A} |f(x)| < \infty \text{ και } \int_{E\setminus A} |f|\, dm < \varepsilon.$$

Λύση.

(α΄) Επειδή η $f \in L_1(E)$, είναι $|f| < \infty$ $\sigma.\pi.$ στο E. Έστω $f_n = |f|\chi_{A_n}$. Τότε

$$\lim_{n\to\infty} f_n = |f| \ \sigma.\pi. \text{ στο } E \text{ και } f_n \leq |f|, \text{ όπου } |f| \in L_1(E).$$

Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, dm = \int_E |f|\, dm \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_E |f|\chi_{A_n}\, dm = \int_E |f|\, dm$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f|\, dm = \int_E |f|\, dm.$$

(β′) Από το (α′) είναι $\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}|f|\,dm = \int_E |f|\,dm$. Επειδή

$$\int_{A_n}|f|\,dm + \int_{E\setminus A_n}|f|\,dm = \int_E |f|\,dm\,,$$

έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E\setminus A_n}|f|\,dm = 0\,.$$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\int_{E\setminus A_{n_0}}|f|\,dm < \varepsilon\,.$$

Το A_{n_0} είναι μετρήσιμο σύνολο με $A_{n_0} \subset E$. Επειδή

$$A_{n_0} \subseteq \{x \in E : |f(x)| \geq 1/n_0\}\ ,$$

είναι

$$\begin{aligned} m\left(A_{n_0}\right) &\leq m\left(\{x \in E : |f(x)| \geq 1/n_0\}\right) \\ &\leq n_0 \int_E |f|\,dm < \infty\,. \qquad \text{(ανισότητα Chebyshev)} \end{aligned}$$

Επίσης από τον ορισμό του συνόλου A_{n_0} έπεται ότι

$$\sup_{x\in A_{n_0}}|f(x)| \leq n_0 < \infty\,.$$

■

3. Έστω (f_n) μονότονη ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$, $f_n : E \to \mathbb{R}$, με $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) $\lim_{n\to\infty}\int_E |f - f_n|\,dm = 0$.

(2) Η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη.

(3) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\int_E f_n\,dm\right| < \infty$.

(4) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_E |f_n|\,dm < \infty$.

Υπόδειξη. Θεωρείστε ότι η ακολουθία (f_n) είναι αύξουσα (αν η ακολουθία (f_n) είναι φθίνουσα, τότε η ακολουθία $(-f_n)$ θα είναι αύξουσα).

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η (f_n) είναι αύξουσα ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

$(1) \Rightarrow (2)$ Επειδή $\lim_{n\to\infty} \int_E |f - f_n|\, dm = 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $\int_E |f - f_{n_0}|\, dm < \infty$, δηλαδή η $f - f_{n_0}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Τότε και η $f = (f - f_{n_0}) + f_{n_0}$ θα είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη.

$(2) \Rightarrow (3)$ Έστω η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Επειδή $f_1 \leq f_n \leq f$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$\int_E f_1\, dm \leq \int_E f_n\, dm \leq \int_E f\, dm\,.$$

Επομένως η ακολουθία $\left(\int_E f_n\, dm\right)$ είναι φραγμένη και κατά συνέπεια $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \left|\int_E f_n\, dm\right| < \infty$.

$(3) \Rightarrow (4)$ Έστω $M_1 := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\int_E f_n\, dm\right| < \infty$. Επειδή

$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots\,,$$

έχουμε

$$|f_n| - |f_1| \leq (f_n - f_1) \Leftrightarrow |f_n| \leq (f_n - f_1) + |f_1|\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_E |f_n|\, dm &\leq \int_E (f_n - f_1)\, dm + \int_E |f_1|\, dm \\
&= \int_E f_n\, dm - \int_E f_1\, dm + \int_E |f_1|\, dm \\
&= \int_E f_n\, dm + \int_E (|f_1| - f_1)\, dm \\
&\leq M_1 + \int_E (|f_1| - f_1)\, dm
\end{aligned}$$

και κατά συνέπεια $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E |f_n|\, dm < \infty$.

(4) ⇒ (1) Έστω $M_2 := \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E |f_n|\,dm < \infty$. Είναι $|f_n - f_1| \le |f_n| + |f_1|$, οπότε

$$\int_E |f_n - f_1|\,dm \le \int_E |f_n|\,dm + \int_E |f_1|\,dm \le M_2 + \int_E |f_1|\,dm = M_3$$

Επειδή $f_n - f_1 \nearrow f - f_1$, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης

$$\int_E (f - f_1)\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_E (f_n - f_1)\,dm \le M_3\,,$$

δηλαδή η $(f - f_1)$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη.
Επομένως, επειδή $\lim_{n\to\infty}(f - f_n) = 0$ και

$$|f - f_n| = f - f_n \le f - f_1\,,$$

όπου η $(f - f_1)$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f - f_n|\,dm = 0\,.$$

□

4. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx\sin x}{1 + n^\alpha x^\alpha}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{αν } \alpha > 1\,, \\ 1 - \cos 1 & \text{αν } \alpha = 1\,, \\ \infty & \text{αν } \alpha < 1\,. \end{cases}$$

Λύση. Έστω

$$f_n(x) := \frac{nx\sin x}{(1 + n^\alpha x^\alpha)}\,,\ x \in (0,1],\ n \in \mathbb{N}^* \text{ και } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(i) $\underline{\alpha \ge 1}$. *1ος τρόπος*. Οι f_n είναι συνεχείς στο $[0,1]$ και κατά συνέπεια Riemann ολοκληρώσιμες στο $[0,1]$. Επομένως, οι f_n είναι και Lebesgue ολοκληρώσιμες στο $[0,1]$ και

$$\int_{[0,1]} \frac{nx\sin x}{1 + n^\alpha x^\alpha}\,dm(x) = \int_0^1 \frac{nx\sin x}{1 + n^\alpha x^\alpha}\,dx\,.$$

Για κάθε $x \in [0,1]$ είναι

$$\left|\frac{nx\sin x}{1+n^\alpha x^\alpha}\right| = \frac{nx\sin x}{1+n^\alpha x^\alpha} \le \frac{nx}{1+n^\alpha x^\alpha} < 1\,.$$

(Είναι προφανές ότι $u < 1+u^\alpha$, για κάθε $u \ge 0$)
Αν $\underline{\alpha > 1}$, επειδή για κάθε $x \in [0,1]$ είναι

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx\sin x}{1+n^\alpha x^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{x\sin x}{1/n + n^{\alpha-1}x^\alpha} = 0\,,$$

από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx\sin x}{1+n^\alpha x^\alpha}\,dx = 0\,.$$

Αν $\underline{\alpha = 1}$, επειδή για κάθε $x \in [0,1]$ είναι

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx\sin x}{1+nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{x\sin x}{1/n + x} = \sin x\,,$$

από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx\sin x}{1+n^\alpha x^\alpha}\,dx = \int_0^1 \sin x\,dx = 1-\cos 1\,.$$

2ος τρόπος. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής για το ολοκλήρωμα Riemann έχουμε

$$\int_0^1 \frac{nx\sin x}{1+n^\alpha x^\alpha}\,dx = \frac{n\xi}{1+n^\alpha \xi^\alpha}\int_0^1 \sin x\,dx = \frac{n\xi}{1+n^\alpha\xi^\alpha}(1-\cos 1)\,,$$

για κάποιο $\xi \in (0,1)$. Τότε,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx\sin x}{1+n^\alpha x^\alpha}\,dx &= (1-\cos 1)\lim_{n\to\infty}\frac{n\xi}{1+n^\alpha\xi^\alpha}\\ &= \begin{cases} 0 & \text{αν } \alpha > 1\,,\\ 1-\cos 1 & \text{αν } \alpha = 1\,.\end{cases}\end{aligned}$$

(ii) $\underline{\alpha < 1}$. Οι f_n είναι συνεχείς στο $(0,1]$ και

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx\sin x}{1+n^\alpha x^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{x\sin x}{1/n + n^{\alpha-1}x^\alpha} = \infty\,,$$

για κάθε $x \in (0,1]$ (δηλαδή $\sigma.\pi.$ στο $[0,1]$). Επομένως,

$$\underline{\lim} \int_{(0,1]} \frac{nx \sin x}{1+n^\alpha x^\alpha}\, dm(x) \geq \int_{(0,1]} \underline{\lim} \frac{nx \sin x}{1+n^\alpha x^\alpha}\, dm(x)$$

(λήμμα Fatou)

$$= \int_{(0,1]} \lim_{n\to\infty} \frac{nx \sin x}{1+n^\alpha x^\alpha}\, dm(x) = \infty$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1]} \frac{nx \sin x}{1+n^\alpha x^\alpha}\, dm(x) = \infty\,.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx \sin x}{1+n^\alpha x^\alpha}\, dx = \infty\,.$$

■

5. Αν $n \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση γάμμα να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^\infty t^{2n} e^{-t^2}\, dt = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n!}\sqrt{\pi}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty e^{-t^2} \cos zt\, dt\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Εφαρμογή του θεωρήματος Beppo Levi.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{2n} e^{-t^2}\, dt &= \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{n-1/2} e^{-u}\, du \qquad \text{(αντικατάσταση } t=\sqrt{u}\text{)}\\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{(n+1/2)-1} e^{-u}\, du\\
&= \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1)}{2^{n+1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n!}\sqrt{\pi}\,. \qquad \left(\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\right)
\end{aligned}$$

Επειδή

$$e^{-t^2}\cos zt = e^{-t^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(zt)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}t^{2n}e^{-t^2},$$

είναι

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\left|(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}t^{2n}e^{-t^2}\right|dt &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{(2n)!}\int_0^{\infty}t^{2n}e^{-t^2}\,dt\\ &= \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{2^{2n+1}n!} < \infty\,.\end{aligned}$$

(Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου εύκολα διαπιστώνεται ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{2^{2n+1}n!}$ συγκλίνει.) Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}e^{-t^2}\cos zt\,dt &= \int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}t^{2n}e^{-t^2}\,dt\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\int_0^{\infty}t^{2n}e^{-t^2}\,dt\\ &\qquad\text{(Θεώρημα Beppo Levi)}\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2^{2n}n!}\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z^2/4)^n}{n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-z^2/4}\,.\end{aligned}$$

■

6. Αν $f_n(x) := \cos^n(1/x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f_n είναι Lebesgue ολοκληρώσιμες στο $[0,1]$ και να υπολογιστεί το

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\cos^n(1/x)\,dx\,.$$

Λύση. Οι συναρτήσεις f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $(0,1]$. Επειδή

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|\cos^n(1/x)|}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\,|\cos^n(1/x)| = 0$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης για γενικευμένα ολοκληρώματα και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 |\cos^n(1/x)|\, dx$ θα συγκλίνει. Επομένως, από γνωστό θεώρημα οι συναρτήσεις $f_n(x) = \cos^n(1/x)$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμες στο $[0,1]$ και

$$\int_{(0,1]} \cos^n(1/x)\, dm(x) = \int_0^1 \cos^n(1/x)\, dx\,.$$

Επειδή

$$|f_n(x)| = |\cos^n(1/x)| \leq 1, \text{ για κάθε } x \in (0,1] \text{ (δηλαδή } \sigma.\pi. \text{ στο } [0,1])$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \cos^n(1/x) = 0, \text{ για κάθε } x \in (0,1] \text{ (δηλαδή } \sigma.\pi. \text{ στο } [0,1]),$$

από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cos^n(1/x)\, dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} \cos^n(1/x)\right)\, dx = 0\,.$$

■

4.9 Ακαδημαϊκό έτος 2008–9

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
1η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων συνόλων. Ως γνωστόν

$$\limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \,.$$

Αν $\liminf A_n = \limsup A_n = A$, θα λέμε ότι *η ακολουθία* (A_n) *συγκλίνει στο* A και θα γράφουμε $\lim A_n = A$.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι $\mu\left(\liminf A_n\right) \leq \liminf \mu\left(A_n\right)$.

(β΄) Αν $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) < \infty$, τότε $\mu\left(\limsup A_n\right) \geq \limsup \mu\left(A_n\right)$.

(γ΄) Αν η ακολουθία (A_n) συγκλίνει και $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) < \infty$, τότε

$$\mu\left(\lim A_n\right) = \lim \mu\left(A_n\right) \,.$$

Λύση.

(α΄) Έστω $B_n := \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Επειδή $B_n \subseteq A_n$, είναι $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ και κατά συνέπεια

$$\liminf \mu(B_n) \leq \liminf \mu(A_n) \,.$$

Επειδή $B_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \liminf A_n$, από γνωστή ιδιότητα του μέτρου έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\liminf A_n\right) \,.$$

Άρα,

$$\mu\left(\liminf A_n\right) = \lim \mu(B_n) = \liminf \mu(B_n) \leq \liminf \mu(A_n) \,.$$

(β΄) Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή της (α΄).

(γ') Επειδή $\liminf A_n = \limsup A_n = \lim A_n$, από τις (α') και (β') έχουμε

$$\begin{aligned}\liminf \mu(A_n) \geq \mu\left(\liminf A_n\right) &= \mu\left(\lim A_n\right) \\ &= \mu\left(\limsup A_n\right) \geq \limsup \mu(A_n) .\end{aligned}$$

Άρα,

$$\lim \mu(A_n) = \mu\left(\lim A_n\right) .$$

■

2. Έστω ο χώρος μέτρου $(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \neq \emptyset$ είναι $0 < \mu(E) < \infty$. Για κάθε $x \in X$ έστω

$$\alpha(x) = \inf\left\{\mu(E) : E \in \mathfrak{M},\ x \in E\right\} .$$

(α') Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σύνολο $A_x \in \mathfrak{M}$, τέτοιο ώστε $x \in A_x$ και $\mu(A_x) = \alpha(x)$.

(β') Να αποδειχθεί ότι τα σύνολα $\{A_x\}$ είτε είναι ίσα είτε ξένα ανά δύο.

Λύση.

(α') Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει σύνολο $A_n \in \mathfrak{M}$, τέτοιο ώστε $x \in A_n$ και

$$\mu(A_n) < \alpha(x) + \frac{1}{n} .$$

Επειδή $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A_n$, είναι

$$\alpha(x) \leq \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \mu(A_n) < \alpha(x) + \frac{1}{n} ,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως, $\alpha(x) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$. Αν $A_x := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε $x \in A_x$, $A_x \in \mathfrak{M}$ και $\mu(A_x) = \alpha(x)$.
Αν $A_x, A_x' \in \mathfrak{M}$, τέτοια ώστε $x \in A_x$, $x \in A_x'$ και $\mu(A_x) = \mu(A_x') = \alpha(x)$, θα αποδείξουμε ότι $A_x = A_x'$. Πράγματι, επειδή $A_x \cap A_x' \subseteq A_x$, είναι $\mu\left(A_x \cap A_x'\right) \leq \mu(A_x)$ και από τον ορισμό της $\alpha(x)$ έπεται ότι

$$\alpha(x) = \mu(A_x) = \mu\left(A_x \cap A_x'\right) .$$

Όμως $A_x = (A_x \setminus A'_x) \cup (A_x \cap A'_x)$, οπότε

$$\mu(A_x) = \mu\left(A_x \setminus A'_x\right) + \mu\left(A_x \cap A'_x\right) .$$

Επομένως, $\mu\left(A_x \setminus A'_x\right) = 0$ και κατά συνέπεια $A_x \setminus A'_x = \emptyset$. Ισοδύναμα, $A_x = A'_x$.

(β΄) Για $x \neq y$ θεωρούμε τα μετρήσιμα σύνολα A_x, A_y.
(*i*) Αν $x \in A_y$, τότε $x \in A_x \cap A_y$. Επειδή $A_x \cap A_y \subseteq A_x$, θα είναι $\mu\left(A_x \cap A_y\right) \leq \mu(A_x)$ και από τον ορισμό της $\alpha(x)$ έπεται ότι

$$\alpha(x) = \mu(A_x) = \mu\left(A_x \cap A_y\right) .$$

Όμως $A_x = (A_x \setminus A_y) \cup (A_x \cap A_y)$, οπότε

$$\mu(A_x) = \mu\left(A_x \setminus A_y\right) + \mu\left(A_x \cap A_y\right) .$$

Επομένως, $\mu\left(A_x \setminus A_y\right) = 0$ και αυτό συνεπάγεται ότι $A_x \setminus A_y = \emptyset$. Ισοδύναμα, $A_x = A_y$.
(*ii*) Αν $x \notin A_y$, τότε $x \in A_x \setminus A_y$. Επειδή $A_x \setminus A_y \subseteq A_x$, θα είναι $\mu\left(A_x \setminus A_y\right) \leq \mu(A_x)$ και από τον ορισμό της $\alpha(x)$ έπεται ότι

$$\alpha(x) = \mu(A_x) = \mu\left(A_x \setminus A_y\right) .$$

Όμως $A_x = (A_x \setminus A_y) \cup (A_x \cap A_y)$, οπότε

$$\mu(A_x) = \mu\left(A_x \setminus A_y\right) + \mu\left(A_x \cap A_y\right) .$$

Επομένως, $\mu\left(A_x \cap A_y\right) = 0$ και αυτό συνεπάγεται ότι $A_x \cap A_y = \emptyset$, δηλαδή τα σύνολα A_x, A_y είναι ξένα μεταξύ τους.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι για δύο οποιαδήποτε μετρήσιμα σύνολα A_x, A_y, είτε είναι $A_x = A_y$ ή $A_x \cap A_y = \emptyset$.

■

3. Έστω $E \subset \mathbb{R}$, με $m^*(E) < \infty$ και έστω $I_1, I_2, \ldots, I_n$ διαστήματα στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$m^*\left(E \triangle \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) < \infty\,.$$

Τότε, τα διαστήματα $I_1, I_2, \ldots, I_n$ θα πρέπει να είναι φραγμένα.

Λύση. Είναι

$$E \cup \bigcup_{k=1}^{n} I_k = \left(E \triangle \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) \cup \left(E \cap \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) = \left(E \triangle \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) \bigcup_{k=1}^{n} (E \cap I_k)$$

και επομένως

$$m^*\left(E \cup \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) \le m^*\left(E \triangle \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) + \sum_{k=1}^{n} m^*\left(E \cap I_k\right)\,.$$

Υποθέτουμε ότι κάποιο από τα διαστήματα $I_1, I_2, \ldots, I_n$ δεν είναι φραγμένο. Έστω $m^*\left(I_k\right) = \infty$, για κάποιο k, $1 \le k \le n$. Τότε

$$m^*\left(E \cup \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) = \infty \quad \text{και} \quad m^*\left(E \triangle \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) + \sum_{k=1}^{n} m^*\left(E \cap I_k\right) < \infty\,.$$

Άτοπο. Άρα, όλα τα διαστήματα $I_1, I_2, \ldots, I_n$ θα πρέπει να είναι φραγμένα. ■

4. Δείξτε ότι για κάθε $A, B \subseteq \mathbb{R}$,

$$m^*\left(A \cup B\right) + m^*\left(A \cap B\right) \le m^*(A) + m^*(B)\,.$$

Υπόδειξη. Είναι γνωστό ότι αν τα σύνολα $E, F \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμα, τότε

$$m\left(E \cup F\right) + m\left(E \cap F\right) = m(E) + m(F)\,.$$

Λύση. Η ανισότητα προφανώς ισχύει αν $m^*(A) = \infty$ ή $m^*(B) = \infty$. Υποθέτουμε ότι $m^*(A) < \infty$ και $m^*(B) < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή

$$m^*(A) = \inf\left\{m^*(G) :\, A \subseteq G,\, G \text{ είναι ανοικτό σύνολο}\right\}\,,$$

υπάρχει ανοικτό σύνολο $G_1 \supseteq A$, τέτοιο ώστε

$$m^*(G_1) < m^*(A) + \varepsilon/2\,.$$

Παρόμοια, υπάρχει ανοικτό σύνολο $G_2 \supseteq B$, τέτοιο ώστε

$$m^*(G_2) < m^*(B) + \varepsilon/2\,.$$

Επομένως,

$$m^*(G_1) + m^*(G_2) < m^*(A) + m^*(B) + \varepsilon\,,$$

όπου τα $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτά σύνολα, με $G_1 \supseteq A$ και $G_2 \supseteq B$. Επειδή τα σύνολα G_1, G_2 είναι Lebesgue μετρήσιμα,

$$m^*\left(G_1 \cup G_2\right) + m^*\left(G_1 \cap G_2\right) = m^*(G_1) + m^*(G_2)$$

και από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε

$$m^*\left(G_1 \cup G_2\right) + m^*\left(G_1 \cap G_2\right) < m^*(A) + m^*(B) + \varepsilon\,.$$

Όμως $A \cup B \subseteq G_1 \cup G_2$ και $A \cap B \subseteq G_1 \cap G_2$, οπότε

$$m^*\left(A \cup B\right) \le m^*\left(G_1 \cup G_2\right) \quad \text{και} \quad m^*\left(A \cap B\right) \le m^*\left(G_1 \cap G_2\right)\,.$$

Άρα,

$$m^*\left(A \cup B\right) + m^*\left(A \cap B\right) < m^*(A) + m^*(B) + \varepsilon\,.$$

Επειδή η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, τελικά έχουμε

$$m^*\left(A \cup B\right) + m^*\left(A \cap B\right) \le m^*(A) + m^*(B)\,.$$

■

5. Έστω $S \subset \mathbb{R}$ ένα φραγμένο σύνολο.

   (α΄) Αν

   $$f(x) := m^*\left(S \cap (-x, x)\right)\,, \quad x \ge 0\,,$$

   να αποδειχθεί ότι η f είναι αύξουσα και συνεχής.

(β') Να αποδειχθεί ότι υπάρχει διάστημα $I = (-x_0, x_0)$ (το 0 είναι το μέσο του διαστήματος), τέτοιο ώστε

$$m^*\left(S \cap I\right) = m^*\left(S \cap I^c\right) = \frac{1}{2}m^*(S)\,.$$

<u>*Παρατήρηση*</u>. Επειδή για κάθε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $m^*(A+x) = m^*(A)$, η άσκηση 5(β') γενικεύεται ως εξής:
Κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι το μέσο ενός ανοικτού διαστήματος I, που είναι τέτοιο ώστε

$$m^*\left(S \cap I\right) = m^*\left(S \cap I^c\right) = \frac{1}{2}m^*(S)\,.$$

Λύση. Αν $m^*(S) = 0$, η απόδειξη είναι προφανής. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 < m^*(S) < \infty$.

(α') Αν $y > x \geq 0$, είναι $S \cap (-y,\, y) \supseteq S \cap (-x,\, x)$ και επομένως

$$f(y) = m^*\left(S \cap (-y,\, y)\right) \geq m^*\left(S \cap (-x,\, x)\right) = f(x)\,,$$

δηλαδή η f είναι αύξουσα. Επειδή

$$S \cap (-y,\, y) = \left(S \cap (-y,\, -x]\right) \cup \left(S \cap (-x,\, x)\right) \cup \left(S \cap [x,\, y)\right)\,,$$

είναι

$$\begin{aligned} f(y) &= m^*\left(S \cap (-y,\, y)\right) \\ &\leq m^*\left(S \cap (-y,\, -x]\right) + m^*\left(S \cap (-x,\, x)\right) + m^*\left(S \cap [x,\, y)\right) \\ &\leq m^*\left((-y,\, -x]\right) + m^*\left(S \cap (-x,\, x)\right) + m^*\left([x,\, y)\right) \\ &= (-x+y) + f(x) + (y-x) \end{aligned}$$

και επομένως

$$0 \leq f(y) - f(x) \leq 2(y-x)\,.$$

Αν $x > y \geq 0$, παρόμοια έχουμε $0 \leq f(x) - f(y) \leq 2(x-y)$. Άρα,

$$|f(x) - f(y)| \leq 2|x-y|\,,$$

δηλαδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β΄) Επειδή η f είναι συνεχής με

$$0 \leq f(x) = m^* \left(S \cap (-x,\, x)\right) \leq m^*(S)\,, \quad \text{για κάθε } x \geq 0\,,$$

το πεδίο τιμών της f είναι το κλειστό και φραγμένο διάστημα $[0,\, m^*(S)]$. Από το θεώρημα Bolzano(ή ενδιάμεσης τιμής), υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = m^*(S)/2$. Ισοδύναμα, αν $I = (-x_0, x_0)$, τότε

$$m^*(S \cap I) = \frac{1}{2} m^*(S)\,.$$

Επειδή ως γνωστόν κάθε διάστημα είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο, είναι

$$m^*(S \cap I) + m^*(S \cap I^c) = m^*(S)$$

και επομένως

$$m^*(S \cap I^c) = m^*(S) - m^*(S \cap I) = \frac{1}{2} m^*(S)\,.$$

■

6. Έστω C_a, $0 < a < 1$, το γενικευμένο σύνολο Cantor. Υπάρχει ακολουθία διαστημάτων (J_n), με $\sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) < \infty$, τέτοια ώστε κάθε σημείο του συνόλου C_a να ανήκει σε άπειρα το πλήθος διαστήματα J_n;

Λύση. Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) < \infty$, από το λήμμα Borel- Cantelli το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε άπειρα το πλήθος διαστήματα J_n, δηλαδή το $\limsup J_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} J_k$, έχει μέτρο μηδέν.
Υποθέτουμε ότι κάθε σημείο του συνόλου C_a ανήκει σε άπειρα το πλήθος διαστήματα J_n, δηλαδή ότι $C_a \subseteq \limsup J_n$. Επειδή $m\left(\limsup J_n\right) = 0$, θα είναι και $m\left(C_a\right) = 0$. Άτοπο, επειδή ως γνωστόν $m\left(C_a\right) = 1 - a > 0$. Άρα, δεν υπάρχει ακολουθία διαστημάτων (J_n), με $\sum_{n=1}^{\infty} m\left(J_n\right) < \infty$, τέτοια ώστε κάθε σημείο το συνόλου C_a να ανήκει σε άπειρα το πλήθος διαστήματα J_n. ■

7. Έστω G το σύνολο των πραγματικών αριθμών $x \in [0, 1]$, τέτοια ώστε

$$x = \frac{c_1}{5} + \frac{c_2}{5^2} + \cdots + \frac{c_n}{5^n} + \cdots\,,$$

όπου $c_n = 0$ ή 4 για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Δείξτε ότι $m(G) = 0$.

Λύση. Εργαζόμαστε παρόμοια με την κατασκευή του συνόλου Cantor. Διαιρούμε το διάστημα $[0, 1]$ σε πέντε ίσα υποδιαστήματα και αφαιρούμε το ανοικτό διάστημα $I_{1,1} = (1/5,\, 4/5)$ μήκους $3/5$. Ας σημειωθεί ότι

$$\frac{1}{5} = \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \cdots + \frac{4}{5^n} + \cdots .$$

Αν $A_1 := I_{1,1}$, είναι $m(A_1) = 3/5$.

Στο δεύτερο βήμα διαιρούμε καθένα από τα διαστήματα $[0,\, 1/5], [4/5,\, 1]$ σε πέντε ίσα υποδιαστήματα και αφαιρούμε τα ανοικτά υποδιαστήματα $I_{2,1} = (1/25,\, 4/25)$, $I_{2,2} = (21/25,\, 24/25)$ που είναι ξένα μεταξύ τους και το καθένα έχει μήκος $3/25 = 3/5^2$. Αν $A_2 := I_{2,1} \cup I_{2,2}$, είναι $m(A_2) = 2\left(3/5^2\right)$.

Συνεχίζοντας τη διαδικασία, στο n-οστό βήμα αφαιρούμε 2^{n-1} το πλήθος ανοικτά διαστήματα, τα

$$I_{n,1}, I_{n,2}, \ldots, I_{n,2^{n-1}}\,,$$

που είναι ξένα ανά δύο και το καθένα έχει μήκος $3/5^n$. Αν $A_n := \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$, είναι $m(A_n) = 2^{n-1}\,(3/5^n)$.

Άρα,

$$G = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

και

$$\begin{aligned} m(G) &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\,\frac{3}{5^n} \\ &= 1 - \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{2/5}{1 - 2/5} = 0\,. \end{aligned}$$

■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) στο $[0,1]$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0\ , \\ n & \text{αν } 0 < x \leq 1/n\ , \\ 1/n & \text{αν } 1/n < x \leq 1\ . \end{cases}$$

Να εξεταστεί αν οι f_n είναι μετρήσιμες συναρτήσεις και να υπολογιστεί το $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, για κάθε $x \in [0,1]$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subset [0,1]$ με $m(E) = 1$, η ακολουθία (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο E.

Υπόδειξη. Αν το $E \subset [0,1]$ είναι μετρήσιμο σύνολο με $m(E) = 1$, τότε το E είναι σύνολο πυκνό στο $[0,1]$.

Λύση. Η f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι συνεχής $\sigma.\pi.$ στο $[0,1]$ και κατά συνέπεια είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Είναι προφανές ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, για κάθε $x \in [0,1]$.
Επειδή το σύνολο $E \subset [0,1]$ είναι πυκνό στο $[0,1]$, από τον ορισμό της f_n έχουμε ότι

$$\max\{f_n(x) : x \in E\} = n\,.$$

Επομένως η ακολουθία (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο E. Για να συγκλίνει η f_n ομοιόμορφα στο 0, θα πρέπει να είναι

$$\lim_{n\to\infty} \max\{f_n(x) : x \in E\} = 0\,.$$

■

2. Έστω η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \text{ είναι ρητός}\ , \\ n & \text{αν } x \text{ είναι άρρητος και στο δεκαδικό ανάπτυγμα του } x \\ & \text{τα πρώτα } n \text{ ψηφία είναι μηδέν}\ , \end{cases}$$

και η συνάρτηση $g : (0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} n & \text{αν } 10^{-(n+1)} \leq x < 10^{-n},\ n = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{αν } x = 1\ . \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f, g είναι μετρήσιμες και να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $\int_{[0,1]} f\,dm$, $\int_{[0,1]} g\,dm$.

Λύση. Είναι $0 \leq f(x) \leq g(x)$, για κάθε $x \in (0,1]$ και $f(x) = g(x)$ $\sigma.\pi.$ στο $[0,1]$. Η g είναι συνεχής σχεδόν παντού στο $[0,1]$ και επομένως είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Επειδή $f(x) = g(x)$ $\sigma.\pi.$ στο $[0,1]$, η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση και έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} f\,dm = \int_{[0,1]} g\,dm &= \int_{\bigcup_{n=0}^{\infty}[10^{-(n+1)},\,10^{-n})} g\,dm \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[10^{-(n+1)},\,10^{-n})} g\,dm \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n+1}}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9n}{10^{n+1}} = 9\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^{n+1}}\ . \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος της σειράς παρατηρούμε ότι με παραγώγιση της γεωμετρικής σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, προκύπτει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$. Επομένως, για $x = 1/10$ είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^{n-1}} = \frac{10^2}{9^2}\ .$$

Άρα,

$$\int_{[0,1]} f\,dm = \int_{[0,1]} g\,dm = \frac{9}{10^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^{n-1}} = \frac{1}{9}\ .$$

■

3. Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$ και $E_n = \{x : f(x) > n\lambda\}$, όπου $\lambda > 0$ και $n = 1, 2, 3, \dots$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,dm = 0 \quad \text{και} \quad m(E_n) = o(n^{-1})\ .$$

Λύση. Ως γνωστόν, το $\varphi : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ με $\varphi(E) = \int_E f^+ \, dm$, $E \in \mathcal{M}$, είναι ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

Από την υπόθεση, η (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x : f(x) = \infty\}$. Επειδή η $f \in L_1(\mathbb{R})$, είναι

$$m\left(\{x : |f(x)| = \infty\}\right) = 0 \text{ και } \varphi(E_1) = \int_{E_1} f \, dm < \infty .$$

Επομένως $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$ και κατά συνέπεια

$$\varphi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f \, dm = 0 \, .$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = \varphi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0 \text{ και ισοδύναμα } \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \, dm = 0 \, .$$

Επίσης, η ανισότητα του Chebyshev

$$m(E_n) \leq \frac{1}{n\lambda} \int_{E_n} f \, dm$$

συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to\infty} nm(E_n) = 0$ και ισοδύναμα $m(E_n) = o\left(n^{-1}\right)$. ∎

4. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} \, dx \, .$$

Λύση. Επειδή η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) := \frac{1+nx}{(1+x)^n}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, θα είναι και Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Είναι $(1+x)^n \geq 1 + nx$, για κάθε $x \geq 0$ και επομένως

$$0 < f_n(x) \leq 1 \, , \quad \text{για κάθε } x \in [0,1] \, .$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+nx}{(1+x)^n} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1+tx}{(1+x)^t} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{x}{(1+x)^t \ln(1+x)} = 0\,, \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}\end{aligned}$$

για κάθε $x \in (0,1]$. Άρα, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\,dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1+nx}{(1+x)^n}\right) dx = 0\,.$$

■

5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} xn^{-a}e^{-nx}$, $x \in [0,\infty)$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

   (α΄) Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι συνεχής στο $[0,\infty)$.

   (β΄) Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η $f \in L_1\,[0,\infty)$ και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{[0,\infty)} f(x)\,dm(x)\,.$$

Λύση. Αν $f_n(x) = xn^{-a}e^{-nx}$, η (f_n) είναι ακολουθία συνεχών και μη αρνητικών συναρτήσεων στο $[0,\infty)$.

(α΄) Επειδή για κάθε $t > 0$ είναι $e^{-t} < t^{-1}$, έχουμε

$$xn^{-a}e^{-nx} < n^{-(1+a)}\,, \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

Ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+a)}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $a > 0$. Επομένως, από το M-κριτήριο του Weierstrass η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} xn^{-a}e^{-nx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$ για $a > 0$ και κατά συνέπεια η f είναι συνεχής στο $[0,\infty)$.

Αν $a \leq 0$, για $x > 0$ έχουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} xn^{-a}e^{-nx} \geq \sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx} = x\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-x})^n = \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\,.$$

Επειδή

$$f(0) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = 1$$

η f δεν είναι συνεχής στο 0.

Άρα, η f είναι συνεχής στο $[0, \infty)$ για $a > 0$.

(β') Είναι

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)} f(x)\,dm(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} \int_0^{\infty} xe^{-nx}\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} \left(-\frac{1}{n} \lim_{x\to\infty} xe^{-nx} + \frac{1}{n} \int_0^{\infty} e^{-nx}\,dx \right) \\ &\qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(2+a)}\,.\end{aligned}$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(2+a)}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $a > -1$. Επομένως, η $f \in L_1\,[0, \infty)$ αν και μόνο αν $a > -1$ και είναι

$$\int_{[0,\infty)} f(x)\,dm(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(2+a)}\,.$$

■

6. Έστω η μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, όπου $E \in \mathcal{M}$ με $m(E) < \infty$. Αν το $\lim_{n\to\infty} \int_E f^n\,dm$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f^n\,dm = m\left(\{x \in E : f(x) = 1\}\right)\,.$$

Υπόδειξη. Έστω

$$\begin{aligned} &E_1 = \{x \in E : f(x) = 1\}\,, && E_2 = \{x \in E : f(x) > 1\}\,, \\ &E_3 = \{x \in E : f(x) = -1\}\,, && E_4 = \{x \in E : f(x) < -1\}\,, \\ &E_5 = \{x \in E : |f(x)| < 1\}\,. && \end{aligned}$$

Λύση. Επειδή από την υπόθεση το όριο $\lim_{n\to\infty} \int_E f^n\,dm$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ το ολοκλήρωμα $\int_E f^n \, dm$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Επομένως για κάθε $n \geq n_0$ είναι

$$\int_E f^n \, dm = m(E_1) + \sum_{i=2}^{5} \int_{E_i} f^n \, dm \,.$$

Στο μετρήσιμο σύνολο E_2 η (f^n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με $f^n > 1$. Αν $m(E_2) > 0$, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_2} f^n \, dm = \int_{E_2} \left(\lim_{n\to\infty} f^n \right) \, dm = \infty \cdot m(E_2) = \infty \,.$$

Θα πρέπει λοιπόν να είναι $m(E_2) = 0$.
Στο μετρήσιμο σύνολο E_5 είναι $|f^n| < 1$ και $\lim_{n\to\infty} f^n = 0$. Επομένως από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης είναι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_5} f^n \, dm = \int_{E_5} \left(\lim_{n\to\infty} f^n \right) \, dm = 0 \,.$$

Τέλος αν $m(E_3) > 0$ και $m(E_4) > 0$, τότε

$$\int_{E_3} f^n \, dm = (-1)^n m(E_3) \quad \text{και} \quad \int_{E_4} f^n \, dm = (-1)^n \int_{E_4} |f|^n \, dm \,.$$

Επομένως για να υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \int_E f^n \, dm$ θα πρέπει να είναι $m(E_3) = m(E_4) = 0$.
Άρα αν το $\lim_{n\to\infty} \int_E f^n \, dm$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f^n \, dm = m\left(\{x \in E : f(x) = 1\}\right) \,.$$

■

7. Έστω $E \in \mathcal{M}$ με $m(E) < \infty$. Αν τα A, B είναι μετρήσιμα υποσύνολα του E, λέμε ότι το A είναι *ισοδύναμο* του B, συμβολισμός $A \sim B$, αν

$$m(A \bigtriangleup B) = m\left(A \setminus B\right) + m\left(B \setminus A\right) = 0 \,.$$

Τότε "$\sim$" είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Συμβολίζουμε με X τις κλάσεις ισοδυναμίας των μετρήσιμων υποσυνόλων του E. Αν A είναι μετρήσιμο υποσύνολο του E, $[A] = \{C \subseteq E\,,\, C \in \mathcal{M} : \, C \sim A\}$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του A. Ορίζουμε

$$d([A],[B]) := m(A \triangle B)\,.$$

(α΄) Να αποδειχθεί ότι

$$d([A],[B]) = \int_E \Big|\chi_A - \chi_B\Big| \, dm$$

και ότι ο (X,d) είναι ένας μετρικός χώρος.

(β΄) Αν $([A_n])$ είναι ακολουθία Cauchy του X, $\lim_{m,n\to\infty} d([A_m],[A_n]) = 0$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $[A] \in X$ τέτοιο ώστε $\lim_{n\to\infty} d([A_n],[A]) = 0$. Δηλαδή ο μετρικός χώρος (X,d) είναι πλήρης.

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\int_E \Big|\chi_A - \chi_B\Big| \, dm = \int_E \chi_{A\triangle B} \, dm = m(A \triangle B) = d([A],[B])\,.$$

Είναι προφανές ότι $d([A],[B]) \geq 0$ και $d([A],[B]) = 0$ αν και μόνο αν $A \sim B$, δηλαδή $[A] = [B]$. Επίσης $d([A],[B]) = d([B],[A])$ και

$$\begin{aligned} d([A],[C]) &= \int_E \Big|\chi_A - \chi_C\Big| \, dm \\ &= \int_E \Big|\Big(\chi_A - \chi_B\Big) + \Big(\chi_B - \chi_C\Big)\Big| \, dm \\ &\leq \int_E \Big|\chi_A - \chi_B\Big| \, dm + \int_E \Big|\chi_B - \chi_C\Big| \, dm \\ &= d([A],[B]) + d([B],[C])\,. \end{aligned}$$

(β΄) Έστω

$$\lim_{m,n\to\infty} d([A_m],[A_n]) = \lim_{m,n\to\infty} \int_E \Big|\chi_{A_m} - \chi_{A_n}\Big| \, dm = 0\,.$$

Επειδή $\int_E \chi_{A_n}\, dm = m(A_n) < \infty$, $\chi_{A_n} \in L_1(E)$ και ως γνωστόν ο χώρος $L_1(E)$ είναι πλήρης. Επομένως υπάρχει συνάρτηση $f \in L_1(E)$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \left|\chi_{A_n} - f\right|\, dm = 0\,.$$

– *Θα αποδείξουμε πρώτα ότι* $|f| \leq 2$ *σ.π. στο* E. Πράγματι, επειδή

$$\{|f| > 2\} \subset \left\{\left|f - \chi_{A_n}\right| > 1\right\}\,,$$

έχουμε

$$\begin{aligned} m(\{x \in E : |f(x)| > 2\}) &\leq m\left(\left\{x \in E : \left|f(x) - \chi_{A_n}(x)\right| > 1\right\}\right) \\ &\leq \int_E \left|f - \chi_{A_n}\right|\, dm \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,. \end{aligned}$$

(ανισότητα Chebyshev)

Επομένως $m(\{x \in E : |f(x)| > 2\}) = 0$ και αυτό συνεπάγεται ότι $|f| \leq 2$ σ.π. στο E.

– *Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι* $\lim_{n\to\infty} \int_E \left|\chi_{A_n} - f^2\right| dm = 0$. Είναι

$$\begin{aligned} \int_E \left|\chi_{A_n} - f^2\right|\, dm &= \int_E \left|\chi_{A_n}^2 - f^2\right|\, dm \qquad (\chi_{A_n}^2 = \chi_{A_n}) \\ &= \int_E \left|\chi_{A_n} - f\right| \left|\chi_{A_n} + f\right|\, dm \\ &\leq \int_E \left|\chi_{A_n} - f\right| \left(\chi_{A_n} + |f|\right)\, dm \\ &\leq 3 \int_E \left|\chi_{A_n} - f\right|\, dm\,, \end{aligned}$$

οπότε και

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \left|\chi_{A_n} - f^2\right|\, dm = 0\,.$$

– Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \left|\chi_{A_n} - f\right|\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_E \left|\chi_{A_n} - f^2\right|\, dm = 0\,,$$

και

$$\begin{aligned}\int_E |f - f^2|\, dm &= \int_E \left|\left(f - \chi_{A_n}\right) + \left(\chi_{A_n} - f^2\right)\right|\, dm \\ &\leq \int_E \left|\chi_{A_n} - f\right|\, dm + \int_E \left|\chi_{A_n} - f^2\right|\, dm\end{aligned}$$

συμπεραίνουμε ότι $\int_E |f - f^2|\, dm = 0$. Επομένως $f^2 = f$ $\sigma.\pi.$ στο E και αυτό συνεπάγεται ότι $f = \chi_A$ $\sigma.\pi.$ στο E, όπου A μετρήσιμο υποσύνολο του E. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \left|\chi_{A_n} - \chi_A\right|\, dm = 0$$

και κατά συνέπεια $\lim_{n\to\infty} d([A_n], [A]) = 0$.

■

4.10 Ακαδημαϊκό έτος 2007–8

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$, έστω

$$\mu(A) = \begin{cases} \sum_{n\in A} 2^{-n} & \text{αν το } A \text{ είναι πεπερασμένο ,} \\ \infty & \text{αν το } A \text{ είναι απειροσύνολο .} \end{cases}$$

(α΄) Αν $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι το δυναμοσύνολο του $\mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι το μ είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο στη σ- άλγεβρα $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ του $\mathbb{N}$. Είναι το μ ένα σ- αθροιστικό θετικό μέτρο;

(β΄) Είναι $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, για κάθε αύξουσα ακολουθία (A_n) υποσυνόλων του $\mathbb{N}$;

Λύση.

(α΄) Έστω $A_1, \ldots, A_N$ ξένα ανά δύο υποσύνολα του $\mathbb{N}$ και έστω $A = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$. Αν κάθε A_n είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε και το A είναι πεπερασμένο σύνολο οπότε

$$\mu(A) = \sum_{k\in\bigcup_{n=1}^{N} A_n} 2^{-k} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k\in A_n} 2^{-k} = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \ .$$

Διαφορετικά, αν ένα τουλάχιστον από τα A_n είναι απειροσύνολο, τότε το A είναι απειροσύνολο και $\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) = \mu(A) = \infty$. Δηλαδή το μ είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο.

Επειδή $\mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n\}$ και

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(\{n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2 < \infty = \mu(\mathbb{N}) \ ,$$

το μ δεν είναι σ- αθροιστικό θετικό μέτρο.

(β΄) Έστω $A_n := \{1, 2, \ldots, n\}$. Είναι $A_n \subset A_{n+1}$, δηλαδή η ακολουθία (A_n) είναι αύξουσα με

$$\mu(A_n) = \sum_{k \in A_n} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} .$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$. Επειδή $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(\mathbb{N}^*) = \infty$, είναι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) .$$

■

2. Υποθέτουμε ότι (A_n) είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων στο χώρο μέτρου $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, τέτοια ώστε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$ και $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \alpha \geq 0$. Δείξτε ότι το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε άπειρο το πλήθος A_n, δηλαδή το $\overline{\lim}\, A_n$, είναι μετρήσιμο και ότι $\mu\left(\overline{\lim}\, A_n\right) \geq \alpha$.

Λύση. Επειδή $A_n \in \mathfrak{M}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, το

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathfrak{M} .$$

Αν $B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, η (B_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $B_n \supseteq B_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\mu(B_1) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) < \infty$. Επειδή $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supseteq A_n$, θα είναι $\mu(B_n) \geq \mu(A_n) \geq \alpha$ και επομένως

$$\mu\left(\overline{\lim}\, A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \geq \overline{\lim}\, \mu(A_n) \geq \alpha.$$

■

3. Έστω $E \subset \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $m^*(E) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία διαστημάτων (I_n) τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \infty$ και κάθε σημείο του E ανήκει σε άπειρα το πλήθος I_n.

Απόδειξη. Έστω $m^*(E) = 0$. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ υπάρχουν διαστήματα $(J_{k,i})$ τέτοια ώστε

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_{k,i} \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \ell\left(J_{k,i}\right) < \frac{1}{2^k}\,.$$

Επειδή $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_{k,i}$, κάθε $x \in E$ ανήκει σε ένα τουλάχιστον διάστημα $J_{k,i}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$. Επομένως, κάθε $x \in E$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος $J_{k,i}$, $i, k = 1, 2, 3, \ldots$. Αν (I_n) είναι η ακολουθία όλων των διαστημάτων $J_{k,i}$, $i, k = 1, 2, 3, \ldots$, κάθε σημείο του E ανήκει σε άπειρα το πλήθος I_n και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \ell\left(J_{k,i}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty\,.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \infty$ και ότι κάθε σημείο του E ανήκει σε άπειρα το πλήθος I_n. Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \infty$ (η σειρά συγκλίνει), είναι $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \ell(I_n) = 0$. Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $\sum_{n=N}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$. Επειδή κάθε σημείο του E ανήκει σε άπειρα το πλήθος I_n,

$$E \subseteq \bigcup_{n=N}^{\infty} I_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=N}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon\,.$$

Άρα, $m^*(E) = 0$.

Σημείωση. Το αντίστροφο είναι άμεση συνέπεια του λήμματος των Borel-Cantelli. Πράγματι, επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \infty$, το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε άπειρα το πλήθος I_n έχει μέτρο μηδέν. Άρα, $m(E) = 0$. □

4. Έστω $E_n = (0, x_n)$, όπου

$$x_n = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\,.$$

Να αποδειχθεί ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και να υπολογιστεί το $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$.

Υπόδειξη. Ως γνωστόν,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n))^2}{(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))^2}\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}. \quad (\textbf{τύπος του Wallis})$$

Λύση. Η ακολουθία (x_n) είναι γνήσια αύξουσα. Πράγματι,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+3} \\ &= x_n\frac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} > x_n\,. \end{aligned}$$

Από τον τύπο του Wallis είναι $\lim_{n\to\infty} x_n = \pi/2$ και επομένως $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (0,\,\pi/2)$. Δηλαδή $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και $E_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Είναι

$$\frac{\pi}{2} = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n) = \lim_{n\to\infty} x_n\,.$$

■

5. Έστω S το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο $[0,1]$, τέτοιο ώστε $x\in S$ αν και μόνο αν στο δεκαδικό ανάπτυγμα του x εμφανίζεται είτε το ψηφίο 2 ή το ψηφίο 7. Να αποδειχθεί ότι το S είναι κλειστό σύνολο και να υπολογιστεί το μέτρο Lebesgue του S.

Λύση. Αφαιρούμε από το διάστημα $(0,1)$ τα ανοικτά υποδιαστήματα

$$(0,0.2)\,,\quad (0.3,0.7) = (0.3,0.5)\cup[0.5,0.7) \quad \text{και} \quad (0.8,1)\,.$$

Ας σημειωθεί ότι στο δεκαδικό ανάπτυγμα το $0.3 = 0.2999\cdots$ και το $0.8 = 0.7999\cdots$.

Δηλαδή αφαιρούνται 2^2 ξένα ανά δύο διαστήματα μήκους $0.2 = 2\times 10^{-1}$ το καθένα. Το άθροισμα των μηκών των διαστημάτων που αφαιρούνται είναι $2^3\times 10^{-1}$. Οι πραγματικοί αριθμοί στο $[0,1]$ που το πρώτο δεκαδικό ψηφίο τους είναι 2 ή 7 ανήκουν στα κλειστά διαστήματα $[0.2,0.3]$, $[0.7,0.8]$ που απομένουν. Έστω

$$S_1 = [0.2,0.3]\cup[0.7,0.8]\,.$$

Είναι $m(S_1) = 2 \times 10^{-1}$.
Στο δεύτερο βήμα αφαιρούμε από το διάστημα $[0.2, 0.3]$ τα ανοικτά διαστήματα

$$(0.2, 0.22)\,, \quad (0.23, 0.27) = (0.23, 0.25) \cup [0.25, 0.27)\,, \quad (0.28, 0.3)$$

και από το διάστημα $[0.7, 0.8]$ τα ανοικτά διαστήματα

$$(0.7, 0.72)\,, \quad (0.73, 0.77) = (0.73, 0.75) \cup [0.75, 0.77)\,, \quad (0.78, 0.8)\,.$$

Δηλαδή αφαιρούνται 2^3 ξένα ανά δύο διαστήματα μήκους $0.02 = 2 \times 10^{-2}$ το καθένα. Το άθροισμα των μηκών των διαστημάτων που αφαιρούνται είναι $2^4 \times 10^{-2}$. Οι πραγματικοί αριθμοί στο $[0, 1]$ που τα δύο πρώτα δεκαδικά ψηφία τους είναι 2 ή 7 ανήκουν στα κλειστά διαστήματα $[0.22, 0.23]$, $[0.27, 0.28]$, $[0.72, 0.73]$ και $[0.77, 0.78]$ που απομένουν. Έστω

$$S_2 = [0.22, 0.23] \cup [0.27, 0.28] \cup [0.72, 0.73] \cup [0.77, 0.78]\,.$$

Είναι $m(S_2) = 2^2 \times 10^{-2}$.
Συνεχίζοντας τη διαδικασία, στο n-οστό βήμα αφαιρούνται 2^{n+1} ξένα ανά δύο διαστήματα μήκους 2×10^{-n} το καθένα. Έστω S_n είναι η ένωση των 2^n το πλήθος κλειστών και ξένων ανά δύο διαστημάτων που απομένουν. Είναι $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ και επομένως το S είναι ένα κλειστό σύνολο. Είναι $m(S_n) = 2^n \times 10^{-n}$ και το άθροισμα των μηκών των διαστημάτων που αφαιρούνται στο n-οστό βήμα είναι ίσο με $2^{n+2} \times 10^{-n} = 4(2/10)^n$. Άρα,

$$m(S) = 1 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{10}\right)^n = 1 - 4\frac{2/10}{1 - 2/10} = 0\,.$$

<u>*Σημείωση*</u>. Το ότι $m(S) = 0$ αποδεικνύεται και ως εξής. Επειδή $S \subset S_n$, είναι

$$m(S) \le m(S_n) = (2/10)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

και επομένως $m(S) = 0$. ■

6. Έστω $E \subset \mathbb{R}$ ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E) < \infty$. Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα οικογένεια κλειστών συνόλων (F_n) με $\lim_{n\to\infty} m(F_n) =$

$m(E)$.

<u>*Υπόδειξη*</u>.

$$m(E) = \sup\{m(C) : C \subseteq E \text{ και το } C \text{ είναι κλειστό σύνολο}\} .$$

Λύση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει κλειστό σύνολο C_n με $C_n \subseteq E$, τέτοιο ώστε

$$m(E) < m(C_n) + \frac{1}{n} .$$

Επειδή $C_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq E$, είναι

$$m(E) < m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) + \frac{1}{n} \leq m(E) + \frac{1}{n} ,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως, $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = m(E)$.

Θεωρούμε τώρα τα κλειστά σύνολα $F_n := \bigcup_{k=1}^{n} C_k$. Είναι $F_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ και κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty} m(F_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) = m(E) .$$

■

7. Υποθέτουμε ότι το $A \subset [0,1]$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(A) > 0$. Έστω

$$A_n = A + r_n := \{x + r_n : x \in A\} ,$$

όπου $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αρίθμηση των ρητών αριθμών στο διάστημα $[-1,1]$.

(i) Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $k, n \in \mathbb{N}^*$ με $k \neq n$, τέτοια ώστε

$$A_k \cap A_n \neq \emptyset .$$

(ii) Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $x', x'' \in A$, τέτοια ώστε $x' - x'' \in \mathbb{Q}$.

Λύση.

(i) Επειδή $A_n \subset [-1,2]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, είναι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset [-1,2]$. Υποθέτουμε ότι τα σύνολα $A_n = A + r_n$ είναι ξένα ανά δύο, δηλαδή ότι για κάθε $k, n \in \mathbb{N}^*$ με $k \neq n$ είναι $A_k \cap A_n = \emptyset$. Επειδή το $A \subset [0,1]$ είναι Lebesgue μετρήσιμο και τα A_n θα είναι Lebesgue μετρήσιμα, με $m(A_n) = m(A)$. Επομένως,

$$\infty = \sum_{n=1}^{\infty} m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq m\left([-1,2]\right) = 3$$

που είναι άτοπο. Άρα, τα $A_n = A + r_n$ δεν είναι ξένα ανά δύο.

(ii) Από τη (i) υπάρχουν $k, n \in \mathbb{N}^*$ με $k \neq n$, τέτοια ώστε $A_k \cap A_n \neq \emptyset$. Αν $x \in A_k \cap A_n$, τότε $x = x' + r_k = x'' + r_n$, για κάποια $x', x'' \in A$. Άρα, $x' - x'' = r_n - r_k \in \mathbb{Q}$.

■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη, να αποδειχθεί ότι για κάθε σύνολο Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο σύνολο.

Απόδειξη. Έστω

$$\mathfrak{M} = \left\{A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\right\},$$

όπου $\mathcal{M}$ είναι η σ-άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι η $\mathfrak{M}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$ η οποία περιέχει τα σύνολα Borel. Πράγματι, επειδή $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, το $\mathbb{R} \in \mathfrak{M}$. Αν $A \in \mathfrak{M}$, τότε $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ οπότε και το $\left(f^{-1}(A)\right)^c = f^{-1}(A^c) \in \mathcal{M}$. Επομένως $A^c \in \mathfrak{M}$ (A^c είναι το συμπλήρωμα του A στο $\mathbb{R}$). Αν $A_n \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{N}^*$, τότε $f^{-1}(A_n) \in \mathcal{M}$ οπότε και $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \mathfrak{M}$. Άρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

Επειδή η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση, τα ανοικτά σύνολα ανήκουν στη σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}$. Όμως η Borel σ-άλγεβρα $\mathfrak{B}$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}$ και επομένως $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$. □

2. Υποθέτουμε ότι η $f : E \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, $E \in \mathcal{M}$. Αν $\alpha, p > 0$, τότε

$$m\left(\{x \in E : |f(x)| > \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha^p} \int_E |f(x)|^p \, dm(x)\,.$$

Λύση. Αν $E_\alpha := \{x \in E : |f(x)| > \alpha\}$, το E_α είναι μετρήσιμο υποσύνολο του E και επομένως

$$\int_E |f(x)|^p \, dm(x) \geq \int_{E_\alpha} |f(x)|^p \, dm(x) \geq \int_{E_\alpha} \alpha^p \, dm(x) = \alpha^p m(E_\alpha)\,.$$

■

3. Έστω

$$f_n := \frac{1}{n^2}\chi_{[0,\,n^2]}\,, \quad \text{για κάθε}\, n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και ότι $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Γιατί δεν εφαρμόζεται το θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue, το θεώρημα της φραγμένης σύγκλισης και το θεώρημα της ομοιόμορφης σύγκλισης;

Λύση. Επειδή

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n^2}\chi_{[0,\,n^2]}(x) \right| = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

$\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Επίσης,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n^2}\chi_{[0,n^2]} \, dm = \int_{[0,n^2]} \frac{1}{n^2} \, dm = 1\,, \quad \text{για κάθε}\, n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \, dm\,.$$

Το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue δεν εφαρμόζεται επειδή δεν υπάρχει συνάρτηση $g \in L_1(\mathbb{R})$, τέτοια ώστε $|f_n(x)| \leq g(x)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$. Παρότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|f_n(x)| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, το θεώρημα της φραγμένης σύγκλισης δεν εφαρμόζεται γιατί $m(\mathbb{R}) = \infty$. Για τον ίδιο λόγο δεν εφαρμόζεται και το θεώρημα της ομοιόμορφης σύγκλισης. ■

4. Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[-n,n]}\left(1-\frac{|x|}{n}\right)f(x)\,dm(x)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dm(x)\,.$$

Λύση. Είναι

$$\int_{[-n,n]}\left(1-\frac{|x|}{n}\right)f(x)\,dm(x)=\int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{|x|}{n}\right)f(x)\chi_{[-n,n]}(x)\,dm(x)\,.$$

Αν

$$f_n(x):=\left(1-\frac{|x|}{n}\right)f(x)\chi_{[-n,n]}(x)\,,$$

η (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ και $|f_n(x)|\le|f(x)|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή $f\in L_1(\mathbb{R})$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{[-n,n]}\left(1-\frac{|x|}{n}\right)f(x)\,dm(x)&=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)\,dm(x)\\&=\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dm(x)\,.\end{aligned}$$

■

5. Έστω $f\in L_1[0,1]$ και $A=\{x\in[0,1]:f(x)\in\mathbb{Z}\}$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο A είναι Lebesgue μετρήσιμο και ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|\cos(\pi f(x))|^n\,dx=m(A)\,.$$

Λύση. Επειδή το $\mathbb{Z}$, καθώς επίσης και κάθε υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ είναι ένα σύνολο Borel, από την άσκηση 1 το $A\in\mathcal{M}$. Παρατηρούμε ότι $|\cos(\pi f(x))|=1$ αν και μόνο αν $x\in A$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_0^1|\cos(\pi f(x))|^n\,dx&=\int_A|\cos(\pi f(x))|^n\,dx+\int_{[0,1]\setminus A}|\cos(\pi f(x))|^n\,dx\\&=m(A)+\int_{[0,1]\setminus A}|\cos(\pi f(x))|^n\,dx\,.\end{aligned}$$

Επειδή $f \in L_1[0,1]$, είναι $|f| < \infty$ σ.π. Επίσης,

$$\lim_{n\to\infty} |\cos(\pi f(x))|^n = 0 \;\text{ και }\; |\cos(\pi f(x))|^n < 1.$$

(σχεδόν για κάθε $x \in [0,1] \setminus A$)

Κατά συνέπεια, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]\setminus A} |\cos(\pi f(x))|^n \, dx = 0\,.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\cos(\pi f(x))|^n \, dx &= m(A) + \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]\setminus A} |\cos(\pi f(x))|^n \, dx \\ &= m(A)\,.\end{aligned}$$

■

6. Έστω $E \in \mathcal{M}$.

   (α΄) Υποθέτουμε ότι (f_n) είναι μια μονότονη ακολουθία, $f_n \in L_1(E)$ και ότι η ακολουθία $\left(\int_E f_n \, dm\right)$ είναι φραγμένη, δηλαδή

   $$\left|\int_E f_n \, dm\right| \leq C\,, \quad \text{για κάθε}\, n \in \mathbb{N}^*\,.$$

   Να αποδειχθεί ότι η (f_n) συγκλίνει σχεδόν παντού σε μια συνάρτηση $f \in L_1(E)$ και ότι

   $$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, dm = \int_E f \, dm\,.$$

   (β΄) Έστω $g \in L_1(E)$. Αν $\int_E |g| \, dm = 0$, χρησιμοποιώντας το (α΄) να αποδειχθεί ότι $g = 0$ σχεδόν παντού στο E.

Υπόδειξη. (α΄) Αν $(f_n) \nearrow$, εφαρμογή του θεωρήματος Beppo Levi με $g_k := f_k - f_{k-1}$ για κάθε $k \geq 2$ και $g_1 := f_1$, (β΄) $f_n := n|g|$.

Λύση.

(α΄) Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (f_n) είναι αύξουσα (αν είναι φθίνουσα, τότε θεωρούμε την ακολουθία $(-f_n)$). Έστω η ακολουθία (g_k), με $g_k := f_k - f_{k-1}$, για κάθε $k \geq 2$ και $g_1 := f_1$. Επειδή

$$\sum_{k=2}^{n} |g_k| = \sum_{k=2}^{n} (f_k - f_{k-1}) = f_n - f_1\,, \quad n \geq 2\,,$$

από την υπόθεση έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \int_E |g_k|\, dm &= \int_E |g_1|\, dm + \int_E \sum_{k=2}^{n} |g_k|\, dm \\
&= \int_E |f_1|\, dm + \int_E (f_n - f_1)\, dm \\
&= \int_E |f_1|\, dm + \int_E f_n\, dm - \int_E f_1\, dm \\
&\leq \int_E |f_1|\, dm + 2C\,.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |g_k|\, dm < \infty$$

και από το θεώρημα Beppo Levi η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο E. Αν $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$, τότε $f \in L_1(E)$ και

$$\int_E f\, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E g_k\, dm\,.$$

Όμως $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$, οπότε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = f(x)$ σχεδόν παντού στο E και

$$\begin{aligned}
\int_E f\, dm &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_E g_k\, dm \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_E g_k\, dm \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_E \sum_{k=1}^{n} g_k\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, dm\,.
\end{aligned}$$

(β') Αν $f_n := n|g|$, από την υπόθεση $\int_E f_n\,dm = 0$. Επομένως, η ακολουθία (f_n) είναι αύξουσα με $f_n \in L_1(E)$. Από το (α') η (f_n) θα πρέπει να συγκλίνει σχεδόν παντού σε μια συνάρτηση $f \in L_1(E)$. Όμως η $f_n(x) = n|g(x)|$ δεν συγκλίνει εκτός αν $g(x) = 0$. Άρα, $g(x) = 0$ σχεδόν παντού στο E.

■

7. Αν $a \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί πρώτα ότι για κάθε $x > 0$

$$\frac{\sin ax}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin ax\,,$$

και στη συνέχεια ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}\,.$$

<u>Υπόδειξη</u>. Εφαρμογή του θεωρήματος Beppo Levi.

Λύση. Ως γνωστόν $\frac{t}{1-t} = \sum_{n=1}^{\infty} t^n$, $|t| < 1$ (γεωμετρική σειρά). Επειδή για $x > 0$ είναι $0 < e^{-x} < 1$, από τη γεωμετρική σειρά για $t = e^{-x}$ έχουμε

$$\frac{\sin ax}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \sin ax = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx} \sin ax\,.$$

Είναι

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left|e^{-nx} \sin ax\right|\,dx &\le \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |a| x e^{-nx}\,dx \qquad (|\sin ax| \le |ax|)\\
&= |a| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-nx}\,dx\\
&= |a| \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n} \lim_{x\to\infty} x e^{-nx} + \frac{1}{n} \int_0^{\infty} e^{-nx}\,dx\right]\\
&\qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\
&= |a| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.
\end{aligned}$$

Όμως είναι γνωστό ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n^2\right)$ συγκλίνει οπότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left|e^{-nx}\sin ax\right|\,dx<\infty$. Επομένως, από το θεώρημα Beppo Levi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{e^x-1}\,dx &= \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}\sin ax\,dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-nx}\sin ax\,dx \qquad \text{(θεώρημα Beppo Levi)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-nx}}{a^2+n^2}\left(n\sin ax+a\cos ax\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=R} \\
&\qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{a^2+n^2}\,.
\end{aligned}$$

■

4.11 Ακαδημαϊκό έτος 2004–5

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
1η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω X είναι ένα μη-αριθμήσιμο απειροσύνολο,

$$\Sigma = \{E \subseteq X : \text{το } E \text{ ή το } E^c \text{ είναι αριθμήσιμο}\}$$

και ορίζουμε το $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$, με

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{αν το } E \text{ είναι αριθμήσιμο },\\ 1 & \text{αν το } E^c \text{ είναι αριθμήσιμο }. \end{cases}$$

Δείξτε ότι (X, Σ, μ) είναι ένας χώρος μέτρου.

Απόδειξη. Επειδή $X^c = \emptyset$, το $X \in \Sigma$. Έστω το $E \in \Sigma$. Αν το E δεν είναι αριθμήσιμο, τότε το E^c είναι αριθμήσιμο οπότε το $E^c \in \Sigma$. Αν το E είναι αριθμήσιμο τότε το $(E^c)^c = E$ είναι αριθμήσιμο οπότε και πάλι $E^c \in \Sigma$. Έστω τώρα $(E_n) \subseteq \Sigma$. Αν κάθε E_n είναι αριθμήσιμο, τότε η ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο και κατά συνέπεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$. Αν υποθέσουμε ότι κάποιο E_{n_0} δεν είναι αριθμήσιμο, τότε το $E_{n_0}^c$ είναι αριθμήσιμο και $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c \subseteq E_{n_0}^c$. Επομένως και πάλι η ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$.
Θα αποδείξουμε ότι το μ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα Σ. Προφανώς $\mu(\emptyset) = 0$. Αν (E_n) είναι ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων της σ-άλγεβρας Σ, θα αποδείξουμε ότι $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

(i) Αν $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, τότε κάθε E_n θα είναι αριθμήσιμο και επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

(ii) Αν $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο, τότε **υπάρχει μόνο ένα** E_n **που δεν είναι αριθμήσιμο**. Πράγματι, αν τα ξένα μεταξύ τους σύνολα E_m

και E_n, $m \neq n$, δεν είναι αριθμήσιμα, τότε $E_m \cap E_n = \emptyset$ συνεπάγεται ότι $(E_m \cap E_n)^c = \emptyset^c = X$ και ισοδύναμα $E_m^c \cup E_n^c = X$. Αυτό όμως είναι άτοπο επειδή το $E_m^c \cup E_n^c$ είναι αριθμήσιμο σύνολο και από την υπόθεση το X δεν είναι αριθμήσιμο. Αν το E_{n_0} είναι το μοναδικό σύνολο της ακολουθίας $(E_n) \subseteq \Sigma$ που δεν είναι αριθμήσιμο, τότε και πάλι έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu(E_{n_0}) = 1 = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

□

2. Να κατασκευαστεί ένα υποσύνολο A του $[0,1]$, με τον ίδιο τρόπο που κατασκευάζεται το τριαδικό σύνολο του Cantor, όμως στο n-οστό βήμα για την κατασκευή του A_n αφαιρείται από κάθε διάστημα του A_{n-1} ένα ανοικτό υποδιάστημα που έχει το ίδιο μέσο με το διάστημα και του οποίου το μήκος είναι θ_n- φορές το μήκος του διαστήματος, $0 < \theta_n < 1$. Αν $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, να αποδειχθεί ότι $m(A) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-\theta_k)$ και να συμπεράνετε ότι $m(A) = 0$ αν και μόνο αν $\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k = \infty$.

   Λύση. Έστω A_1 είναι το σύνολο που απομένει αφαιρώντας από το μέσο $1/2$ του διαστήματος $[0,1]$ το ανοικτό διάστημα $((1-\theta_1)/2, (1+\theta_1)/2)$ μήκους θ_1. Τότε $m(A_1) = 1 - \theta_1$. Το A_1 αποτελείται από δύο ξένα μεταξύ τους κλειστά υποδιαστήματα του $[0,1]$, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{2}(1-\theta_1)$.

   Στη συνέχεια αφαιρούμε από τα μέσα των δύο κλειστών διαστημάτων ανοικτά υποδιαστήματα μήκους $\frac{1-\theta_1}{2}\theta_2$ το καθένα. Έστω A_2 είναι το σύνολο που απομένει. Τότε, $m(A_2) = (1-\theta_1) - (1-\theta_1)\theta_2 = (1-\theta_1)(1-\theta_2)$. Το A_2 αποτελείται από 2^2 ξένα ανά δύο κλειστά υποδιαστήματα του $[0,1]$ καθένα από τα οποία έχει μήκος

$$\frac{1}{2^2}(1-\theta_1)(1-\theta_2).$$

   Υποθέτουμε τώρα ότι το A_{n-1} αποτελείται από 2^{n-1} ξένα ανά δύο κλειστά υποδιαστήματα του $[0,1]$ καθένα από τα οποία έχει μήκος

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}}(1-\theta_k)$$

και επομένως $m(A_{n-1}) = \prod_{k=1}^{n-1}(1-\theta_k)$. Αφαιρούμε στη συνέχεια από κάθε κλειστό διάστημα ένα ανοικτό υποδιάστημα που έχει το ίδιο μέσο με το διάστημα και του οποίου το μήκος είναι $\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}(1-\theta_k)\theta_n$. Έστω A_n είναι το σύνολο που απομένει. Τότε $A_{n-1} \supset A_n$ και

$$m(A_n) = \prod_{k=1}^{n-1}(1-\theta_k) - \left[\prod_{k=1}^{n-1}(1-\theta_k)\right]\theta_n = \prod_{k=1}^{n}(1-\theta_k)\,.$$

Αν $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε το A είναι συμπαγές επειδή είναι τομή συμπαγών συνόλων. Επειδή $A_n \searrow A$, είναι $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-\theta_k)$. Δηλαδή το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-\theta_k) = \lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}(1-\theta_k) \text{ συγκλίνει.}$$

Το όριο $\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}(1-\theta_k)$ υπάρχει και είναι διάφορο του μηδενός αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1-\theta_k)$ συγκλίνει. Η τελευταία σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k$ συγκλίνει (πρέπει $\lim_{k\to\infty}\theta_k = 0$, διαφορετικά οι σειρές αποκλίνουν). Πράγματι, επειδή

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln(1-x)}{x} = 1\,,$$

από το κριτήριο σύγκρισης οι σειρές είτε συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα. Άρα, $m(A) = 0$ αν και μόνο αν $\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k = \infty$. ∎

3. Έστω S το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο $[0,1]$ τέτοιο ώστε $x \in S$ αν και μόνο αν στο δεκαδικό ανάπτυγμα του x δεν εμφανίζεται το ψηφίο 6. Δείξτε ότι το S έχει μέτρο Lebesgue μηδέν.

Λύση. Διαιρούμε το διάστημα $[0,1]$ σε δέκα ίσα υποδιαστήματα και αφαιρούμε το ανοικτό διάστημα $(0.6, 0.7)$ μήκους $1/10$ (ας σημειωθεί ότι στο δεκαδικό ανάπτυγμα το $0.6 = 0.5999\cdots$ και το $0.7 = 0.6999\cdots$).

Στο δεύτερο βήμα διαιρούμε καθένα από τα εννέα διαστήματα που απομένουν, δηλαδή τα $[0, 0.1], \ldots, [0.5, 0.6]$, $[0.7, 0.8]$, $[0.8, 0.9]$, $[0.9, 1]$, σε δέκα ίσα υποδιαστήματα και αφαιρούμε τα εννέα ανοικτά υποδιαστήματα $(0.06, 0.07), \ldots$, $(0.56, 0.57)$, $(0.76, 0.77)$, $(0.86, 0.87)$, $(0.96, 0.97)$ μήκους $1/10^2$ το καθένα.

Συνεχίζοντας τη διαδικασία, στο n-οστό βήμα αφαιρούμε 9^{n-1} το πλήθος ανοικτά διαστήματα που το καθένα έχει μήκος $1/10^n$. Αν (a_n, b_n), $n \in \mathbb{N}^*$, είναι η ακολουθία των ανοικτών διαστημάτων που αφαιρούνται, τότε

$$S = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)\,.$$

Επειδή

$$\begin{aligned} m\left([0,1] \setminus S\right) &= \frac{1}{10} + 9\frac{1}{10^2} + \cdots + 9^{n-1}\frac{1}{10^n} + \cdots \\ &= \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1}{10}\frac{1}{1-9/10} = 1\,, \end{aligned}$$

είναι $m(S) = 0$. ■

4. (α΄) Αν C είναι το τριαδικό σύνολο Cantor και $C{+}C := \{x + y : x, y \in C\}$, δείξτε ότι $C + C = [0, 2]$.

   (β΄) Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα A και B του $\mathbb{R}$ με $m(A) = m(B) = 0$, τέτοια ώστε

$$A + B := \{x + y : x \in A,\ y \in B\} = \mathbb{R}\,.$$

   Υπόδειξη. $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(C + n)$ και $B = C$.

Επομένως, αν δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$ έχουν μέτρο Lebesgue μηδέν, τότε δεν συνεπάγεται ότι και το άθροισμά τους θα έχει μέτρο μηδέν.

Λύση.

(α') Αν $x, y \in C$, τότε $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ και $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}$ με $x_n, y_n \in \{0, 2\}$. Επομένως

$$x + y = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_n + y_n)/2}{3^n}\,, \quad \text{με } (x_n + y_n)/2 \in \{0, 1, 2\}\,.$$

Αν τώρα $a \in [0, 2]$, είναι $a = 2t$ για κάποιο $t \in [0, 1]$ και στο τριαδικό σύστημα $a = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n}$, με $t_n \in \{0, 1, 2\}$. Άρα, $C + C = [0, 2]$.

5. Είναι

$$A + B = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} ((C + n) + C) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} ((C + C) + n) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} ([0, 2] + n) = \mathbb{R}\,.$$

■

6. Έστω N ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $m(N) = 0$. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο, δείξτε ότι $m(f(N)) = 0$.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, η $f|_{[-n,n]} : [-n, n] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz. Δηλαδή υπάρχει $M_n > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M_n|x - y|, \text{ για κάθε } x, y \in [-n, n].$$

Λύση. Για κάθε φυσικό αριθμό n, η $f|_{[-n,n]} : [-n, n] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz (η f έχει συνεχή και φραγμένη παράγωγο στο συμπαγές σύνολο $[-n, n]$). Επειδή $N \cap [-n, n] \subseteq N$, είναι $m(N \cap [-n, n]) = 0$. Τότε από γνωστή πρόταση (παραπέμπουμε στο [17]) θα είναι

$$m^*\left(f(N \cap [-n, n])\right) = 0\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} m^*(f(N)) &= m^*\left(f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N \cap [-n, n]\right)\right) \\ &= m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f\left(N \cap [-n, n]\right)\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*\left(f\left(N \cap [-n, n]\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

■

7. Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(α') Αν $m(A) = 0$, να αποδειχθεί ότι για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι

$$m^*(A \cup B) = m^*(B \setminus A) = m^*(B)\,.$$

(β') Αν $m^*(A) < \infty$ και το Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο A_1 του A είναι τέτοιο ώστε $m(A_1) = m^*(A)$, να αποδειχθεί ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Λύση.

(α') Είναι

$$m^*(B) \leq m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B) = m^*(B)\,,$$

οπότε $m^*(A \cup B) = m^*(B)$. Επειδή $A \cap B \subseteq A$, είναι $m^*(A \cap B) = 0$. Επομένως

$$m^*(B) = m^*\left((B \setminus A) \cup (A \cap B)\right) \leq m^*(B \setminus A) + m^*(A \cap B) = m^*(B \setminus A)\,.$$

Όμως $B \setminus A \subseteq B$, οπότε $m^*(B \setminus A) \leq m^*(B)$. Άρα $m^*(B \setminus A) = m^*(B)$.

(β') Από τη συνθήκη Καραθεοδωρή για τη μετρησιμότητα ενός συνόλου και την υπόθεση έχουμε

$$m(A_1) = m^*(A) = m^*(A \setminus A_1) + m^*(A \cap A_1) = m^*(A \setminus A_1) + m(A_1)\,.$$

Επειδή $m(A_1) < \infty$, είναι $m^*(A \setminus A_1) = m(A_1) - m(A_1) = 0$. Για κάθε σύνολο B είναι $B \cap A = (B \cap (A \setminus A_1)) \cup (B \cap A_1)$, οπότε

$$\begin{aligned} m^*(B \cap A) &\leq m^*\left(B \cap (A \setminus A_1)\right) + m^*(B \cap A_1) \\ &\leq m^*(A \setminus A_1) + m^*(B \cap A_1) = m^*(B \cap A_1)\,. \end{aligned}$$

Όμως $B \cap A_1 \subset B \cap A$ συνεπάγεται ότι $m^*(B \cap A_1) \leq m^*(B \cap A)$ και επομένως $m^*(B \cap A_1) = m^*(B \cap A)$. Επειδή $B \setminus A \subset B \setminus A_1$, είναι $m^*(B \setminus A) \leq m^*(B \setminus A_1)$. Επειδή

$$B \setminus A_1 = (B \cap (A \setminus A_1)) \cup (B \setminus A)\,,$$

έχουμε

$$\begin{aligned} m^*(B \setminus A_1) &\le m^*\left(B \cap (A \setminus A_1)\right) + m^*(B \setminus A) \\ &\le m^*(A \setminus A_1) + m^*(B \setminus A) = m^*(B \setminus A)\,. \end{aligned}$$

Άρα, $m^*(B \setminus A) = m^*(B \setminus A_1)$. Επειδή το σύνολο A_1 είναι Lebesgue μετρήσιμο, για κάθε σύνολο B θα είναι

$$m^*(B) = m^*(B \setminus A_1) + m^*(B \cap A_1) = m^*(B \setminus A) + m^*(B \cap A)\,,$$

που συνεπάγεται ότι και το σύνολο A είναι Lebesgue μετρήσιμο.

■

8. (α΄) Έστω $E_n = (x_n, a)$, όπου $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ με $x_0 = a > 1$. Να αποδειχθεί ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και να υπολογιστεί το $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$.

   (β΄) Έστω
   $$F_n = \left(\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + (n-1)^\alpha}{n^{\alpha+1}}\,,\ 1\right), \quad \alpha > 0\,.$$
   Να αποδειχθεί ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και να υπολογιστεί το $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right)$.

Λύση.

(α΄) Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι $x_n > \sqrt{a}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι η ακολουθία (x_n) είναι γνήσια φθίνουσα. Επομένως η ακολουθία (x_n) συγκλίνει. Αν $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, από την $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ προκύπτει ότι $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right)$ και ισοδύναμα $l = \pm\sqrt{a}$. Επειδή $x_n > \sqrt{a}$, είναι $\lim_{n\to\infty} x_n = l = \sqrt{a}$.

Επομένως $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (\sqrt{a}, a)$, δηλαδή η $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και $E_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Είναι

$$a - \sqrt{a} = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n) = \lim_{n\to\infty}(a - x_n)\,.$$

(β΄) Επειδή η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$ είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $[0,1]$, το

$$L(f, P_n) = \frac{1^\alpha + \ 2^\alpha + \cdots + (n-1)^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

είναι το κατω άθροισμα της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\right\}$ του $[0,1]$. Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$L(f, P_n) < \int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}$$

και από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + (n-1)^\alpha}{n^{\alpha+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}\,.\end{aligned}$$

Επομένως, $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \left[\frac{1}{\alpha+1}, 1\right)$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m\left(\bigcap_{n=1}^\infty F_n\right) = 1 - 1/(\alpha+1) = \alpha/(\alpha+1)$.

■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, $f_n : E \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, όπου $E \in \mathcal{M}$. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{x \in E : f_n(x) \,\text{συγκλίνει}\}$ είναι μετρήσιμο.

Λύση. Επειδή οι συναρτήσεις $g(x) = \limsup f_n(x)$, $h(x) = \liminf f_n(x)$ είναι μετρήσιμες και η διαφορά τους θα είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε όμως

$$A = \{x \in E : f_n(x) \,\text{συγκλίνει}\} = \{x \in E : (g-h)(x) = 0\}$$

είναι ένα μετρήσιμο σύνολο. ■

2. (α') Να βρεθεί μία μη μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η εικόνα κάθε μετρήσιμου υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ να είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

   (β') Αν C είναι το τριαδικό σύνολο Cantor, να βρεθεί μία συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$ τέτοια ώστε $f(x) = 0$, για κάθε $x \in C$ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [0,1] \setminus C$.

   Λύση.

   (α') Ως γνωστόν η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_E ενός υποσυνόλου E του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν το E είναι μετρήσιμο σύνολο. Αν το E δεν είναι μετρήσιμο (π.χ. παίρνουμε το E να είναι το σύνολο Vitali), θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) := \chi_E(x)$ η οποία δεν είναι μετρήσιμη. Επειδή η εικόνα μέσω της f κάθε υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ είναι ένα από τα σύνολα : $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0,1\}$, η εικόνα κάθε μετρήσιμου υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

   (β') Ως γνωστόν η απόσταση του $x \in [0,1]$ από το C ορίζεται ως εξής

   $$d(x, C) := \inf\{|x-y| : y \in C\} .$$

   Επειδή $0 \leq d(x,C) < 1$, αν ορίσουμε $f(x) := d(x,C)$, τότε η f είναι συνεχής με $f(x) \in [0,1]$. Προφανώς $f(x) = 0$, για κάθε $x \in C$. Επειδή το σύνολο C είναι συμπαγές, για κάθε $x \in [0,1] \setminus C$ είναι $f(x) = d(x,C) \neq 0$.

   ■

3. (α') Έστω $f, g, \varphi : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν

   $$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & \text{αν } g(x) \neq 0 \,, \\ \varphi(x) & \text{αν } g(x) = 0 \,, \end{cases}$$

   να αποδειχθεί ότι η $h : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

   (β') Να αποδειχθεί ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γράφεται στη μορφή $f = u|f|$, όπου η u είναι μετρήσιμη συνάρτηση με $u(x) = \pm 1$, για κάθε $x \in E$.

Λύση.

(α΄) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned}&\{x \in E : h(x) > a\} \cap \{x \in E : g(x) \neq 0\}\\ &\quad = \{x \in E : f(x)/g(x) > a\} \cap \{x \in E : g(x) \neq 0\}\\ &\quad = [\{x \in E : f(x) - ag(x) > 0\} \cap \{x \in E : g(x) > 0\}]\\ &\qquad \cup [\{x \in E : f(x) - ag(x) < 0\} \cap \{x \in E : g(x) < 0\}] \ .\end{aligned}$$

Επειδή οι f, g είναι μετρήσιμες, το σύνολο

$$\{x \in E : h(x) > a\} \cap \{x \in E : g(x) \neq 0\}$$

είναι μετρήσιμο. Επειδή και η φ είναι μετρήσιμη, το σύνολο

$$\{x \in E : h(x) > a\} \cap \{x \in E : g(x) = 0\} = \{x \in E : \varphi(x) > a\}$$

είναι μετρήσιμο. Όμως

$$\begin{aligned}\{x \in E : h(x) > a\} \quad = \quad & [\{x \in E : h(x) > a\} \cap \{x \in E : g(x) \neq 0\}]\\ & \cup [\{x \in E : h(x) > a\} \cap \{x \in E : g(x) = 0\}] \ ,\end{aligned}$$

οπότε και το σύνολο $\{x \in E : h(x) > a\}$ θα είναι μετρήσιμο. Άρα, η συνάρτηση h είναι μετρήσιμη.

(β΄) Εφαρμόζουμε την (α΄) με $g = |f|$ και $\varphi(x) = 1$, για κάθε $x \in E$, οπότε η συνάρτηση

$$u(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|} & \text{αν } f(x) \neq 0 \\ 1 & \text{αν } f(x) = 0 \ , \end{cases}$$

είναι μετρήσιμη. Επομένως, κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γράφεται στη μορφή $f = u|f|$, όπου η u είναι μετρήσιμη συνάρτηση με $u(x) = \pm 1$, για κάθε $x \in E$.

■

4. Έστω η συνάρτηση $f : E \to [0, \infty]$ είναι μετρήσιμη, $E \in \mathcal{M}$. Αν $\int_E f \, \mathrm{d}m < \infty$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebyshev δείξτε ότι $f < \infty$ $\sigma.\pi.$ στο E.

Λύση. Αν $E_n := \{x \in E : f(x) \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, τα E_n είναι μετρήσιμα σύνολα. Επίσης

$$\{x \in E : f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{και} \quad E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots \supseteq E_n \supseteq \cdots .$$

Επειδή από την ανισότητα Chebyshev

$$m(E_1) = m\left(\{x \in E : f(x) \geq 1\}\right) \leq \int_E f \, \mathrm{d}m < \infty ,$$

είναι $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m\left(\{x \in E : f(x) = \infty\}\right)$. Όμως και πάλι από την ανισότητα Chebyshev

$$m(E_n) = m\left(\{x \in E : f(x) \geq n\}\right) \leq \frac{1}{n} \int_E f \, \mathrm{d}m \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Επομένως, $m\left(\{x \in E : f(x) = \infty\}\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n) = 0$. Άρα, $f < \infty$ $\sigma.\pi.$ στο E. ∎

5. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ είναι μετρήσιμη.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \int_{[-n,\, n]} f \, \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}m$.

(β΄) Αν $f_n := \min\{f, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}m = \int_E f \, \mathrm{d}m , \quad \text{για κάθε } E \in \mathcal{M} .$$

Λύση.

(α΄) Αν $f_n = f\chi_{[-n,\, n]}$, η (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε $f_n \leq f_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,\, n]} f \, \mathrm{d}m &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f\chi_{[-n,\, n]} \, \mathrm{d}m \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}m . \end{aligned}$$

(β') Αν $f_n := \min\{f, n\}$, τότε η (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε $f_n \le f_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Αν $E \in \mathcal{M}$, επειδή $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m = \int_E f \,\mathrm{d}m\,.$$

■

6. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ είναι μετρήσιμη με $\int_{[0,\infty)} f \,\mathrm{d}m < \infty$. **Ο μετασχηματισμός Laplace της** f ορίζεται ως εξής

$$F(t) := \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-tx} f(x) \,\mathrm{d}m(x)\,, \quad t \ge 0\,.$$

Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής στο $[0, \infty)$ με $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$.

Λύση. Αν $t_2 \ge t_1 \ge 0$, τότε για κάθε $x \ge 0$ είναι $\mathrm{e}^{-t_2 x} \le \mathrm{e}^{-t_1 x}$ και επομένως

$$F(t_2) = \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-t_2 x} f(x) \,\mathrm{d}m(x) \le \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-t_1 x} f(x) \,\mathrm{d}m(x) = F(t_1)\,,$$

δηλαδή η F είναι φθίνουσα. Επίσης, επειδή

$$F(t) = \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-tx} f(x) \,\mathrm{d}m(x) \le \int_{[0,\infty)} f(x) \,\mathrm{d}m(x) < \infty\,,$$

η F είναι μη-αρνητική και φραγμένη στο $[0, \infty)$. Για να αποδείξουμε ότι η F είναι συνεχής και ότι $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης ή το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue.

1ος τρόπος. Αν $0 < t_0 < \infty$, επειδή η F είναι φθίνουσα τα πλευρικά όρια $\lim_{t\to t_0^+} F(t)$ και $\lim_{t\to t_0^-} F(t)$ υπάρχουν (αν $t_0 = 0$, τότε το όριο $\lim_{t\to 0^+} F(t)$ υπάρχει). Αν (t_n), $t_n > t_0$, είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$ και $f_n(x) := \mathrm{e}^{-t_n x} f(x)$, τότε η (f_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $[0, \infty)$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-t_n x} f(x)\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_{[0,\,\infty)} \Big(\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-t_n x} f(x)\Big)\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-t_0 x} f(x)\,\mathrm{d}m(x) = F(t_0)\,.\end{aligned}$$

Επομένως, $\lim_{t\to t_0^+} F(t) = F(t_0)$. Αν τώρα (t_n), $t_n < t_0$, είναι αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$ και $f_n(x) := \mathrm{e}^{-t_n x} f(x)$, τότε η (f_n) είναι μία φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $[0,\infty)$. Επειδή

$$\int_{[0,\,\infty)} f_1(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-t_1 x} f(x)\,\mathrm{d}m(x) \le \int_{[0,\,\infty)} f(x)\,\mathrm{d}m(x) < \infty\,,$$

από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων έχουμε $\lim_{n\to\infty} F(t_n) = F(t_0)$, οπότε $\lim_{t\to t_0^-} F(t) = F(t_0)$. Άρα, $\lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0)$. Δηλαδή η F είναι συνεχής στο $t_0 \in [0,\,\infty)$.

Επειδή η F είναι φθίνουσα και φραγμένη στο $[0,\infty)$, το όριο $\lim_{t\to\infty} F(t)$ υπάρχει. Για να αποδείξουμε ότι $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} F(t_n) = 0$, όπου η ακολουθία θετικών όρων (t_n) είναι αύξουσα με $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. Όπως και προηγουμένως, αν $f_n(x) = \mathrm{e}^{-t_n x} f(x)$, τότε η (f_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $[0,\infty)$ και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-t_n x} f(x)\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_{[0,\,\infty)} \Big(\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-t_n x} f(x)\Big)\,\mathrm{d}m(x) = \int_{[0,\,\infty)} 0\,\mathrm{d}m(x) = 0\,.\end{aligned}$$

2ος τρόπος. Αν (t_n) είναι ακολουθία θετικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$ και $f_n(x) := \mathrm{e}^{-t_n x} f(x)$, τότε η (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $[0,\infty)$ με $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$, όπου $g(x) := \mathrm{e}^{-t_0 x} f(x)$. Επειδή

$f_n(x) \leq f(x)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και η $f \in L_1\,[0, \infty)$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue είναι

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\,\infty)} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) \\ &= \int_{[0,\,\infty)} g(x)\,\mathrm{d}m(x) \\ &= \int_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-t_0 x} f(x)\,\mathrm{d}m(x) = F(t_0)\,.\end{aligned}$$

Επομένως η F είναι συνεχής στο $t_0 \in [0,\,\infty)$. Επειδή η F είναι φθίνουσα και φραγμένη στο $[0, \infty)$, το $\lim_{t\to\infty} F(t)$ υπάρχει. Αν (t_n) είναι ακολουθία θετικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, τότε και πάλι από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue, είναι $\lim_{t\to\infty} F(t_n) = 0$ και επομένως $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$. ∎

7. (α΄) Αν το G είναι ένα ανοικτό σύνολο, δείξτε ότι

$$m(G) = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m:\ 0 \leq f \leq \chi_G \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής}\right\}.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Να θεωρήσετε την ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων

$$f_n(x) := \left(\frac{d(x, G^c)}{1 + d(x, G^c)}\right)^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

(β΄) Αν το F είναι ένα κλειστό σύνολο, δείξτε ότι

$$m(F) = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m:\ f \geq \chi_F \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής}\right\}.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $m(F) < \infty$ και $\varepsilon > 0$, τότε ως γνωστόν υπάρχει ανοικτό σύνολο $G \supset F$ τέτοιο ώστε $m(G) < m(F) + \varepsilon$. Να θεωρήσετε είτε τη συνεχή συνάρτηση

$$g(x) := \frac{d(x, G^c)}{d(x, G^c) + d(x, F)}$$

ή την ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων

$$f_n(x) := \left(\frac{d(x, G^c)}{d(x, G^c) + d(x, F)}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Λύση.

(α΄) Επειδή η f είναι συνεχής, η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $0 \leq f \leq \chi_G$, είναι

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}m \leq \int_{\mathbb{R}} \chi_G \, \mathrm{d}m = m(G)$$

και επομένως

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}m : \, 0 \leq f \leq \chi_G \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής} \right\} \leq m(G) \, .$$

Για να αποδείξουμε την ισότητα θεωρούμε την ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων (f_n) με

$$f_n(x) = \left(\frac{d(x, G^c)}{1 + d(x, G^c)} \right)^{1/n} \, .$$

Για $x \in G^c$ είναι $d(x, G^c) = 0$. Επειδή το G^c είναι κλειστό σύνολο, για $x \in G$ είναι $d(x, G^c) > 0$ και κατά συνέπεια

$$0 < \frac{d(x, G^c)}{1 + d(x, G^c)} < 1 \, .$$

Επομένως η (f_n) είναι αύξουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με $0 \leq f_n \leq \chi_G$ και τέτοια ώστε

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in G, \\ 0 & \text{αν } x \in G^c \, . \end{cases}$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}m &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to \infty} f_n \, \mathrm{d}m \\ &= \int_G \lim_{n \to \infty} f_n \, \mathrm{d}m + \int_{G^c} \lim_{n \to \infty} f_n \, \mathrm{d}m \\ &= \int_G 1 \, \mathrm{d}m + \int_{G^c} 0 \, \mathrm{d}m = m(G) \, . \end{aligned}$$

Άρα

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}m : \, 0 \leq f \leq \chi_G \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής} \right\} = m(G) \, .$$

(β΄) Επειδή $f \geq \chi_F$, είναι

$$\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}m \geq \int_{\mathbb{R}} \chi_F \,\mathrm{d}m = m(F)$$

και επομένως

$$\inf\left\{\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}m : \ f \geq \chi_F \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής}\right\} \geq m(F)\,.$$

Για να αποδείξουμε την ισότητα αρκεί να υποθέσουμε ότι $m(F) < \infty$. Ως γνωστόν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο $G \supset F$ τέτοιο ώστε $m(G) < m(F) + \varepsilon$. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση

$$g(x) := \frac{d(x, G^c)}{d(x, G^c) + d(x, F)}\ .$$

Επειδή τα σύνολα G^c και F είναι κλειστά, για $x \in G$ είναι $d(x, G^c) > 0$ και για $x \in F^c$ είναι $d(x, F) > 0$. Κατά συνέπεια για $x \in G$ είναι $0 < g(x) \leq 1$ και για $x \in G^c$ είναι $g(x) = 0$. Επομένως για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση g με $g \geq \chi_F$ και

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}m &= \int_G g \,\mathrm{d}m + \int_{G^c} g \,\mathrm{d}m \\
&= \int_G g \,\mathrm{d}m \\
&\leq \int_G 1 \,\mathrm{d}m = m(G) < m(F) + \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\inf\left\{\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}m : f \geq \chi_F \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής}\right\} = m(F)\,.$$

■

3η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$. Αν υπάρχει συνάρτηση $g \in L_1(E)$, τέτοια ώστε $f_n(x) \geq g(x)$, $\sigma.\pi.$ στο E και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε
$$\int_E \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}m \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m\,.$$

Λύση. Αν $E_1 := \{x \in E : f_n(x) \geq g(x) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\}$, τότε $m(E \setminus E_1) = 0$. Η $(f_n - g)$ είναι μία ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο E_1 και από το λήμμα Fatou έχουμε

$$\int_{E_1} \liminf (f_n - g)\,\mathrm{d}m \leq \liminf \int_{E_1} (f_n - g)\,\mathrm{d}m\,.$$

Για κάθε $x \in E_1$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι $f_n(x) \geq g(x)$, οπότε και $\liminf f_n(x) \geq g(x)$. Επειδή η $g \in L_1(E_1)$, από γνωστή πρόταση

$$\begin{aligned}\int_{E_1} \liminf f_n \,\mathrm{d}m - \int_{E_1} g\,\mathrm{d}m &= \int_{E_1} (\liminf f_n - g)\;\mathrm{d}m \\ &= \int_{E_1} \liminf\,(f_n - g)\;\mathrm{d}m \\ &\leq \liminf \int_{E_1} (f_n - g)\;\mathrm{d}m \\ &= \liminf \int_{E_1} f_n\,\mathrm{d}m - \int_{E_1} g\,\mathrm{d}m\,.\end{aligned}$$

Όμως $\int_{E_1} g\,\mathrm{d}m < \infty$ και η παραπάνω ανισότητα συνεπάγεται ότι

$$\int_{E_1} \liminf f_n \,\mathrm{d}m \leq \liminf \int_{E_1} f_n\,\mathrm{d}m\,.$$

Επειδή $m(E \setminus E_1) = 0$, είναι $\int_{E\setminus E_1} \liminf f_n\,\mathrm{d}m = 0 = \int_{E\setminus E_1} f_n\,\mathrm{d}m$. Η υπόθεση $f_n(x) \geq g(x)$, $\sigma.\pi.$ στο E, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ συνεπάγεται ότι $\liminf f_n(x) \geq g(x)$, $\sigma.\pi.$, με $g \in L_1(E)$. Τότε όμως τα ολοκληρώματα

$\int_E f_n \,\mathrm{d}m$ και $\int_E \liminf f_n \,\mathrm{d}m$ υπάρχουν (γιατί;) και επομένως

$$\begin{aligned}
\int_E \liminf f_n \,\mathrm{d}m &= \int_{E_1} \liminf f_n \,\mathrm{d}m + \int_{E\setminus E_1} \liminf f_n \,\mathrm{d}m \\
&= \int_{E_1} \liminf f_n \,\mathrm{d}m \\
&\leq \liminf \int_{E_1} f_n \,\mathrm{d}m \\
&= \liminf \left(\int_{E_1} f_n \,\mathrm{d}m + \int_{E\setminus E_1} f_n \,\mathrm{d}m \right) \\
&= \liminf \int_E f_n \,\mathrm{d}m \,.
\end{aligned}$$

■

2. Έστω (f_n) είναι ακολουθία μη-αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων που ορίζονται στο μετρήσιμο σύνολο E. Αν $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ και $f_n(x) \leq f(x)$ $\sigma.\pi.$ στο E, δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m = \int_E f \,\mathrm{d}m$.

Λύση. Αν $\int_E f \,\mathrm{d}m = +\infty$, από το Λήμμα του Fatou

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m \geq \int_E f \,\mathrm{d}m = +\infty$$

και επομένως $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m = +\infty$. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m = \int_E f \,\mathrm{d}m \,.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $\int_E f \,\mathrm{d}m < \infty$, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue αποδεικνύει το ζητούμενο. Μπορούμε όμως να εργαστούμε και ως εξής:
Και πάλι από το Λήμμα Fatou

$$\int_E f \,\mathrm{d}m \geq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m \geq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m \geq \int_E f \,\mathrm{d}m$$

και επομένως $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m = \int_E f \,\mathrm{d}m$. ■

3. (α΄) Αν $n \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι $0 < \dfrac{1-(1-t/n)^n}{t} \leq 1$, για κάθε $t \in (0,1]$ και $0 \leq \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t}$, για κάθε $t \in [0,n]$.

(β΄) Αν

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{t}\left[1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \mathrm{d}t \quad \text{και} \quad J_n = \int_1^n \frac{1}{t}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t,$$

δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} J_n = \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(γ΄) Δείξτε ότι

$$I_n - J_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left[1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \mathrm{d}t - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Να συμπεράνετε ότι

$$\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-1/t}}{t}\,\mathrm{d}t = \gamma,$$

όπου $\gamma = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \ln n)$ είναι **η σταθερά του Euler** ($\gamma = 0,577215\ldots$).

Λύση.

(α΄) Η $h_n(t) := (1-t/n)^n$ είναι αύξουσα για $t \leq n$. Πράγματι, από τη γνωστή ανισότητα $(1+x)^a \geq 1 + ax$, η οποία ισχύει αν $x \geq -1$ και $a \geq 1$, για $x = -t/(n+1)$ και $a = (n+1)/n$ έχουμε

$$\left(1 - \frac{t}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} \geq 1 - \frac{t}{n} \Longleftrightarrow \left(1 - \frac{t}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

Ειδικά $(1-t/n)^n \geq 1 - t$, για κάθε $t \leq n$, και επομένως

$$0 < \frac{1-(1-t/n)^n}{t} \leq 1, \quad \text{για κάθε } t \in (0,1].$$

Επειδή $\mathrm{e}^{-t/n} \geq 1 - t/n$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, είναι $0 \leq (1-t/n)^n \leq \mathrm{e}^{-t}$, για κάθε $t \in [0,n]$.

(β΄) Αν

$$f_n(t) := \frac{1-(1-t/n)^n}{t},$$

είναι $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$ και από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Αν

$$g_n(t) := \frac{(1-t/n)^n}{t}\chi_{[1,\,n]}(t),$$

τότε $\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ και $g_n(t) < \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή $\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \le \mathrm{e}^{-t}$, για κάθε $t \ge 1$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ θα συγκλίνει.

Επομένως η $g(t) := \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \in L_1[1,\infty)$ και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue είναι

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} J_n &= \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{(1-t/n)^n\chi_{[1,\,n]}(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_1^\infty \lim_{n\to\infty}\frac{(1-t/n)^n\chi_{[1,\,n]}(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(γ΄) Είναι

$$
\begin{aligned}
I_n - J_n &= \int_0^n \frac{1}{t}\left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] \mathrm{d}t - \int_1^n \frac{1}{t}\left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] \mathrm{d}t \\
&\quad - \int_1^n \frac{1}{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t \\
&= \int_0^n \frac{1}{t}\left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] \mathrm{d}t - \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^n \frac{1}{t}\left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] \mathrm{d}t - \ln n \\
&= \int_0^1 \frac{1-s^n}{1-s}\,\mathrm{d}s - \ln n \qquad (\text{αντικατάσταση } t = n\,(1-s)) \\
&= \int_0^1 \left[1+s+s^2+\cdots+s^{n-1}\right] \mathrm{d}s - \ln n \\
&= 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \ln n\,.
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \lim_{n\to\infty}\left(1+1/2+\cdots+1/n-\ln n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} I_n - \lim_{n\to\infty} J_n \\
&= \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1/s}}{s}\,\mathrm{d}t \qquad (\text{αντικατάσταση } t = 1/s) \\
&= \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-1/t}}{t}\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}
$$

■

4. Να βρεθεί η μικρότερη σταθερά c, τέτοια ώστε

$$\ln(1+\mathrm{e}^t) < c + t\,, \quad \text{για κάθε } t > 0.$$

Υπάρχει το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left(1+\mathrm{e}^{nf(x)}\right) \mathrm{d}x$$

για κάθε πραγματική συνάρτηση $f \in L_1[0,1]$; Αν υπάρχει να υπολογιστεί.

Λύση. Αν υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $\ln(1+\mathrm{e}^t) < c+t$ για κάθε $t>0$, τότε $\lim_{t\to 0^+} \ln(1+\mathrm{e}^t) \le \lim_{t\to 0^+}(c+t)$ και ισοδύναμα $\ln 2 \le c$. Όμως για $g(t) := \ln(1+\mathrm{e}^t) - t$, είναι $g'(t) = -1/(1+\mathrm{e}^t) < 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επομένως,

$$g(t) < g(0) \Leftrightarrow \ln(1+\mathrm{e}^t) < \ln 2 + t\,, \quad \text{για κάθε } t > 0\,.$$

Άρα, η μικρότερη σταθερά $c = \ln 2$.

Έστω

$$f_n(x) := \frac{\ln(1+\mathrm{e}^{nf(x)})}{n}\,.$$

Αν $f(x) > 0$, τότε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\mathrm{e}^{nf(x)})}{n} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(1+\mathrm{e}^{tf(x)})}{t} \\
&= f(x) \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{tf(x)}}{1+\mathrm{e}^{tf(x)}} && \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

και αν $f(x) \le 0$, τότε προφανώς $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \max\{f(x),\, 0\} = f^+(x)\,.$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{nf(x)}\right)}{n} < \frac{\ln 2}{n} + f(x) \le \ln 2 + f(x)\,, \quad \text{αν} \quad f(x) > 0$$

και

$$\frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{nf(x)}\right)}{n} \le \frac{\ln 2}{n} \le \ln 2\,, \quad \text{αν } f(x) \le 0\,,$$

είναι $f_n(x) \le g(x)$, όπου $g(x) := \ln 2 + |f(x)| \in L_1[0,1]$. Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \ln\left(1+\mathrm{e}^{nf(x)}\right) \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f^+(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

■

5. Έστω $f : E \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}$, Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $a \in \mathbb{R}$.

(α΄) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\chi_A(x+a) = \chi_{A-a}(x)\,, \quad \chi_A(ax) = \chi_{a^{-1}A}(x)\,, \quad a \neq 0.$$

(β΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\int_E f(x+a)\,\mathrm{d}m(x) = \int_{a+E} f(x)\,\mathrm{d}m(x)$$

και

$$\int_E f(ax)\,\mathrm{d}m(x) = \frac{1}{|a|}\int_{aE} f(x)\,\mathrm{d}m(x)\,, \quad a \neq 0.$$

Υπόδειξη. Να θεωρήσετε πρώτα την περίπτωση $f = \chi_A$. Είναι

$$A \cap (a+E) = a + (A-a) \cap E$$

και

$$A \cap aE = a\left((a^{-1}A) \cap E\right)\,, \quad a \neq 0\,.$$

Απόδειξη. (α΄) Είναι

$$\chi_A(x+a) = 1 \Leftrightarrow x+a \in A \Leftrightarrow x \in A-a \Leftrightarrow \chi_{A-a}(x) = 1$$

και επομένως $\chi_A(x+a) = \chi_{A-a}(x)$. Αν $a \neq 0$, τότε

$$\chi_A(ax) = 1 \Leftrightarrow ax \in A \Leftrightarrow a^{-1}(ax) \in a^{-1}A \Leftrightarrow x \in a^{-1}A$$

$$\Leftrightarrow \chi_{a^{-1}A}(x) = 1\,,$$

δηλαδή $\chi_A(ax) = \chi_{a^{-1}A}(x)$.

(β΄) Αν $f = \chi_A$, χρησιμοποιώντας την (α΄) έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_E \chi_A(x+a)\,\mathrm{d}m(x) &= \int_E \chi_{A-a}(x)\,\mathrm{d}m(x) \\
&= m\left((A-a)\cap E\right) \\
&= m\left(a + (A-a)\cap E\right) \\
&= m\left(A \cap (a+E)\right) \\
&= \int_{a+E} \chi_A(x)\,\mathrm{d}m(x)
\end{aligned}$$

και για $a \neq 0$

$$\begin{aligned}
\int_E \chi_A(ax)\,\mathrm{d}m(x) &= \int_E \chi_{a^{-1}A}(x)\,\mathrm{d}m(x) \\
&= m\left((a^{-1}A)\cap E\right) \\
&= \frac{1}{|a|} m\left(a\left((a^{-1}A)\cap E\right)\right) \\
&= \frac{1}{|a|} m\left(A \cap aE\right) \\
&= \frac{1}{|a|}\int_{aE} \chi_A(x)\,\mathrm{d}m(x).
\end{aligned}$$

Όμως κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση s είναι γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων, οπότε

$$\int_E s(x+a)\,\mathrm{d}m(x) = \int_{a+E} s(x)\,\mathrm{d}m(x)$$

και για $a \neq 0$

$$\int_E s(ax)\,\mathrm{d}m(x) = \frac{1}{|a|}\int_{aE} s(x)\,\mathrm{d}m(x).$$

Ως γνωστόν υπάρχει ακολουθία (s_n) μη αρνητικών απλών συναρτήσεων, με $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ και $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f^+(x)$, για κάθε $x \in a+E$.

Ισοδύναμα, είναι $s_n(x+a) \leq s_{n+1}(x+a)$ και $\lim_{n\to\infty} s_n(x+a) = f^+(x+a)$, για κάθε $x \in E$. Επομένως, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης

$$\begin{aligned}\int_E f^+(x+a)\,\mathrm{d}m(x) &= \lim_{n\to\infty}\int_E s_n(x+a)\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{a+E} s_n(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_{a+E} f^+(x)\,\mathrm{d}m(x)\end{aligned}$$

και παρόμοια

$$\int_E f^-(x+a)\,\mathrm{d}m(x) = \int_{a+E} f^-(x)\,\mathrm{d}m(x)\,.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\int_E f(x+a)\,\mathrm{d}m(x) &= \int_E f^+(x+a)\,\mathrm{d}m(x) - \int_E f^-(x+a)\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_{a+E} f^+(x)\,\mathrm{d}m(x) - \int_{a+E} f^-(x)\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_{a+E} f(x)\,\mathrm{d}m(x)\,.\end{aligned}$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ο δεύτερος τύπος.

□

6. (α΄) Υποθέτουμε ότι η Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$, τέτοια ώστε $\int_0^T |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T \left|n^{-2}f(nx)\right|\,\mathrm{d}x < \infty$$

και στη συνέχεια ότι $\lim_{n\to\infty} n^{-2}f(nx) = 0$ σχεδόν παντού.

(β΄) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (\ln|\cos x|)^2$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,\pi]$ και να συμπεράνετε ότι $\lim_{n\to\infty} |\cos(nx)|^{1/n} = 1$ σχεδόν παντού.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Να συγκρίνετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\pi (\ln|\cos x|)^2\,\mathrm{d}x$ με το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\pi (\ln|x-\pi/2|)^2\,\mathrm{d}x$

Απόδειξη. (α΄) Επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$, είναι $f\left(x-(k-1)T\right) = f(x)$, $k \in \mathbb{N}^*$ και από την προηγούμενη άσκηση έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\,T]} \left|n^{-2} f(nx)\right| \,\mathrm{d}m(x) &= \frac{1}{n^3}\int_{[0,\,nT]} |f(x)| \,\mathrm{d}m(x) \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\int_{[(k-1)T,\,kT]} |f(x)| \,\mathrm{d}m(x) \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\int_{[(k-1)T,\,kT]} \left|f\left(x-(k-1)T\right)\right| \,\mathrm{d}m(x) \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\int_{[0,\,T]} |f(x)| \,\mathrm{d}m(x) \\
&= \frac{1}{n^2}\int_{[0,\,T]} |f(x)| \,\mathrm{d}m(x)\,.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,\,T]} \left|n^{-2} f(nx)\right| \,\mathrm{d}m(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_{[0,\,T]} |f(x)| \,\mathrm{d}m(x) < \infty\,.$$

Άρα, από το θεώρημα B. Levi η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} f(nx)$ συγκλίνει σχεδόν παντού και κατά συνέπεια το όριο $\lim_{n\to\infty} n^{-2} f(nx) = 0$ σχεδόν παντού.

(β΄) Για να αποδείξουμε ότι η π-περιοδική συνάρτηση $f(x) = (\ln|\cos x|)^2$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,\pi]$, από γνωστή πρόταση αρκεί να αποδείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} (\ln|\cos x|)^2 \,\mathrm{d}x$ συγκλίνει. Αν αποδείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} (\ln|\cos x|)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\ln\cos x)^2 \,\mathrm{d}x$$

συγκλίνει, επειδή $\int_{\pi}^{\pi/2} (\ln|\cos x|)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\ln|\cos x|)^2 \,\mathrm{d}x$, τότε και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} (\ln|\cos x|)^2 \,\mathrm{d}x$ θα συγκλίνει. Όμως για $0 < 2\lambda < 1$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-2\lambda} \mathrm{d}x$$

συγκλίνει και

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{\ln\cos x}{(\pi/2-x)^{-\lambda}}\right)^2=0\,. \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}$$

Άρα, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης για γενικευμένα ολοκληρώματα το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2}(\ln|\cos x|)^2\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει. Εφαρμόζοντας το (α΄) έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2}f(nx)=\lim_{n\to\infty} n^{-2}\left(\ln|\cos(nx)|\right)^2=0 \quad \sigma.\pi.$$

που συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln|\cos(nx)|=0$ $\sigma.\pi.$ Άρα,

$$\lim_{n\to\infty}|\cos(nx)|^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{n^{-1}\ln|\cos(nx)|}=1 \quad \sigma.\pi.$$

□

7. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,2\pi]$ και έστω $p\in\mathbb{N}^*$. Αν (k_n) είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και (a_n) είναι μια οποιαδήποτε πραγματική ακολουθία, να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$\cos^{2p}t=2^{-2p}\binom{2p}{p}+2^{1-2p}\sum_{j=1}^{p}\binom{2p}{p-j}\cos 2jt$$

και να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n\to\infty}\int_E\cos^{2p}(k_nx+a_n)\,\mathrm{d}m(x)$.

Λύση. Επειδή

$$\cos^{2p}t=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}\right)^{2p}=2^{-2p}\sum_{j=0}^{2p}\binom{2p}{j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2p-j)t}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}jt}\,,$$

είναι

$$\begin{aligned}
\cos^{2p} t &= 2^{-2p}\left[\binom{2p}{0}\mathrm{e}^{2p\mathrm{i}t} + \binom{2p}{2p}\mathrm{e}^{-2p\mathrm{i}t}\right] \\
&\quad + 2^{-2p}\left[\binom{2p}{1}\mathrm{e}^{2(p-1)\mathrm{i}t} + \binom{2p}{2p-1}\mathrm{e}^{-2(p-1)\mathrm{i}t}\right] \\
&\quad + \cdots + 2^{-2p}\left[\binom{2p}{p-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + \binom{2p}{p+1}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\right] + 2^{-2p}\binom{2p}{p} \\
&= 2^{-2p}\left\{2\binom{2p}{0}\cos 2pt + 2\binom{2p}{1}\cos 2(p-1)t\right. \\
&\quad \left. + \cdots + 2\binom{2p}{p-1}\cos 2t + \binom{2p}{p}\right\} \\
&= 2^{-2p}\binom{2p}{p} + 2^{1-2p}\sum_{j=1}^{p}\binom{2p}{p-j}\cos 2jt\,.
\end{aligned}$$

Αν $b_p := 2^{1-2p}$, τότε

$$\begin{aligned}
&\int_E \cos^{2p}(k_n x + a_n)\,\mathrm{d}m(x) \\
&= \int_E \left[2^{-2p}\binom{2p}{p} + b_p\sum_{j=1}^{p}\binom{2p}{p-j}\cos 2j\,(k_n x + a_n)\right]\mathrm{d}m(x) \\
&= 2^{-2p}\binom{2p}{p}m(E) + b_p\sum_{j=1}^{p}\binom{2p}{p-j}\int_E \cos 2j\,(k_n x + a_n)\,\mathrm{d}m(x) \\
&= 2^{-2p}\binom{2p}{p}m(E) + b_p\sum_{j=1}^{p}\binom{2p}{p-j}\cos 2ja_n \cdot \int_E \cos(2jk_n x)\,\mathrm{d}m(x) \\
&\quad - b_p\sum_{j=1}^{p}\binom{2p}{p-j}\sin 2ja_n \cdot \int_E \sin(2jk_n x)\,\mathrm{d}m(x) \\
&= 2^{-2p}\binom{2p}{p}m(E) + b_p\sum_{j=1}^{p}\binom{2p}{p-j}\cos 2ja_n \cdot \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\cos(2jk_n x)\,\mathrm{d}m(x) \\
&\quad - b_p\sum_{j=1}^{p}\binom{2p}{p-j}\sin 2ja_n \cdot \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\sin(2jk_n x)\,\mathrm{d}m(x)\,.
\end{aligned}$$

Άρα, από το λήμμα Riemann–Lebesgue έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \cos^{2p}\left(k_n x + a_n\right)\, \mathrm{d}m(x) = 2^{-2p}\binom{2p}{p} m(E)\,.$$

■

4.12 Ακαδημαϊκό έτος 2003–4

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
1η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. Έστω (μ_n) αύξουσα ακολουθία θετικών μέτρων στη σ-άλγεβρα Σ του συνόλου X, δηλαδή $\mu_n(A) \le \mu_{n+1}(A)$ για κάθε $A \in \Sigma$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Αν $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ με $\mu(A) := \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \{\mu_n(A)\}$, δείξτε ότι το μ είναι ένα θετικό μέτρο.

   Λύση. Από τον ορισμό του μ είναι προφανές ότι $\mu(\emptyset) = 0$ και $\mu(E_1) \le \mu(E_2)$, για κάθε $E_1, E_2 \in \Sigma$ με $E_1 \subseteq E_2$. Αν (A_k) είναι μία ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων της σ-άλγεβρας Σ, τότε $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A \in \Sigma$. Επειδή κάθε μ_n είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα Σ, θα είναι

$$\mu_n(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

   και επομένως $\mu(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Όμως για κάθε $N \in \mathbb{N}^*$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu_n(A_k) = \lim_{n\to\infty} \mu_n\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) \le \mu(A)\,,$$

   οπότε $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \le \mu(A)$. Άρα $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. ■

2. Αν $E \subseteq \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι $m^*(E) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$, όπου το infimum το παίρνουμε πάνω σε όλα τα καλύμματα του E από αριθμήσιμες ενώσεις ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων I_n.

   Λύση. Αν (I_n) είναι ακολουθία ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων, από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου Lebesgue m^* θα είναι

$$m^*(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)\,. \tag{4.7}$$

   Αν $m^*(E) = \infty$, τότε έχουμε ισότητα στην (4.7). Υποθέτουμε λοιπόν ότι $m^*(E) < \infty$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία (J_k) ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων, με $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$, τέτοια ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k) < m^*(E) + \varepsilon .$$

Επειδή το $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ είναι ανοικτό σύνολο, θα είναι $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n' \supseteq E$, όπου (I_n') είναι ακολουθία ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων ξένων ανά δύο. Επειδή ως γνωστόν $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n') \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k)$, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n') \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k) < m^*(E) + \varepsilon . \tag{4.8}$$

Οι (4.7) και (4.8) αποδεικνύουν την άσκηση. ■

3. Να κατασκευάσετε ένα υποσύνολο A του $[0,1]$, με τον ίδιο τρόπο που κατασκευάζεται το τριαδικό σύνολο Cantor, αφαιρώντας όμως από κάθε διάστημα που απομένει ένα ανοικτό υποδιάστημα που έχει το ίδιο μέσο με το διάστημα και του οποίου το μήκος είναι θ-φορές το μήκος του διαστήματος, $0 < \theta < 1$. Δείξτε ότι $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, όπου $m(A_k) = (1-\theta)^k$ και να συμπεράνετε ότι $m(A) = 0$.

Λύση. Έστω A_1 είναι το σύνολο που απομένει αφαιρώντας από το μέσο $1/2$ του διαστήματος $[0,1]$ το ανοικτό διάστημα $((1-\theta)/2,\, (1+\theta)/2)$ μήκους θ. Τότε $m(A_1) = 1 - \theta$. Το A_1 αποτελείται από δύο κλειστά υποδιαστήματα του $[0,1]$ ξένα μεταξύ τους, καθένα από τα οποία έχει μήκος $(1-\theta)/2$. Αφαιρούμε στη συνέχεια από κάθε κλειστό διάστημα ένα ανοικτό υποδιάστημα που έχει το ίδιο μέσο με το διάστημα και του οποίου το μήκος είναι $\frac{1-\theta}{2}\theta$. Έστω A_2 είναι το σύνολο που απομένει. Τότε $m(A_2) = (1-\theta) - (1-\theta)\theta = (1-\theta)^2$. Το A_2 αποτελείται από 2^2 κλειστά υποδιαστήματα του $[0,1]$ ξένα ανά δύο, καθένα από τα οποία έχει μήκος $(1-\theta)^2/2^2$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το A_{k-1} αποτελείται από 2^{k-1} κλειστά υποδιαστήματα του $[0,1]$ ξένα ανά δύο, καθένα από τα οποία έχει μήκος $(1-\theta)^{k-1}/2^{k-1}$ και επομένως $m(A_{k-1}) = (1-\theta)^{k-1}$. Αφαιρούμε στη συνέχεια από κάθε κλειστό διάστημα ένα ανοικτό υποδιάστημα που έχει το ίδιο μέσο με το διάστημα και του οποίου το μήκος είναι $\theta(1-\theta)^{k-1}/2^{k-1}$. Έστω A_k είναι το σύνολο που απομένει. Τότε

$$m(A_k) = (1-\theta)^{k-1} - (1-\theta)^{k-1}\theta = (1-\theta)^k\,.$$

Αν $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, τότε το A είναι συμπαγές επειδή είναι τομή συμπαγών συνόλων. Επίσης, επειδή $A \subset A_k$, $k \in \mathbb{N}^*$, έχουμε

$$m(A) \le m(A_k) = (1-\theta)^k \to 0\,, \text{ καθώς το } k \to \infty\,.$$

Επομένως $m(A) = 0$. ■

4. Έστω A και B δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

(α΄) Αν το $G \subset \mathbb{R}$ είναι ανοικτό σύνολο τέτοιο ώστε $A \subseteq G$ και $B \cap G = \emptyset$, δείξτε ότι

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)\,.$$

(β΄) Υποθέτουμε ότι τα A και B έχουν θετική απόσταση, δηλαδή,

$$d(A,B) := \inf\{|x-y| : x \in A,\, y \in B\} > 0\,.$$

Τότε

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)\,.$$

Λύση.

(α΄) Επειδή το G είναι Lebesgue μετρήσιμο, από τον ορισμό της μετρησιμότητας κατά Καραθεοδωρή έχουμε

$$\begin{aligned} m^*(A \cup B) &= m^*((A \cup B) \cap G) + m^*((A \cup B) \cap G^c) \\ &= m^*((A \cap G) \cup (B \cap G)) + m^*((A \cap G^c) \cup (B \cap G^c)) \\ &= m^*(A) + m^*(B)\,. \end{aligned}$$

(β΄) Έστω $d(A,B) = \delta > 0$. Ορίζουμε το ανοικτό σύνολο

$$G := \bigcup_{x \in A} \left(x - \frac{\delta}{2},\, x + \frac{\delta}{2}\right)\,.$$

Είναι $A \subseteq G$ και από τον ορισμό του δ θα είναι $B \cap G = \emptyset$. Πράγματι, αν $y \in B \cap G$ τότε από τον ορισμό του G το $y \in \left(x - \frac{\delta}{2},\, x + \frac{\delta}{2}\right)$, για κάποιο $x \in A$. Ισοδύναμα, $|x - y| < \frac{\delta}{2}$ για $x \in A$ και $y \in B$ που είναι άτοπο. Η απόδειξη τώρα της (β') προκύπτει από την (α').

■

5. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο G πυκνό στο $\mathbb{R}$ και τέτοιο ώστε $m(G) < \varepsilon$.

Λύση. Έστω (r_n) η ακολουθία των ρητών αριθμών και έστω

$$I_n := \left(r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\, ,\, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)\, , \quad n \in \mathbb{N}^*\, .$$

Αν $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, το G είναι ανοικτό σύνολο και πυκνό στο $\mathbb{R}$ (επειδή περιέχει όλους τους ρητούς). Επίσης

$$m(G) \le \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon\, .$$

■

6. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, αν και μόνο αν

$$m^*\left([a,b]\right) = m^*\left([a,b] \cap E\right) + m^*\left([a,b] \cap E^c\right)\, , \tag{4.9}$$

για κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$.

Απόδειξη. Ως γνωστόν το σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν

$$m^*(A) = m^*\left(A \cap E\right) + m^*\left(A \cap E^c\right)\, , \tag{4.10}$$

για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$. Αν το E είναι Lebesgue μετρήσιμο, τότε η (4.9) προκύπτει από την (4.10) παίρνοντας $A = [a,b]$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η (4.9) ισχύει για κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα $A = [a,b]$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$m^*(A) \ge m^*\left(A \cap E\right) + m^*\left(A \cap E^c\right)\, , \tag{4.11}$$

για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$. Επειδή η (4.11) ισχύει στην περίπτωση που είναι $m^*(A) = \infty$, υποθέτουμε ότι $m^*(A) < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τις ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου Lebesgue, υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια κλειστών και φραγμένων διαστημάτων $([a_n, b_n])$ τέτοια ώστε $\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \supseteq A$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^*\left([a_n, b_n]\right) < m^*(A) + \varepsilon\,.$$

Είναι $\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \cap E \supseteq A \cap E$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \cap E^c \supseteq A \cap E^c$, οπότε

$$\begin{aligned}
m^*(A) + \varepsilon &> \sum_{n=1}^{\infty} m^*\left([a_n, b_n]\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m^*\left([a_n, b_n] \cap E\right) + \sum_{n=1}^{\infty} m^*\left([a_n, b_n] \cap E^c\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(από την (4.9))} \\
&\geq m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left([a_n, b_n] \cap E\right)\right) + m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left([a_n, b_n] \cap E^c\right)\right) \\
&\geq m^*\left(A \cap E\right) + m^*\left(A \cap E^c\right)\,.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$m^*(A) + \varepsilon > m^*\left(A \cap E\right) + m^*\left(A \cap E^c\right)\,,$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ και αυτό αποδεικνύει την (4.11). □

7. Υποθέτουμε ότι $E \in \mathcal{M}$, δηλαδή το σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

   (α΄) Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} m\left(E \cap (-n, n)\right) = m(E)$.

   (β΄) Αν $m(E) < \infty$, δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} m\left(E \setminus (-n, n)\right) = 0$.
   Δώστε ένα παράδειγμα συνόλου $E \in \mathcal{M}$ με $m(E) = \infty$, τέτοιο ώστε $\lim_{n\to\infty} m\left(E \setminus (-n, n)\right) \neq 0$.

Λύση.

(α΄) Αν $E_n := E \cap (-n,n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, τότε $E_n \subseteq E_{n+1}$, $E_n \in \mathcal{M}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Από γνωστή ιδιότητα του μέτρου

$$\lim_{n\to\infty} m\left(E \cap (-n,n)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m(E)\,.$$

(β΄) Αν $F_n := E \setminus (-n,n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, τότε $F_n \supseteq F_{n+1}$, $F_n \in \mathcal{M}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ και $m(F_1) \le m(E) < \infty$. Επομένως από γνωστή ιδιότητα του μέτρου

$$\lim_{n\to\infty} m\left(E \setminus (-n,n)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = m(\emptyset) = 0\,.$$

Αν τώρα $E = \mathbb{R} \in \mathcal{M}$, τότε $m(E) = \infty$ και $m\left(\mathbb{R} \setminus (-n,n)\right) = \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\mathbb{R} \setminus (-n,n)\right) = \infty \neq 0\,.$$

■

8. Υποθέτουμε ότι το Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ είναι τέτοιο ώστε

$$m\left(A \cap (a,b)\right) \le \frac{b-a}{2}\,,$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Δείξτε ότι $m(A) = 0$.

Λύση. Έστω ότι $m(A) \neq 0$. Από την άσκηση 7(α΄) έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} m\left(A \cap (-n,n)\right) = m(A) \neq 0$$

και επομένως υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$ με $m\left(A \cap (-n,n)\right) \neq 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από γνωστή πρόταση υπάρχει ανοικτό σύνολο G με $A \cap (-n,n) \subseteq G$ και

$$m(G) < m\left(A \cap (-n,n)\right) + \varepsilon\,. \tag{4.12}$$

Επειδή $m(G) < \infty$, το ανοικτό σύνολο $G = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$, όπου $(a_k,\, b_k)$ ξένα ανά δύο ανοικτά και φραγμένα διαστήματα. Είναι

$$A \cap (-n,n) \subseteq A \cap G = \bigcup_{k=1}^{\infty} A \cap (a_k, b_k)\,,$$

όπου $(A \cap (a_k, b_k))$ είναι μια αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. Τότε

$$\begin{aligned} m\left(A \cap (-n, n)\right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m\left(A \cap (a_k, b_k)\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k - a_k}{2} && \text{(από την υπόθεση)} \\ &= \frac{1}{2} m(G) \\ &< \frac{1}{2}\left(m\left(A \cap (-n, n)\right) + \varepsilon\right) && \text{(από την (4.12))} \end{aligned}$$

και ισοδύναμα $m\left(A \cap (-n, n)\right) < \varepsilon$, για κάθε $\varepsilon > 0$. Επομένως

$$m\left(A \cap (-n, n)\right) = 0 \,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα, $m(A) = 0$. ■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

1. (α΄) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) := \chi_A(x) - \frac{1}{2}$, όπου το σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο. Είναι η f Lebesgue μετρήσιμη; Είναι η $|f|$ Lebesgue μετρήσιμη; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   (β΄) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη. Θεωρώντας την ακολουθία συναρτήσεων (g_n) με $g_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$, να αποδειχθεί ότι η παράγωγος f' είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Λύση.

(α΄) Ως γνωστόν η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_A είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν το σύνολο A είναι μετρήσιμο. Επομένως η συνάρτηση f δεν είναι μετρήσιμη. Επειδή

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{αν } x \in A\,, \\ -\frac{1}{2} & \text{αν } x \notin A\,, \end{cases}$$

είναι $|f(x)| = \frac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή η $|f|$ είναι σταθερή συνάρτηση και επομένως μετρήσιμη.

(β΄) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής. Επομένως η f είναι μετρήσιμη και κατά συνέπεια οι g_n είναι μετρήσιμες. Όμως

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(x)\,,$$

οπότε και η f' είναι μετρήσιμη σαν όριο ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων.

■

2. Έστω C είναι το τριαδικό σύνολο Cantor. Να αποδειχθεί ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_C είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,1]$ και ότι $\int_0^1 \chi_C(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Απόδειξη. Η χ_C είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου $[0,1]\setminus C$ και ασυνεχής σε κάθε σημείο του C. Επειδή $m(C) = 0$, από γνωστό θεώρημα η χ_C είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Επειδή $\chi_C = 0$ $\sigma.\pi.$, είναι

$$\int_0^1 \chi_C(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} \chi_C\,\mathrm{d}m = 0\,.$$

□

3. Έστω η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Αν (x_n) είναι πραγματική ακολουθία με $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$. Δηλαδή η F είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω $f_n(t) = \sin(x_n t)/(1+t^2)$, $f(t) = \sin(xt)/(1+t^2)$ και $g(t) = 1/(1+t^2)$. Τότε οι συναρτήσεις f_n, $n \geq 1$, f και g είναι συνεχείς. Είναι

$$f_n(t) \leq g(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{και} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) = \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,, \quad \text{για κάθε}\, t \geq 0\,.$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

συγκλίνει, από γνωστό θεώρημα το ολοκλήρωμα Lebesgue της g υπάρχει στο $[0,\infty)$ και είναι $\int_{[0,\infty)} g(t)\,\mathrm{d}m(t) = \int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}t = \pi/2$. Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin(x_n t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_n t)}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = F(x)\,.\end{aligned}$$

□

4. Έστω (f_n) μία φθίνουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων, με $f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty]$. Δηλαδή

$$f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \cdots \geq f_n \geq \cdots\ .$$

Αν $\int_{\mathbb{R}} f_1\,\mathrm{d}m < \infty$ και $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m\,. \tag{4.13}$$

Η (4.13) γενικά δεν ισχύει αν $\int_{\mathbb{R}} f_1\,\mathrm{d}m = \infty$.
(Θεωρείστε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[n,\,\infty)}$)

Λύση. Είναι το "θεώρημα μονότονης σύγκλισης για *φθίνουσα* ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων". Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [17].

Αν $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[n,\,\infty)}$, η (f_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων με

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\,\mathrm{d}m = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[n,\,\infty)}\,\mathrm{d}m = \infty\,.$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} f_n\,(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}m = \infty \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}m\,.$$

■

5. (α΄) Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\,\infty)} \frac{\sin\left(\mathrm{e}^x\right)}{1+nx^2}\,\mathrm{d}m(x)\,.$$

(β΄) Δείξτε ότι

$$\int_{[0,\,\infty)} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}m(x) = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Υπόδειξη. (β΄) Να αποδειχθεί ότι $\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}\,,\ \forall x > 0$. Ως γνωστόν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Λύση.

(α΄) Οι συναρτήσεις $f_n(x) = \frac{\sin(\mathrm{e}^x)}{1+nx^2}$ και $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ είναι συνεχείς με $|f_n(x)| < g(x)$ και $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, για κάθε $x > 0$. Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

συγκλίνει, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\mathrm{e}^x)}{1+nx^2}\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει απόλυτα και επομένως συγκλίνει. Τότε από γνωστό θεώρημα τα ολοκληρώματα Lebesgue των f_n και g υπάρχουν στο $[0,\infty)$ και είναι

$$\int_{[0,\,\infty)} \frac{\sin(\mathrm{e}^x)}{1+nx^2}\,\mathrm{d}m(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(\mathrm{e}^x)}{1+nx^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\int_{[0,\infty)} g(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_0^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\,\infty)} \frac{\sin(\mathrm{e}^x)}{1+nx^2}\,\mathrm{d}m(x) = \int_{[0,\,\infty)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\mathrm{e}^x)}{1+nx^2}\,\mathrm{d}m(x) = 0\,.$$

(β΄) Για κάθε $x > 0$ είναι $0 < \mathrm{e}^{-x} < 1$. Επομένως, για κάθε $x > 0$

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} = x\mathrm{e}^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{e}^{-x})^n = \sum_{n=1}^{\infty} x\mathrm{e}^{-nx}\,.$$

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = -\lim_{x\to\infty}\frac{x}{n}\mathrm{e}^{-nx} + \frac{1}{n}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\,,$$

οπότε από γνωστό θεώρημα

$$\int_{[0,\infty)} x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}m(x) = \int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\,.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\int_{[0,\,\infty)}\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}m(x) &= \int_{[0,\,\infty)}\sum_{n=1}^{\infty} x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,\,\infty)} x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.\end{aligned}$$

■

6. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$\sin x \ln x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,, \text{ με } f_n(x) = (-1)^n\frac{x^{2n+1}\ln x}{(2n+1)!}\,.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)!(2n+2)} < \infty$$

και στη συνέχεια ότι

$$\int_0^1 \sin x \ln x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(2n)}\,.$$

Λύση. Είναι $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, για κάθε $x > 0$ είναι

$$\sin x \ln x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,, \text{ με } f_n(x) = (-1)^n\frac{x^{2n+1}\ln x}{(2n+1)!}\,.$$

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 |x^{2n+1}\ln x|\,\mathrm{d}x &= -\int_0^1 x^{2n+1}\ln x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2n+2}\lim_{x\to 0^+} x^{2n+2}\ln x + \frac{1}{2n+2}\int_0^1 x^{2n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(2n+2)^2}\end{aligned}$$

και επομένως

$$\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2n+2)!(2n+2)} \ .$$

Επίσης,

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!(2n+2)} \ .$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f_n συγκλίνει απόλυτα στο $(0,1]$, από γνωστό θεώρημα η f_n είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0,1]$ και είναι

$$\int_{(0,1]} |f_n(x)|\,\mathrm{d}m(x) = \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2n+2)!(2n+2)} \, .$$

Επίσης

$$\int_{(0,1]} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!(2n+2)} \, .$$

Επομένως

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(0,1]} |f_n(x)|\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)!(2n+2)} < \infty \, .$$

Από το θεώρημα B. Levi η συνάρτηση $\sin x \ln x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$\begin{aligned}\int_{(0,1]} \sin x \ln x \,\mathrm{d}m(x) &= \int_{(0,1]} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(0,1]} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!(2n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n)}\,.\end{aligned}$$

Άρα, από γνωστό θεώρημα θα είναι και

$$\int_0^1 \sin x \ln x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n)}\,.$$

■

7. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε $\phi(0) = 1$ και $\phi, \phi' \in L_1[0,\infty)$. Αν $a > 0$, να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{\infty} \phi(ax) \sin x \,\mathrm{d}x = 1 + \int_0^{\infty} \phi'(t) \cos(t/a)\,\mathrm{d}t\,.$$

Στη συνέχεια να υπολογιστεί το όριο $\lim_{a\to 0^+} \int_0^{\infty} \phi(ax) \sin x \,\mathrm{d}x$.

Λύση. Επειδή $\phi, \phi' \in L_1[0,\infty)$, από γνωστό θεώρημα τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_0^{\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t$ και $\int_0^{\infty} \phi'(t)\,\mathrm{d}t$ συγκλίνουν απόλυτα. Ως γνωστόν $\phi(x) - \phi(0) = \int_0^x \phi'(t)\,\mathrm{d}t$ και επομένως το όριο

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 1 + \lim_{x\to\infty} \int_0^x \phi'(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^{\infty} \phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

υπάρχει. Επειδή το $\lim_{x\to\infty} \phi(x)$ υπάρχει, η σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_0^{\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x$ συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0$ (βλέπε το παρακάτω λήμμα). Επομένως

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \phi(ax) \sin x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \phi(t) \sin(t/a)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(αντικατάσταση } t = ax\text{)}\\ &= 1 - \lim_{t\to\infty} \phi(t)\cos(t/a) + \int_0^{\infty} \phi'(t)\cos(t/a)\,\mathrm{d}t\\ &\qquad\qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\ &= 1 + \int_0^{\infty} \phi'(t)\cos(t/a)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Όμως $\phi' \in L_1[0,\infty)$ και από το Λήμμα των Riemann-Lebesgue

$$\lim_{a\to 0^+}\int_0^{\infty}\phi'(t)\cos(t/a)\,\mathrm{d}t = 0$$

Επομένως $\lim_{a\to 0^+}\int_0^{\infty}\phi(ax)\sin x\,\mathrm{d}x = 1$.

Λήμμα. Υποθέτουμε ότι η $\phi : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[a,\infty)$. Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{\infty}\phi(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει και το όριο $\lim_{x\to\infty}\phi(x)$ υπάρχει, τότε $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = 0$.

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = \lambda$, με $\lambda \neq 0$. Τότε υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|\phi(x) - \lambda| < |\lambda|/2$, $\forall x \geq M$. Ισοδύναμα,

$$\lambda - |\lambda|/2 < \phi(x) < \lambda + |\lambda|/2\,, \quad \forall x \geq M\,.$$

Αν $\lambda > 0$, τότε $\phi(x) > \lambda/2$, $\forall x \geq M$ και επομένως

$$\lim_{r\to\infty}\int_M^{r}\phi(x)\,\mathrm{d}x \geq \lim_{r\to\infty}\frac{\lambda}{2}(r-M) = \infty\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Παρόμοια, αν $\lambda < 0$, τότε $\phi(x) < \lambda/2$, $\forall x \geq M$ και επομένως

$$\lim_{r\to\infty}\int_M^{r}\phi(x)\,\mathrm{d}x \leq \lim_{r\to\infty}\frac{\lambda}{2}(r-M) = -\infty\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα, $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = 0$. □

Σημείωση. Γενικά, η σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_a^{\infty}\phi(x)\,\mathrm{d}x$ δεν συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = 0$. Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα Fresnel:

$$\int_0^{\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

συγκλίνουν. Όμως τα όρια $\lim_{x\to\infty}\sin x^2$ και $\lim_{x\to\infty}\cos x^2$ δεν υπάρχουν. ■

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση και

$$E_k = \{x \in E : 2^k < |f(x)| \le 2^{k+1}\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

όπου $E \in \mathcal{M}$.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k \chi_{E_k}(x) \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(x)| \chi_{E_k}(x) \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k+1} \chi_{E_k}(x).$$

(β΄) Να αποδειχθεί ότι $f \in L_1(E)$ αν και μόνο αν $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(E_k) < \infty$.

Απόδειξη. (α΄) Επειδή η $|f|$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, τα σύνολα E_k, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο. Είναι

$$2^k \chi_{E_k}(x) \le |f(x)| \chi_{E_k}(x) \le 2^{k+1} \chi_{E_k}(x),$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και επομένως

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k \chi_{E_k}(x) \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, \chi_{E_k}(x) \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k+1} \chi_{E_k}(x).$$

(β΄) Είναι $E = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} E_k$, όπου τα σύνολα E_k είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο. Από γνωστά θεωρήματα

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|\, \mathrm{d}m(x) &= \int_{\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} E_k} |f(x)|\, \mathrm{d}m(x) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{E_k} |f(x)|\, \mathrm{d}m(x) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_E |f(x)| \chi_{E_k}(x)\, \mathrm{d}m(x) \\
&= \int_E \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(x)| \chi_{E_k}(x)\, \mathrm{d}m(x).
\end{aligned}$$

Όμως

$$\int_E \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k \chi_{E_k}(x)\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k \int_E \chi_{E_k}(x)\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(E_k)$$

και παρόμοια

$$\int_E \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k+1} \chi_{E_k}(x)\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k+1} m(E_k) = 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(E_k)\,.$$

Άρα, η (α΄) συνεπάγεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(E_k) \le \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}m(x) \le 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(E_k)\,.$$

Από τις παραπάνω ανισότητες είναι προφανές ότι $f \in L_1(E)$ αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(E_k)$ συγκλίνει, δηλαδή $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(E_k) < \infty$.

□

Κεφάλαιο 5

Θέματα Εξετάσεων

5.1 Ακαδημαϊκό έτος 2015–16

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

15 Μαρτίου, 2017

Θ1. Έστω ο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$.

(α΄) Αν m^* είναι το εξωτερικό μέτρο Lebesgue κα m είναι το μέτρο Lebesgue, δείξτε ότι

$$m^*(E) = \inf\{m(U) :\ E \subseteq U\ ,\ U \text{ είναι ανοικτό σύνολο}\}\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Δείξτε ότι το E έχει μέτρο Lebesgue μηδέν αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (U_n) ανοικτών συνόλων στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} m(U_n) = 0$ και $E \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Έστω $m(E) = 0$. Από το (α΄), για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει ανοικτό σύνολο $U_n \supseteq E$ τέτοιο ώστε $m(U_n) < 1/n$. Επομένως $\lim_{n\to\infty} m(U_n) = 0$ και $E \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (U_n) ανοικτών συνόλων στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} m(U_n) = 0 \quad \text{και} \quad E \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \,.$$

Τότε $E \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subseteq U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και επομένως $m^*(E) \leq m^*(U_n) = m(U_n)$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} m(U_n) = 0$, έπεται ότι $m^*(E) = 0$ και κατά συνέπεια το E είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο μέτρου μηδέν.

■

Θ2. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, Lebesgue μετρήσιμο σύνολο.

(α΄) (**Λήμμα Borel–Cantelli**) Αν (A_n) είναι ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του X με $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$, δείξτε ότι $m(\limsup A_n) = 0$, όπου $\limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. (1 μον.)

(β΄) Έστω $m(X) < \infty$ και έστω (f_n) ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο X με $\int_X |f_n|\, dm \leq c < \infty$. Αν (λ_n) είναι ακολουθία θετικών αριθμών με $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$ και

$$A_n = \left\{ x \in X : \left| f_n(x) - \int_X |f_n(x)|\, dm(x) \right| \geq \lambda_n \right\} ,$$

δείξτε ότι $m(\limsup A_n) = 0$. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Από την ανισότητα Chebyshev έχουμε

$$\begin{aligned} m(A_n) &= m\left(\left\{x \in X : \left|f_n(x) - \int_X |f_n(x)|\,dm(x)\right| \geq \lambda_n\right\}\right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n}\int_X \left|f_n(x) - \int_X |f_n(x)|\,dm(x)\right|\,dm(x) \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n}\left[\int_X |f_n(x)|\,dm(x) + \int_X |f_n(x)|\,dm(x)\int_X dm(x)\right] \\ &\leq \frac{c(1+m(X))}{\lambda_n}\,. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \leq c(1+m(X))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n} < \infty$$

και από το λήμμα Borel–Cantelli $m(\limsup A_n) = 0$.

■

Θ3. (α΄) Διατυπώστε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$ και το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης.

(0,5 μον.)

(β΄) Έστω $f : [0,1] \to [0,\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $c \in [0,\infty)$ τέτοιο ώστε

$$\int_{[0,1]} f(t)^n\,dm(t) = c\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

Δείξτε ότι υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [0,1]$ τέτοιο ώστε

$$f = \chi_E \quad \sigma.\pi. \text{ στο } [0,1]\,.$$

(2 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Έστω $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$ με $f_n(t) := f(t)^n$. Στο μετρήσιμο σύνολο $B = \{t \in [0,1] : f(t) > 1\}$ η (f_n) είναι αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων με $\lim_{n\to} f_n(t) = \infty$. Αν $m(B) > 0$, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης είναι

$$\lim_{n\to\infty} \int_B f(t)^n \, dm(t) = \int_B (\lim_{n\to\infty} f(t)^n) \, dm(t) = \infty \cdot m(B) = \infty \, .$$

Ατοπο, επειδή $\int_B f(t)^n \, dm(t) \leq \int_{[0,1]} f(t)^n \, dm(t) = c < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $m(B) = 0$.

Αν $A = \{t \in [0,1] : 0 \leq f(t) < 1\}$, το A είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ και από την υπόθεση έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} f(t)^n \, dm(t) &= \int_A f(t)^n \, dm(t) + \int_{\{f=1\}} f(t)^n \, dm(t) \\ &\quad + \int_B f(t)^n \, dm(t) \\ &= \int_A f(t)^n \, dm(t) + m(\{f=1\}) = c \, , \qquad (*) \end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\lim_{n\to} f_n(t) = 0$ κατά σημείο στο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο A με $m(A) \leq 1$ και $0 \leq f_n(t) \leq 1$ για κάθε $t \in E_1$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης είναι

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f(t)^n \, dm(t) = \int_A (\lim_{n\to\infty} f(t)^n) \, dm(t) = 0 \, .$$

Παίρνοντας στην $(*)$ το $n \to \infty$ έχουμε

$$m(\{f = 1\}) = c \, .$$

Τότε και πάλι από την $(*)$ παίρνουμε

$$\int_A f(t)^n \, dm(t) = 0 \, ,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως είτε $f = 0$ $\sigma.\pi.$ στο $[0,1]$ ή $m(A) = 0$. Επειδή

$$1 = m([0,1]) = m(E_1) + m(\{f = 1\}) + m(E_2) = m(\{f = 1\}) \, ,$$

αν $E := \{f = 1\}$, το E είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ με $c = m(E) = 1$ και $m([0,1] \setminus E) = 0$. Άρα,

$$f = \chi_E \quad \sigma.\pi. \text{ στο } [0,1]\,.$$

■

Θ4. Διατυπώστε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. Αν $n \in \mathbb{N}^*$, υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{n^2 \sin(x/n)}{1+nx^2}\, dx\,.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (1,5 μον.)

Λύση. Παραπέμπουμε στο [17] για το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η $f_n(x) = \frac{n^2 \sin(x/n)}{1+nx^2}$ είναι συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση στο $[1,2]$. Είναι

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+nx^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{x}\,. \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)} \end{aligned}$$

Επειδή $\sin y < y$ για $y > 0$, για κάθε $x \in [1,2]$ είναι

$$|f_n(x)| = \frac{n^2 \sin(x/n)}{1+nx^2} < \frac{nx}{1+nx^2} < \frac{1}{x}$$

και η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[1,2]$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{n^2 \sin(x/n)}{1+nx^2}\, dx = \int_1^2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 \sin(x/n)}{1+nx^2}\right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \ln 2\,.$$

■

Θ5. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο X. Διατυπώστε το θεώρημα Beppo Levi.

Αν η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, υποθέτουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, dm = 0\,.$$

Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (f_{k_n}) της (f_n) τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_{k_n} - f|\, dm \le 1 < \infty\,.$$

Να συμπεράνετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f_{k_n} = f \quad \sigma.\pi. \text{ στο } X\,.$$

(2 μον.)

Λύση. Για τη διατύπωση του θεωρήματος Beppo Levi παραπέμπουμε στο [17].

Από την υπόθεση υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\int_X |f_n - f|\, dm < \frac{1}{2}\,, \quad \text{για κάθε } n \ge k_1\,.$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε $k_2 \in \mathbb{N}^*$ με $k_2 > k_1$ τέτοιο ώστε

$$\int_X |f_n - f|\, dm < \frac{1}{2^2}\,, \quad \text{για κάθε } n \ge k_2\,.$$

Συνεχίζοντας κατ αυτό τον τρόπο, επαγωγικά βρίσκουμε ένα $k_n \in \mathbb{N}^*$ με $k_n > k_{n-1}$ τέτοιο ώστε

$$\int_X |f_n - f|\, dm < \frac{1}{2^n}\,, \quad \text{για κάθε } n \ge k_n\,.$$

Δηλαδή υπάρχει υπακολουθία (f_{k_n}) της (f_n) με

$$\int_X |f_{k_n} - f|\, dm < \frac{1}{2^n}\,, \quad \text{για κάθε } n \ge 1$$

και επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_{k_n} - f|\, dm \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty\,.$$

Τότε από το θεώρημα Beppo Levi η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(f_{k_n} - f)$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο X και άρα

$$\lim_{n\to\infty} f_{k_n} = f \quad \sigma.\pi.\ \text{στο}\ X\,.$$

■

Επαναληπτικές εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

3 Οκτωβρίου, 2017

Θ1. Έστω το σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$.

(α΄) Αν m^* είναι το εξωτερικό μέτρο Lebesgue κα m είναι το μέτρο Lebesgue, δείξτε ότι

$$m^*(E) = \inf\{m(U) :\ E \subseteq U\,,\ U \text{ είναι ανοικτό σύνολο}\}\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Αν $E\cap K \neq \emptyset$ για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}$ με $m(K) > 0$, δείξτε ότι $m^*(E) = \infty$.

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Έστω $m^*(E) < \infty$. Από το (α΄) υπάρχει ανοικτό σύνολο $U \supseteq E$ τέτοιο ώστε $m(U) < \infty$. Τότε το $F = \mathbb{R}\setminus U$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $m(F) = \infty$. Επειδή

$$m(F) = \sup\{m(K) :\ K \subseteq F\,,\ K \text{ είναι συμπαγές σύνολο}\}\,,$$

υπάρχει συμπαγές σύνολο $K \subseteq F$ με $m(K) > 0$. Επειδή $F\cap E = \emptyset$, τότε και $K \cap E = \emptyset$ που είναι άτοπο. Επομένως αν $E \cap K \neq \emptyset$ για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}$ με $m(K) > 0$, τότε $m^*(E) = \infty$.

■

Θ2. (**Λήμμα Borel–Cantelli**) Έστω $\mathfrak{M}$ μια σ-άλγεβρα στο σύνολο X και έστω $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο. Αν (E_n) είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$, δείξτε ότι $\mu(\limsup E_n) = 0$, όπου $\limsup E_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$. Δηλαδή το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε άπειρα το πλήθος E_n έχει μέτρο μηδέν. (1 μον.)

Λύση. Παραπέμπουμε στο [17]. ■

Θ3. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και έστω (f_n), $f_n : X \to [0, \infty]$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων.

(α΄) Διατυπώστε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων και χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης δείξτε ότι

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, dm \, .$$

(1 μον.)

(β΄) Αν $\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, dm < \infty$, δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$ $\sigma.\pi.$ στο X. (0,5 μον.)

(γ΄) Έστω $M > 0$ και έστω $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνουσες σειρές θετικών όρων. Αν

$$\int_{\{f_n \leq M\}} f_n \, dm \leq \alpha_n \quad \text{και} \quad m(\{f_n > M\}) \leq \beta_n \, , \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^* \, ,$$

δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$ $\sigma.\pi.$ στο X. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(γ΄) Έστω $f_n = g_n + h_n$ όπου $g_n = f_n \chi_{\{f_n \le M\}}$ και $h_n = f_n \chi_{\{f_n > M\}}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} g_n < \infty$ $\sigma.\pi.$ στο X και $\sum_{n=1}^{\infty} h_n < \infty$ $\sigma.\pi.$ στο X.

Είναι

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} g_n \, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X g_n \, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{f_n \le M\}} f_n \, dm \le \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$$

και επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ είναι πεπερασμένη $\sigma.\pi.$ στο X.
Αν $E_n := \{f_n > M\}$ και $E := \limsup E_n$, επειδή από την υπόθεση $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$, από το λήμμα Borel–Cantelli είναι $m(E) = 0$. Δηλαδή σχεδόν κάθε $x \in X$ ανήκει σε πεπερασμένα το πολύ E_n. Κατά συνέπεια, για κάποιο $K > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) \le [\text{πεπερασμένος αριθμός}] \cdot K < \infty \quad \sigma.\pi. \text{ στο } X\,.$$

■

Θ4. (α΄) Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Υποθέτουμε ότι η (f_n) είναι ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο X. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης δείξτε το λήμμα Fatou, δηλαδή ότι

$$\int_X \left(\underline{\lim}\, f_n\right) \, dm \le \underline{\lim} \int_X f_n \, dm\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Αν

$$I_n = \int_{1/2}^{1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n}{x + x^2/2 + \cdots + x^n/n} \, dx\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,,$$

εξετάστε αν το όριο $\lim_{n\to\infty} I_n$ είναι πραγματικός αριθμός. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η $f_n(x) = \frac{x+x^2+\cdots+x^n}{x+x^2/2+\cdots+x^n/n}$ είναι συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση στο διάστημα $[1/2, 1]$. Ως γνωστόν

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{και} \quad -\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\,, \quad \text{για κάθε } |x| < 1\,.$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(x + x^2 + \cdots + x^n) &= \lim_{n\to\infty} x(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) \\ &= x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}\,, \qquad |x| < 1 \end{aligned}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right) = -\ln(1-x)\,, \quad |x| < 1\,,$$

είναι

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{x}{(1-x)\,(-\ln(1-x))}\,, \quad |x| < 1\,.$$

Από το λήμμα Fatou έπεται ότι

$$\begin{aligned} &\underline{\lim} \int_{1/2}^{1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n}{x + x^2/2 + \cdots + x^n/n}\, dx \\ &\geq \int_{1/2}^{1} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n}{x + x^2/2 + \cdots + x^n/n}\right) dx \\ &= \int_{1/2}^{1} \frac{x}{(1-x)\,(-\ln(1-x))}\, dx\,. \end{aligned}$$

Όμως για κάθε $x \in [1/2,\, 1)$ είναι $0 < 1 - x \leq 1/2$ και κατά συνέπεια

$-\ln(1-x) > 0$. Επομένως

$$\begin{aligned}
&\underline{\lim} \int_{1/2}^{1} \frac{x+x^2+\cdots+x^n}{x+x^2/2+\cdots+x^n/n}\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} \frac{1}{(1-x)\left(-\ln(1-x)\right)}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(-\ln(1-x)\right)\Big|_{x=1/2}^{x=1} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 1^-}\ln\left(-\ln(1-x)\right) - \frac{1}{2}\ln\left(-\ln(1/2)\right) \\
&= +\infty - \frac{1}{2}\ln\left(\ln 2\right) = +\infty\,. \qquad (\lim_{x\to 1^-}\left(-\ln(1-x)\right) = +\infty)
\end{aligned}$$

Δηλαδή $\underline{\lim}\, I_n = +\infty$ και αυτό συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to\infty} I_n = +\infty$. Άρα το όριο $\lim_{n\to\infty} I_n$ δεν είναι πραγματικός αριθμός.

■

Θ5. Διατυπώστε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. Αν $n \in \mathbb{N}^*$, υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1+x^2+\cdots+x^{2n}}{1+x+\cdots+x^n}\,dx\,.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (1,5 μον.)

Λύση. Παραπέμπουμε στο [17] για το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η $f_n(x) = \frac{1+x^2+\cdots+x^{2n}}{1+x+\cdots+x^n}$ είναι συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$. Επειδή

$$\begin{aligned}
f_n(x) = \frac{1+x^2+\cdots+x^{2n}}{1+x+\cdots+x^n} &= \frac{(1-x^{2n+2})/(1-x^2)}{(1-x^{n+1})/(1-x)} \\
&= \frac{(1-x^{n+1})(1+x^{n+1})}{(1-x^{n+1})(1+x)} = \frac{1+x^{n+1}}{1+x}\,,
\end{aligned}$$

είναι

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x} \quad \sigma.\pi. \text{ στο } [0,1]$$

και

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{2}{1+x}\,, \quad \text{για κάθε } x \in [0,1]\,.$$

Επειδή η συνάρτηση $f(x) = 2/(1+x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,1]$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+x^2+\cdots+x^{2n}}{1+x+\cdots+x^n}\,dx &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+x^2+\cdots+x^{2n}}{1+x+\cdots+x^n} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln 2\,. \end{aligned}$$

■

5.2 Ακαδημαϊκό έτος 2014–15

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

20 Μαρτίου, 2015

Θ1. (α΄) Έστω (E_n) ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων με

$$E_n = \begin{cases} [0,1) \cup [n, n+1) & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ [0,1) \cup [n, n+2) & \text{αν } n \text{ άρτιος .} \end{cases}$$

Υπολογίστε τα όρια $\underline{\lim}\, E_n$, $\overline{\lim}\, E_n$. Εξετάστε αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{n\to\infty} E_n$ και $\lim_{n\to\infty} m(E_n)$.

(1 μον.)

(β΄) Αν $\mathcal{M}$ είναι η σ-άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, θεωρούμε το μέτρο Dirac $\delta_0 : \mathcal{M} \to \{0,1\}$ στο 0 με

$$\delta_0(E) = \begin{cases} 1 & \text{αν το } 0 \in E \\ 0 & \text{αν το } 0 \notin E \text{ .} \end{cases}$$

Δηλαδή $\delta_0(E) = \chi_E(0)$. Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις, δείξτε ότι $f = g$ σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Dirac δ_0 αν και μόνο αν $f(0) = g(0)$. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι $\underline{\lim}\, E_n = [0,1)$ και $\overline{\lim}\, E_n = [0,1)$. Επομένως $\lim_{n\to\infty} E_n = \underline{\lim}\, E_n = \overline{\lim}\, E_n = [0,1)$. Επειδή $m(E_n) = 2$ αν n περιττός και $m(E_n) = 3$ αν n άρτιος, το όριο $\lim_{n\to\infty} m(E_n)$ δεν υπάρχει.

(β΄) Αν $f(0) = g(0)$, θεωρούμε το σύνολο $A = \{0\}^c$. Το σύνολο A είναι Borel μετρήσιμο, $\delta_0(A) = 0$ και $f = g$ στο $A^c = \{0\}$. Επομένως, $f = g$ σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Dirac δ_0.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $f = g$ σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Dirac δ_0. Τότε υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο A τέτοιο ώστε $f = g$ στο A^c και $\delta_0(A) = 0$. Επειδή $\delta_0(A) = 0$, το $0 \notin A$. Τότε το $0 \in A^c$ και επομένως $f(0) = g(0)$.

2ος τρόπος. Είναι

$$\begin{aligned} & f = g \ \ \sigma.\pi. \text{ ως προς το μέτρο Dirac } \delta_0 \\ \Leftrightarrow \quad & \delta_0\left(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \notin \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\} \Leftrightarrow f(0) = g(0)\,. \end{aligned}$$

■

Θ2. (α΄) Έστω $h : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\psi : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ με

$$\psi(A) := \int_A h\, dm\,,$$

όπου $A \in \mathcal{M}$. Δείξτε ότι το ψ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. (0,7 μον.)

(β΄) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = 0 \\ 0 & \text{αν } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{αν } x = 0 \\ 0 & \text{αν } x \neq 0\,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι Lebesgue μετρήσιμες και ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi\, dm = \int_{\mathbb{R}} g\varphi\, dm\,,$$

για κάθε φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$.

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Επειδή $f = 0$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$ και $g = 0$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$, οι συναρτήσεις f, g είναι Lebesgue μετρήσιμες.

Αν $\varphi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ είναι φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση, επειδή

$$(f\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(0) & \text{αν } x = 0 \\ 0 & \text{αν } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad (g\varphi)(x) = \begin{cases} 2\varphi(0) & \text{αν } x = 0 \\ 0 & \text{αν } x \neq 0 \end{cases},$$

είναι $f\varphi = 0$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$ και $g\varphi = 0$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$. Επομένως,

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi \, dm = 0 = \int_{\mathbb{R}} g\varphi \, dm .$$

■

Θ3. (α΄) Δώστε ένα παράδειγμα συναρτήσεων $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n, f \in L_1(\mathbb{R})$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τέτοιων ώστε

- $f_n \longrightarrow f$ κατά σημείο καθώς το $n \to \infty$,
- $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = \frac{1}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$,
- $\int_{\mathbb{R}} f \, dm = 1$.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Θεωρείστε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με

$$f_n = 3 \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \chi_{[k,k+1)} + \left(\frac{1}{n} - 3 \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \right) \chi_{[n,n+1)} .$$

(1 μον.)

(β΄) Διατυπώστε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και το λήμμα Fatou για ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε το λήμμα Fatou.

(1,5 μον.)

(γ΄) Υπάρχουν μη αρνητικές και μετρήσιμες συναρτήσεις f_n, f, $n \in \mathbb{N}^*$, στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

- $f_n \longrightarrow f$ κατά σημείο καθώς το $n \to \infty$,
- $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = \frac{1}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$,

- $\int_{\mathbb{R}} f\, dm = 1$;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (0,8 μον.)

Λύση.

(α΄) Ως γνωστόν η γεωμετρική σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} = \frac{1/2}{1+1/2} = \frac{1}{3}\,.$$

Θεωρούμε την ακολουθία (f_n) απλών συναρτήσεων με

$$f_n = 3\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \chi_{[k,k+1)} + \left(\frac{1}{n} - 3\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \right) \chi_{[n,n+1)}$$

και τη συνάρτηση f με

$$f = 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \chi_{[k,k+1)}\,.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} \chi_{[n,n+1)} = \chi_{\emptyset} = 0$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \chi_{[k,k+1)} = f\,.$$

Επειδή $m([k,k+1)) = m([n,n+1)) = 1$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm &= 3\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[k,k+1)}\, dm + \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[n,n+1)}\, dm \\ &\quad -3\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[n,n+1)}\, dm \\ &= 3\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} + \frac{1}{n} - 3\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

και επομένως $f_n \in L_1(\mathbb{R})$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Επειδή

$$3\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\chi_{[k,k+1)}\right|dm = 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\int_{\mathbb{R}}\chi_{[k,k+1)}\,dm$$
$$= 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 3\,,$$

από το θεώρημα Beppo Levi η $f \in L_1(\mathbb{R})$ και

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dm = 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\int_{\mathbb{R}}\chi_{[k,k+1)}\,dm = 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k} = 1\,.$$

(β΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(γ΄) Η απάντηση είναι αρνητική. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ακολουθία (f_n) μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ κατά σημείο, τότε από την υπόθεση και από το λήμμα Fatou έχουμε ότι

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f\,dm = \int_{\mathbb{R}}(\lim_{n\to\infty} f_n)\,dm \le \underline{\lim}\int_{\mathbb{R}} f_n\,dm = \underline{\lim}\,\frac{1}{n} = 0$$

που είναι άτοπο.

■

Θ4. (α΄) Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. (1 μον.)

(β΄) Έστω η συνάρτηση $F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt\,.$$

Αν (x_n) είναι ακολουθία μη αρνητικών όρων με $\lim_{n\to+\infty} x_n = x \in [0,+\infty)$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x)\,,$$

δηλαδή ότι η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Υπολογίστε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

(1,5 μον.)

(γ΄) Δώστε ένα παράδειγμα μετρήσιμης συνάρτησης f στο $[a, +\infty)$, $a > 0$, με $f \notin L_1([a, +\infty))$ και $f^2 \in L_1([a, +\infty))$. (0,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) (i) Έστω $f_n(t) := \frac{e^{-x_n t^2}}{1+t^2}$, $f(t) := \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ και $g(t) := \frac{1}{1+t^2}$. Τότε οι συναρτήσεις f_n, $n \geq 1$, f και g είναι συνεχείς. Είναι

$$f_n(t) \leq g(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{και} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,, \quad \text{για κάθε}\, t \geq 0\,.$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

συγκλίνει, από γνωστό θεώρημα το ολοκλήρωμα Lebesgue της g υπάρχει στο $[0, +\infty)$ και είναι

$$\int_{[0,+\infty)} g(t)\,dm(t) = \int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} F(x_n) &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_n t^2}}{1+t^2}\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-x_n t^2}}{1+t^2}\right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt = F(x)\,.\end{aligned}$$

Δηλαδή η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $x \in [0, +\infty)$.

(ii) Έστω τώρα (x_n) ακολουθία μη αρνητικών όρων με $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-x_n t^2}}{1+t^2} = 0\,, \quad \text{για κάθε } t > 0\,,$$

δηλαδή $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-x_n t^2}}{1+t^2} = 0$ σχεδόν παντού στο $[0, +\infty)$. Επομένως και πάλι με εφαρμογή του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_n t^2}}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-x_n t^2}}{1+t^2} \right) dt = 0\,.$$

Άρα, το όριο $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

(γ΄) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq a > 0$. Επειδή

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty \quad \text{και} \quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{a} < +\infty\,,$$

η $f(x) = \frac{1}{x} \notin L_1\left([a, +\infty)\right)$ και η $f^2(x) = \frac{1}{x^2} \in L_1\left([a, +\infty)\right)$.

■

Επαναληπτικές Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

23 Σεπτεμβρίου, 2015

Θέμα 1. (α΄) Έστω $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ χώρος μέτρου.

(*i*) Αν $A \subseteq B$, όπου $A, B \in \mathfrak{M}$, δείξτε ότι $\mu(A) \leq \mu(B)$. Αν επιπλέον $\mu(A) < \infty$, δείξτε ότι $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(0,5 μον.)

(*ii*) Αν (A_n) είναι μια οποιαδήποτε ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του X, δείξτε ότι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

(Αν χρειαστείτε κάποια βοηθητική πρόταση, διατυπώστε την χωρίς απόδειξη.)

(1 μον.)

(β΄) Έστω $E_i \subset (0,1)$, $1 \leq i \leq n$, Lebesgue μετρήσιμα σύνολα με $\sum_{i=1}^{n} m(E_i) > n-1$. Δείξτε ότι $m\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) > 0$. (1,3 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Επειδή

$$\begin{aligned} n - \sum_{i=1}^{n} m(E_i) &= n \cdot m((0,1)) - \sum_{i=1}^{n} m(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [(m((0,1)) - m(E_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} m\left((0,1) \setminus E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i^c)\,, \end{aligned}$$

από την υπόθεση έχουμε $\sum_{i=1}^{n} m(E_i^c) < 1$ και επομένως

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(E_i^c) < 1\,.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} m\left((0,1) \setminus \bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) < 1 &\Leftrightarrow m((0,1)) - m\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) < 1 \\ &\Leftrightarrow m\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) > 0\,. \end{aligned}$$

■

Θέμα 2. Έστω ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, όπου $\mathfrak{B}$ η Borel σ-άλγεβρα και έστω $f : D \to [-\infty, +\infty]$, $D \subset \mathbb{R}$, μια επεκταμένη πραγματική συνάρτηση.

(α΄) Αν το D είναι αριθμήσιμο σύνολο, δείξτε ότι $D \in \mathfrak{B}$ και ότι η συνάρτηση f είναι Borel μετρήσιμη στο D. (0,8 μον.)

(β΄) Έστω $D_0 \subset D$ και $D_0, D \in \mathfrak{B}$. Αν η f είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση στο D, δείξτε ότι ο περιορισμός της f στο D_0 είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση στο D_0. (0,5 μον.)

(γ΄) Έστω $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, όπου $D_n \in \mathfrak{B}$. Αν ο περιορισμός της f στο D_n είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση στο D_n για κάθε

$n \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι η η f είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση στο D. (0,7 μον.)

(δ΄) Έστω ότι η f είναι Borel μετρήσιμη στο $D \in \mathfrak{B}$, έστω D_0 αριθμήσιμο υποσύνολο του D και έστω $g : D \to [-\infty, +\infty]$ μια επεκταμένη πραγματική συνάρτηση. Αν $g = f$ στο $D \setminus D_0$, δείξτε ότι η g είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση στο D.

(0,7 μον.)

Λύση.

(α΄) Η Borel σ-άλγεβρα περιέχει όλα τα ανοικτά και όλα τα κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Επειδή τα μονοσύνολα είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και το αριθμήσιμο σύνολο D είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος μονοσυνόλων, το $D \in \mathfrak{B}$.
Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι Borel μετρήσιμη στο D, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο

$$\{x \in D : f(x) \leq a\} \in \mathfrak{B}\,.$$

Όμως το D είναι αριθμήσιμο σύνολο οπότε και το $\{x \in D : f(x) \leq a\}$ είναι αριθμήσιμο. Επομένως το $\{x \in D : f(x) \leq a\}$ είναι Borel μετρήσιμο σύνολο και κατά συνέπεια η f είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση στο D.

(β΄) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$

$$\{D_0 : f \leq a\} = \{D : f \leq a\} \cap D_0\,.$$

Επειδή η η συνάρτηση f είναι Borel μετρήσιμη στο D, το $\{D : f \leq a\} \in \mathfrak{B}$ οπότε και το $\{D_0 : f \leq a\} \in \mathfrak{B}$. Επομένως ο περιορισμός της f στο D_0 είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση στο D_0.

(γ΄) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$

$$\{D : f \leq a\} = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n : f \leq a \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{D_n : f \leq a\}\,.$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι Borel μετρήσιμη στο D_n για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, το $\{D_n : f \leq a\} \in \mathfrak{B}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως το $\{D : f \leq a\} \in \mathfrak{B}$ και κατά συνέπεια η f είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση στο D.

(δ΄) Από το (α΄) το $D_0 \in \mathfrak{B}$ οπότε και το $D \setminus D_0$ είναι Borel μετρήσιμο σύνολο στο $\mathbb{R}$. Επειδή η f είναι Borel μετρήσιμη στο $D \in \mathfrak{B}$, από το (β΄) θα είναι Borel μετρήσιμη στο $D \setminus D_0$. Δηλαδή η g είναι Borel μετρήσιμη στο $D \setminus D_0$. Επίσης, επειδή το D_0 είναι αριθμήσιμο σύνολο στο $\mathbb{R}$, από το (β΄) η g είναι Borel μετρήσιμη στο D_0. Τότε, από το (γ΄) η g θα είναι Borel μετρήσιμη στο $D = D_0 \cup (D \setminus D_0)$.

■

Θέμα 3. (α΄) Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue.

(1,5 μον.)

(β΄) (i) Διατυπώστε το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης.

(ii) Με τεχνικές "Μιγαδικής Ανάλυσης " αποδεικνύεται ότι

$$\int_0^{2\pi} \ln|1 + ae^{i\theta}|\, d\theta = 0\,, \quad a \in \mathbb{C}\,,\ |a| < 1\,.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \ln|1 + e^{i\theta}|\, d\theta\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) (i) Παραπέμπουμε στο [17].

(ii) Έστω (a_n), $|a_n| < 1$, ακολουθία μιγαδικών αριθμών με

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Επειδή η $f_n(\theta) := \ln|1 + a_n e^{i\theta}|$ είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με $|f_n(\theta)| \le \ln 2$, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \ln|1+e^{i\theta}|\,d\theta &= \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} \ln|1+a_n e^{i\theta}|\,d\theta \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \ln|1+a_n e^{i\theta}|\,d\theta\,.\end{aligned}$$

Έπειδή $\int_0^{2\pi} \ln|1+a_n e^{i\theta}|\,d\theta = 0$, συμπεραίνουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \ln|1+e^{i\theta}|\,d\theta = 0$.

■

Θέμα 4. Έστω f Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και έστω $\alpha > 0$. Αν $n \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \big(n^{-\alpha} f(nx)\big) = 0 \text{ σχεδόν για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

Υπόδειξη. Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |n^{-\alpha} f(nx)|\,dm(x) < \infty$. (1,5 μον.)

Λύση. Βλέπε άσκηση 5, "2η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση", ακαδ. έτος 2012-13. ■

5.3 Ακαδημαϊκό έτος 2013–14

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

11 Απριλίου, 2014

Θ1. Έστω m^* το εξωτερικό μέτρο Lebesgue.

(α΄) Δώστε τον ορισμό μετρησιμότητας του Κ. Καραθεοδωρή για τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια αποδείξτε ότι αν ισχύει

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)\,, \text{ για κάθε } A \subset \mathbb{R} \text{ με } m^*(A) < \infty\,,$$

τότε το σύνολο E είναι μετρήσιμο. (0,8 μον.)

(β΄) Αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια (A_n) ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)\,.$$

(1,2 μον.)

Λύση. Παραπέμπουμε στο [17]. ■

Θ2. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(α΄) Αν η f είναι μετρήσιμη και η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι και η g θα είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(0,8 μον.)

(β΄) Θεωρούμε τις προτάσεις:

(i) η f είναι συνεχής $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$,

(ii) η f ισούται $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$ με μια συνεχή συνάρτηση.

Με κατάλληλα αντιπαραδείγματα δείξτε ότι η (i) δεν συνεπάγεται τη (ii) και η (ii) δεν συνεπάγεται τη (i). (1,6 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) $\underline{(i) \not\Rightarrow (ii)}$ Έστω $f = \chi_{[0,+\infty)}$. Η f είναι συνεχής $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$ (η f δεν είναι συνεχής στο 0). Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g = \chi_{[0,+\infty)}$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$. Τότε η g παίρνει τις τιμές 0 και 1 και από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής θα παίρνει και την τιμή $1/2$. Έστω $g(x_0) = 1/2$, για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε ως γνωστόν υπάρχει διάστημα $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{4} < g(x) < \frac{3}{4}\,, \quad \text{για κάθε } x \in I\,.$$

Επομένως, $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in I$ με $m(I) = 2\delta > 0$ και αυτό οδηγεί σε άτοπο. Άρα, δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση g στο $\mathbb{R}$ που να είναι ίση $\sigma.\pi.$ με την $f = \chi_{[0,+\infty)}$.

(γ΄) $\underline{(ii) \not\Rightarrow (i)}$ Θεωρούμε τη συνάρτηση $f = \chi_{\mathbb{Q}}$. Επειδή $m(\mathbb{Q}) = 0$ και $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ αν και μόνο αν $x \in \mathbb{Q}$, η $f = 0$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή η f ισούται $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$ με τη μηδενική συνάρτηση που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Όμως η συνάρτηση Dirichlet

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος}\,, \end{cases}$$

είναι ασυνεχής στο $\mathbb{R}$.

■

Θ3. (α΄) Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. (1,5 μον.)

(β΄) Υποθέτουμε ότι το σύνολο $X \subset \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο με $m(X) < \infty$. Έστω

$$\mathcal{H} := \{f \in L_1(X) : |f| \leq g\}\,,$$

όπου $g \in L_1(X)$.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $f \in \mathcal{H}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq X$,

$$\int_A |f| \, dm \leq \int_{\{g>n\}} g \, dm + nm(A) \, .$$

(ii) Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g\chi_{\{g>n\}} \, dm = 0 \, .$$

(iii) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq X$ με $m(A) < \delta$ είναι

$$\sup\left\{\int_A |f| \, dm : \, f \in \mathcal{H}\right\} \leq \varepsilon \, .$$

(2,5 μον.)

Απόδειξη. (α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) (i) Για κάθε $f \in \mathcal{H}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq X$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_A |f| \, dm &= \int_{A\cap\{|f|>n\}} |f| \, dm + \int_{A\cap\{|f|\leq n\}} |f| \, dm \\ &\leq \int_{A\cap\{|f|>n\}} g \, dm + nm(A \cap \{|f| \leq n\}) \, .\end{aligned}$$

Επειδή $|f| \leq g$, είναι $\{|f| > n\} \subseteq \{g > n\}$ και κατά συνέπεια

$$\int_A |f| \, dm \leq \int_{\{g>n\}} g \, dm + nm(A) \, .$$

(ii) Έστω $g_n := g\chi_{\{g>n\}}$. Επειδή η $g \in L_1(X)$, είναι $g < \infty$ $\sigma.\pi.$ στο X. Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} g_n = 0 \ \sigma.\pi. \text{ στο } X \text{ και } g_n \leq g \text{ στο } X, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^* \, .$$

Τότε, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g\chi_{\{g>n\}} \, dm = 0 \, .$$

(iii) Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{n\to\infty}\int_{\{g>n\}} g\,dm = 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\int_{\{g>n_0\}} g\,dm < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Παίρνουμε $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_0} > 0$. Από τη (i), για κάθε $f \in \mathcal{H}$ και για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq X$ με $m(A) < \delta$ έχουμε

$$\int_A |f|\,dm \le \int_{\{g>n_0\}} g\,dm + n_0 m(A) < \frac{\varepsilon}{2} + n_0\frac{\varepsilon}{2n_0} = \varepsilon\,.$$

Επομένως, για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq X$ με $m(A) < \delta$ είναι

$$\sup\left\{\int_A |f|\,dm : f \in \mathcal{H}\right\} \le \varepsilon\,.$$

□

Θ4. Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων στο $[0,+\infty)$ με

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+x^2)}\,.$$

Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{[0,+\infty)} |f_n|\,dm\right) = +\infty$$

και εξετάστε αν

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{[0,+\infty)} f_n\,dm\right) = \int_{[0,+\infty)}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)dm\,.$$

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας. (1,6 μον.)

Λύση. (i) Η (f_n) είναι ακολουθία συνεχών και επομένως μετρήσιμων συναρτήσεων στο $[0,+\infty)$. Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \text{(συγκλίνει)}$$

είναι

$$\int_{[0,+\infty)} |f_n|\,dm = \frac{1}{n}\int_{[0,+\infty)}\frac{1}{1+x^2}\,dm(x) = \frac{\pi}{2n}$$

και επομένως

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{[0,+\infty)}|f_n|\,dm\right)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty\,.$$

(ii) Επειδή ως γνωστόν

$$\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)=\frac{1}{1+x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\frac{1}{1+x^2}\ln 2\,,$$

είναι

$$\int_{[0,+\infty)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)\right)dm(x)=\int_{[0,+\infty)}\left(\frac{1}{1+x^2}\ln 2\right)dm(x)=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

και

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{[0,+\infty)}f_n\,dm\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_{[0,+\infty)}\frac{1}{1+x^2}\,dm(x)=\frac{\pi}{2}\ln 2\,.$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{[0,+\infty)}f_n\,dm\right)=\int_{[0,+\infty)}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}f_n\right)dm\,.$$

■

Επαναληπτικές Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

24 Οκτωβρίου, 2014

Θ1. Έστω $(X,\mathfrak{M},\mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω (A_n) αριθμήσιμη οικογένεια μετρήσιμων υποσυνόλων του X. Ως γνωστόν

$$\underline{\lim}\,A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k \quad \text{και} \quad \overline{\lim}\,A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\,.$$

(α΄) Δείξτε ότι $\mu\left(\underline{\lim}\,A_n\right)\le\underline{\lim}\,\mu(A_n)$. (1 μον.)

(β΄) Αν $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)<\infty$, δείξτε ότι $\mu\left(\overline{\lim}\,A_n\right)\ge\overline{\lim}\,\mu(A_n)$. (1 μον.)

(γ΄) Αν $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$, δείξτε ότι $\mu\left(\overline{\lim} A_n\right) = 0$. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Έστω $B_n := \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Επειδή $B_n \subseteq A_n$, είναι $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ και κατά συνέπεια

$$\underline{\lim}\, \mu(B_n) \leq \underline{\lim}\, \mu(A_n)\,.$$

Επειδή $B_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \underline{\lim}\, A_n$, από γνωστή ιδιότητα του μέτρου έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\underline{\lim}\, A_n\right)\,.$$

Άρα,

$$\mu\left(\underline{\lim}\, A_n\right) = \lim \mu(B_n) = \underline{\lim}\, \mu(B_n) \leq \underline{\lim}\, \mu(A_n)\,.$$

(β΄) Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή της (α΄).

(γ΄) Είναι το λήμμα Borel–Cantelli, παραπέμπουμε στο [17].

■

Θ2. (α΄) Δείξτε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_A ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, αν και μόνο αν το A είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. (1 μον.)

(β΄) Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση στο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 0$ αν $f(x) \in \mathbb{Q}$ και $g(x) = 1$ αν $f(x) \notin \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι η g είναι μετρήσιμη συνάρτηση. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Έστω $\{r_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Ορίζουμε

$$E_n := \{x \in X : f(x) = r_n\} \quad \text{και} \quad E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\,.$$

Επειδή η f είναι μετρήσιμη, τα E_n είναι μετρήσιμα υποσύνολα του X και επομένως το E θα είναι μετρήσιμο υποσύνολο του X. Τότε από την υπόθεση έπεται ότι

$$g = 1 - \chi_E$$

και άρα η g θα είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

■

Θ3. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο.

(α΄) Διατυπώστε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και το λήμμα Fatou για ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο X. Αποδείξτε το λήμμα Fatou.

(1,5 μον.)

(β΄) Έστω (f_n), (g_n) ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων στο X με

$$|f_n| \leq g_n\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,, \ \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)\,, \quad \text{για κάθε } x \in X$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, dm = \int_X g\, dm < \infty\,.$$

Δείξτε ότι η $f \in L_1(X)$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, dm = \int_X f\, dm\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, dm = \int_X g\, dm < \infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\int_X g_n\, dm < \int_X g\, dm + \varepsilon\,, \quad \text{για κάθε } n \geq N\,.$$

Επομένως $g_n \in L_1(X)$ για κάθε $n \geq N$. Επειδή $|f_n| \leq g_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, είναι $|f| \leq g$ και κατά συνέπεια η $f \in L_1(X)$. Επίσης $f_n \in L_1(X)$ για κάθε $n \geq N$. Αν $h_n := g_n + g - |f_n - f|$, η (h_n) είναι ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο X με $h_n \in L_1(X)$ για κάθε $n \geq N$ και $\lim_{n\to\infty} h_n = 2g$. Είναι

$$\begin{aligned}
\int_X 2g\, dm &= \int_X (\lim_{n\to\infty} h_n)\, dm \\
&\leq \underline{\lim} \int_X h_n\, dm && \text{(λήμμα Fatou)} \\
&= \underline{\lim} \left[\int_X g_n\, dm + \int_X g\, dm - \int_X |f_n - f|\, dm \right] \\
&= 2 \int_X g\, dm - \overline{\lim} \int_X |f_n - f|\, dm\,.
\end{aligned}$$

Επειδή $g \in L_1(X)$, έπεται ότι $\overline{\lim} \int_X |f_n - f|\, dm \leq 0$ και επομένως $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, dm = 0$. Όμως για κάθε $n \geq N$ είναι

$$\left| \int_X f_n\, dm - \int_X f\, dm \right| = \left| \int_X (f_n - f)\, dm \right| \leq \int_X |f_n - f|\, dm$$

και άρα $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, dm = \int_X f\, dm$.

■

Θ4. (α΄) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει, δείξτε ότι το όριο είναι μηδέν. (1 μον.)

(β΄) Υπολογίστε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^x)}{1 + nx^2}\, dx\,.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Υποθέτουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda \neq 0$. Τότε για $\varepsilon := |\lambda|/2$ υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|f(x) - \lambda| < |\lambda|/2$, για κάθε $x > a$ και κατά συνέπεια

$$|f(x)| > \frac{|\lambda|}{2}, \quad \text{για κάθε } x > a\,.$$

Επομένως

$$\int_{\mathbb{R}} |f|\, dm \geq \int_{(a,+\infty)} \frac{|\lambda|}{2}\, dm = +\infty\,.$$

Δηλαδή $f \notin L_1(\mathbb{R})$, άτοπο. Άρα, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(β΄) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η $f_n(x) = \frac{\sin(e^x)}{1+nx^2}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $[0,\infty)$ με

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \sin 1 & \text{αν } x = 0 \\ 0 & \text{αν } x > 0\,. \end{cases}$$

Επομένως $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ σχεδόν για κάθε x στο $[0,+\infty)$. Επίσης έχουμε

$$|f_n(x)| \leq g(x) := \frac{1}{1+x^2}\,, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^* \text{ και για κάθε } x \in [0,\infty)\,.$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} g(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

συγκλίνει, η $g \in L_1\left([0,+\infty)\right)$ και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^x)}{1+nx^2}\, dx = 0\,.$$

■

5.4 Ακαδημαϊκό έτος 2012–13

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

8 Μαρτίου, 2013

Θ1. (α΄) Έστω $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty \quad \text{και} \quad \inf\{\mu(A_n) : n \in \mathbb{N}^*\} = a \geq 0\,.$$

Αποδείξτε ότι $\mu(\overline{\lim}\, A_n) \geq a$. (1 μον.)

(β΄) Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ ο χώρος Lebesgue και έστω $\mu_n := \frac{1}{n} m$ φθίνουσα ακολουθία θετικών μέτρων. Αν $\mu := \lim_{n\to\infty} \mu_n$, αποδείξτε ότι το μ δεν είναι ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, η (B_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $\mu(B_1) < \infty$. Επομένως από γνωστή ιδιότητα του μέτρου έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu(\overline{\lim}\, A_n)\,.$$

Επειδή

$$\mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq \inf\{\mu(A_n) : n \in \mathbb{N}\} = a \geq 0\,,$$

έπεται ότι $\mu(\overline{\lim}\, A_n) \geq a$.

(β΄) Έστω $E_k := [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}^*$. Η (E_k) είναι ακολουθία ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων συνόλων με

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} [k, k+1) = [1, \infty)\,.$$

Επειδή $m([1,\infty)) = \infty$, είναι $\mu_n([1,\infty)) = \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και επομένως $\mu([1,\infty)) = \infty$. Όμως

$$\mu_n(E_k) = \mu_n([k,k+1)) = \frac{1}{n}m([k,k+1)) = \frac{1}{n}\,,$$

οπότε $\mu(E_k) = \lim_{n\to\infty}\mu_n(E_k) = 0$. Αποδείξαμε ότι

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \infty \neq 0 = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)$$

και άρα το μ δεν είναι σ-αθροιστικό θετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$.

■

Θ2. Έστω η συνάρτηση $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, όπου $E \in \mathcal{M}$.

(α') Αν η f^3 είναι μετρήσιμη, δείξτε ότι και η f θα είναι μετρήσιμη.

(0,5 μον.)

(β') Αν $m(E) > 0$, δώστε ένα παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f στο E για την οποία η f^2 είναι μετρήσιμη. (1 μον.)

(γ') Αν η f είναι μετρήσιμη και η $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι τέτοια ώστε $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο E, δείξτε ότι και η g θα είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(0,8 μον.)

(δ') Έστω A ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ και έστω C το τριαδικό σύνολο Cantor. Αν

$$h(x) = \chi_{A\cap C}(x)\sin x + \chi_{(A\cap C)^c}(x)x^2\,,$$

είναι η συνάρτηση h μετρήσιμη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(0,5 μον.)

Λύση.

(α') Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, $\{f \leq a\} = \{f^3 \leq a^3\}$. Επειδή η η f^3 είναι μετρήσιμη, τότε και η f θα είναι μετρήσιμη (β΄) Έστω A ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο του E (επειδή $m(E) > 0$, υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο του E). Αν $f := \chi_A - \chi_{E\setminus A}$, τότε $f : E \to \{-1, 1\}$. Επειδή $f^{-1}((0,2)) = A$, η f δεν είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Όμως

$$\begin{aligned} f^2 &= \left(\chi_A - \chi_{E\setminus A}\right)^2 \\ &= \chi_A^2 + \chi_{E\setminus A}^2 \chi_{E\setminus A} - 2\chi_A \chi_{E\setminus A} \\ &= \chi_A + \chi_{E\setminus A} - 2\chi_{A\cap(E\setminus A)} \\ &= \chi_A + \chi_{E\setminus A} && (A \cap (E \setminus A) = \emptyset) \\ &= \chi_E = 1 \end{aligned}$$

και επομένωση f^2 είναι μετρήσιμη.

(γ΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(δ΄) Επειδή $m(A \cap C) = 0$, είναι $h(x) = x^2$ σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$. Επειδή η $y = x^2$ είναι μετρήσιμη, από το (γ΄) και η h θα είναι μετρήσιμη στο $[0,1]$.

■

Θ3. (α΄) Διατυπώστε και αποδείξτε το λήμμα Fatou. (1 μον.)

(β΄) Έστω (f_n), $f_n : X \to [0,\infty]$, $X \in \mathcal{M}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ $\sigma.\pi.$ Αν $f, f_n \in L_1(X)$ και $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, dm = \int_X f\, dm$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, dm = 0\,.$$

Υπόδειξη. Θεωρείστε τη $g_n := f_n + f - |f_n - f|$.

(1,2 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Αν $g_n := f_n + f - |f_n - f|$, η (g_n) είναι ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο X με $g_n \in L_1(X)$ και $\lim_{n\to\infty} g_n = 2f$ $\sigma.\pi.$ Επομένως

$$\begin{aligned}
\int_X 2f\,dm &= \int_X (\lim_{n\to\infty} g_n)\,dm \\
&\leq \underline{\lim} \int_X g_n\,dm && \text{(λήμμα Fatou)} \\
&= \underline{\lim} \left[\int_X f_n\,dm + \int_X f\,dm - \int_X |f_n - f|\,dm\right] \\
&= 2\int_X f\,dm - \overline{\lim} \int_X |f_n - f|\,dm\,.
\end{aligned}$$

Επειδή $f \in L_1(X)$, συμπεραίνουμε ότι $\overline{\lim} \int_X |f_n - f|\,dm \leq 0$ και άρα $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,dm = 0$.

■

Θ4. (α΄) Διατυπώστε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης. Αν η συνάρτηση $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ είναι μετρήσιμη, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{[0,1]} \frac{f(nt)}{\sqrt{1+t}}\,dm(t)\,.$$

(1,5 μον.)

(β΄) Διατυπώστε το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης του Lebesgue. Αν η μετρήσιμη συνάρτηση $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής στο 0, υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{[-1/n,\,1/n]} g(x)(1 - n|x|)\,dm(x)\,.$$

(1,5 μον.)

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

Λύση.

(α΄) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = nt$ έχουμε

$$n\int_{[0,1]} \frac{f(nt)}{\sqrt{1+t}}\,dm(t) = \int_{[0,n]} \frac{f(x)}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}\,dm(x)$$
$$= \int_{[0,\infty)} \frac{f(x)}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}\chi_{[0,n]}\,dm(x)\,.$$

Αν $g_n(x) := \frac{f(x)}{\sqrt{1+(x/n)}}\chi_{[0,n]}$, η (g_n) είναι ακολουθία μη αρνητικών και μετρήσιμων συναρτήσεων. Επίσης εύκολα φαίνεται ότι η (g_n) είναι αύξουσα ακολουθία με $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ για κάθε $x \geq 0$ και επομένως από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{[-1/n,\,1/n]} g(x)(1-n|x|)\,dm(x)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)} \frac{f(x)}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}\chi_{[0,n]}\,dm(x) = \int_{[0,\infty)} f(x)\,dm(x)\,.$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = nx$ έχουμε

$$n\int_{[-1/n,\,1/n]} g(x)(1-n|x|)\,dm(x) = \int_{[-1,1]} g\left(\frac{t}{n}\right)(1-|t|)\,dm(t)\,.$$

Αν $g_n(t) := g(t/n)(1-|t|)$, η (g_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $[-1,1]$. Επειδή η g είναι συνεχής στο 0, $\lim_{n\to\infty} g_n(t) = g(0)(1-|t|)$ για κάθε $t \in [-1,1]$. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|g(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [-1,1]$ και επομένως

$$|g_n(t)| = \left|g\left(\frac{t}{n}\right)\right| |1-|t|| \leq M(1+|t|) = 2M\,,$$

για κάθε $t \in [-1,1]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή $m([-1,1]) = 2 < \infty$, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n \int_{[-1/n,\,1/n]} g(x)(1-n|x|)\,dm(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} g\left(\frac{t}{n}\right)(1-|t|)\,dm(t) \\
&= \int_{[-1,1]} g(0)(1-|t|)\,dm(t) \\
&= g(0)\int_{-1}^{1}(1-|t|)\,dt \\
&= g(0)\,. \qquad\qquad \left(\textstyle\int_{-1}^{1}(1-|t|)\,dt = 1\right)
\end{aligned}$$

■

Επαναληπτικές Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

4 Σεπτεμβρίου, 2013

Θ1. Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ ο χώρος μέτρου του Lebesgue.

(α΄) Αν $E_1 \subseteq E_2$, όπου $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, δείξτε ότι $m(E_1) \leq m(E_2)$. Αν επιπλέον $m(E_1) < \infty$, δείξτε ότι

$$m(E_2 \setminus E_1) = m(E_2) - m(E_1)\,.$$

(0,5 μον.)

(β΄) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο A το οποίο είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ και τέτοιο ώστε $m(A) \leq \varepsilon$. (0,7 μον.)

(γ΄) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο F το οποίο δεν περιέχει διάστημα και τέτοιο ώστε $m(F \cap E) \geq m(E) - \varepsilon$, για κάθε $E \in \mathcal{M}$. (0,8 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Έστω $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ μια αρίθμηση των ρητών αριθμών και έστω

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) .$$

Το A είναι ανοικτό σύνολο. Επειδή το A περιέχει το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, το A είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ με

$$m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m \left(r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon \, .$$

(γ΄) Έστω $F := \mathbb{R} \setminus A$. Το F είναι κλειστό σύνολο και δεν περιέχει διάστημα. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $(x - \delta, x + \delta) \subset F$, τότε $(x - \delta, x + \delta) \cap A = \emptyset$ και αυτό είναι άτοπο επειδή το A είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Έστω $E \in \mathcal{M}$. Επειδή $E = (A \cap E) \cup (F \cap E)$, όπου $A \cap E$, $F \cap E$ ξένα μεταξύ τους Lebesgue μετρήσιμα σύνολα, είναι

$$\begin{aligned} m(E) &= m(A \cap E) + m(F \cap E) \\ &\leq m(A) + m(F \cap E) \\ &\leq \varepsilon + m(F \cap E) \qquad \text{(από το (β΄))} \end{aligned}$$

και επομένως $m(F \cap E) \geq m(E) - \varepsilon$.

■

Θ2. (α΄) Έστω m^* το εξωτερικό μέτρο Lebesgue. Δείξτε ότι υπάρχουν σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $A \cap B = \emptyset$, τέτοια ώστε

$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B) \, .$$

(1 μον.)

(β΄) Υποθέτουμε ότι η μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη στο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν απλές συναρτήσεις s_ε και t_ε ορισμένες στο E, τέτοιες ώστε

$$s_\varepsilon \leq f \leq t_\varepsilon \ \text{ και } \ 0 \leq t_\varepsilon - s_\varepsilon < \varepsilon \ \text{ στο } E \, .$$

(1,5 μον.)

Λύση. Για τις αποδείξεις παραπέμπουμε στο [17]. ■

Θ3. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο.

(α΄) Αν (E_n) είναι αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο μετρήσιμων υποσυνόλων του X και η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f\,dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,dm\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Υποθέτουμε ότι οι $g, h : X \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $\int_X g\,dm = \int_X h\,dm$. Δείξτε ότι είτε $g = h$ $\sigma.\pi.$ στο X ή υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $E \subset X$ με

$$\int_E g\,dm > \int_E h\,dm\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Υποθέτουμε ότι για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subset X$ είναι

$$\int_E g\,dm \leq \int_E h\,dm\,.$$

Τότε

$$\begin{aligned}\int_X g\,dm &= \int_E g\,dm + \int_{X\setminus E} g\,dm\\ &\leq \int_E h\,dm + \int_{X\setminus E} h\,dm = \int_X h\,dm\,.\end{aligned}$$

Επειδή

$$\int_X g\,dm = \int_X h\,dm\,,$$

συμπεραίνουμε ότι για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq X$ είναι

$$\int_E g\,dm = \int_E h\,dm$$

και κατά συνέπεια $\int_E (g-h)\,dm = 0$.

Αν $E_+ := \{x \in X : g(x) - h(x) \geq 0\}$ και $E_- := \{x \in X : g(x) - h(x) < 0\}$, τα E_+, E_- είναι ξένα μεταξύ τους μετρήσιμα υποσύνολα του X και επομένως

$$\begin{aligned}\int_X |g-h|\,dm &= \int_{E_+} |g-h|\,dm + \int_{E_-} |g-h|\,dm\\ &= \int_{E_+} (g-h)\,dm - \int_{E_-} (g-h)\,dm = 0\,.\end{aligned}$$

Άρα $g = h$ $\sigma.\pi.$ στο X.

■

Θ4. (α΄) Διατυπώστε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και το λήμμα Fatou. Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. (1,5 μον.)

(β΄) Αν η συνάρτηση $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ είναι μετρήσιμη με $\int_0^1 f(x)\,dx < \infty$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^n} f(x)\,dx = \int_1^\infty f(x)\,dx\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Αν $f_n(x) := \frac{x^n}{1+x^n} f(x)$, η (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με $f_n(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1)$. Επειδή η $f \in L_1([0,1])$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0\,.$$

Η $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} f(x)$ είναι αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $[1, \infty)$ με

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/x^n + 1} f(x) = f(x)\,,$$

για κάθε $x \in (1, \infty)$. Επομένως από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{x^n}{1+x^n} f(x)\, dx = \int_1^\infty f(x)\, dx\,.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^n} f(x)\, dx \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} f(x)\, dx + \int_1^\infty \frac{x^n}{1+x^n} f(x)\, dx \right) \\
&\quad = \int_1^\infty f(x)\, dx\,.
\end{aligned}$$

■

5.5 Ακαδημαϊκό έτος 2011–12

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

17 Μαρτίου, 2012

Θ1. (α΄) Έστω $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω (E_n) μια οποιαδήποτε ακολουθία μετρήσιμων συνόλων. Δείξτε ότι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(E_n\right) .$$

(Αν χρειαστείτε κάποια βοηθητική πρόταση, διατυπώστε την χωρίς απόδειξη.) (0,8 μον.)

(β΄) Να αναφέρετε τις βασικές ιδιότητες τόσο του τριαδικού όσο και ενός γενικευμένου συνόλου Cantor. Μπορείτε να βρείτε ακολουθία (A_n) μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$, έτσι ώστε κάθε A_n να μην περιέχει ανοικτά διαστήματα και η ένωση των A_n να έχει μέτρο Lebesgue 1; (1 μον.)

(γ΄) Έστω οι συναρτήσεις $f : E \to \mathbb{R}$ και $g : f(E) \to \mathbb{R}$, όπου $E \in \mathcal{M}$. Αν η f είναι μετρήσιμη και η g είναι συνεχής, δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. (0,7 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Για τις ιδιότητες τόσο του τριαδικού όσο και ενός γενικευμένου συνόλου Cantor παραπέμπουμε στο [17].

Έστω A_n, $A_n \subset [0,1]$, ένα γενικευμένο σύνολο Cantor με $m(A_n) = 1 - 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ (το A_1 είναι το τριαδικό σύνολο Cantor με $m(A_1) = 0$). Τα A_n δεν περιέχουν ανοικτά διαστήματα. Αν $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε

$$A_n \subset A \subset [0,1] , \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

και επομένως

$$1 - \frac{1}{n} = m(A_n) \leq m(A) \leq m([0,1]) = 1\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Άρα $m(A) = 1$.

(γ΄) Παραπέμπουμε στο [17].

■

Θ2. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο.

(α΄) Διατυπώστε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων καθώς επίσης και για φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν (f_n), $f_n : X \to [0,\infty]$, είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης δείξτε ότι

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, dm\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Υποθέτουμε ότι το X με $m(X) > 0$ έχει *σ-πεπερασμένο* μέτρο, δηλαδή $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, όπου (A_n) είναι ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων με $m(A_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Αν

$$f_n = \frac{1}{2^n\,(1 + m(A_n))}\, \chi_{A_n}\,,$$

δείξτε ότι η $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L_1(X)$ με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in X$.

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Από το (α΄) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_X f\,dm &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_X \frac{1}{2^n(1+m(A_n))}\,\chi_{A_n}\,dm\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(A_n)}{2^n(1+m(A_n))} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1\end{aligned}$$

και επομένως η $f \in L_1(X)$. Επειδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(1+m(A_n))} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1\,,$$

είναι $0 \le f(x) \le 1$ για κάθε $x \in X$.

Είναι $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\,(1+m(A_n))}\,\chi_{A_n}(x) = 0$ για κάποιο $x \in X$, αν και μόνο αν $\chi_{A_n}(x) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Ισοδύναμα $x \notin A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Άτοπο επειδή $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Επομένως $f(x) > 0$ για κάθε $x \in X$.

Έστω $f(x) = 1$ για κάποιο $x \in X$. Τότε,

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\,(1+m(A_n))}\,\chi_{A_n}(x) \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1$$

και κατά συνέπεια

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[1 - \frac{1}{1+m(A_n)}\,\chi_{A_n}(x)\right] = 0\,.$$

Όμως το άθροισμα της σειράς μη αρνητικών όρων είναι μηδέν αν και μόνο αν κάθε όρος της σειράς είναι μηδέν, δηλαδή

$$\frac{1}{1+m(A_n)}\,\chi_{A_n}(x) = 1\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Ισοδύναμα, $x \in A_n$ και $m(A_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε συνεπάγεται ότι και $m(X) = 0$ που είναι άτοπο. Επομένως $f(x) < 1$ για κάθε $x \in X$. Άρα $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in X$.

■

Θ3. (α΄) Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα ομοιόμορφης σύγκλισης για μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων (f_n), $f_n : E \to \mathbb{R}$, όπου E Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. (1,3 μον.)

(β΄) Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων με

$$f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-x/n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρεθεί η $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ για κάθε $x \in [0, \infty)$. Συγκλίνει η (f_n) ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$; Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} f_n \, dm \neq \int_{[0,\infty)} f \, dm$. Γιατί δεν εφαρμόζεται το θεώρημα ομοιόμορφης σύγκλισης;

(1,2 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Επειδή

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup\{|f_n(x)| : x \in [0, \infty)\} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \geq 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$\int_{[0,\infty)} f_n(x) \, dm(x) = \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-x/n} \, dx = 1$$

και επομένως $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f \, dm$. Δεν εφαρμόζεται το θεώρημα ομοιόμορφης σύγκλισης επειδή $m([0, \infty)) = \infty$.

■

Θ4. (α΄) Διατυπώστε το λήμμα Fatou και υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^3}{1 + n^2 x^3} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \, dx.$$

(1,5 μον.)

(β΄) Διατυπώστε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue και υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n^3x^{3/2}}{1+n^2x^3}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\,dx\,.$$

(1,5 μον.)

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

Λύση.

(α΄) Για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ η $f_n(x)=\frac{n^3}{1+n^2x^3}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ είναι συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση στο $[0,1]$. Είναι $f_n(0)=0$ και

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2x}{1+n^2x^3}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}=\frac{1}{x^2}\,,\ \text{για κάθε } x\in(0,1]\,.$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1\frac{1}{x^2}\,dx=+\infty\,, \qquad \text{(αποκλίνει)}$$

από το λήμμα Fatou έχουμε

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n^3}{1+n^2x^3}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\,dx\\ &\geq\int_0^1\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{n^3}{1+n^2x^3}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)\,dx=\int_0^1\frac{1}{x^2}\,dx=+\infty\,.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n^3}{1+n^2x^3}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\,dx=+\infty\,.$$

(β΄) Για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ η $f_n(x)=\frac{n^3x^{3/2}}{1+n^2x^3}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ είναι συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση στο $[0,1]$. Είναι $f_n(0)=0$ και

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2x^{5/2}}{1+n^2x^3}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\,,\ \text{για κάθε } x\in(0,1]\,.$$

Επίσης

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \frac{n^3x^{3/2}}{1+n^2x^3}\sin\left(\frac{x}{n}\right) \\ &\leq \frac{n^3x^{3/2}}{1+n^2x^3}\cdot\frac{x}{n} = \frac{n^2x^{5/2}}{1+n^2x^3} < \frac{1}{\sqrt{x}}\,, \quad \text{για κάθε } x\in(0,1] \end{aligned}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

συγκλίνει. Αν $g(x) := 1/\sqrt{x}$, τότε $g \in L_1([0,1])$ και $|f_n(x)| < g(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $x \in (0,1]$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n^3x^{3/2}}{1+n^2x^3}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\,dx = \int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,.$$

■

Επαναληπτικές Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

8 Οκτωβρίου, 2012

Θ1. Έστω $\mathcal{M}$ η σ-άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και έστω m^* το εξωτερικό μέτρο Lebesgue.

(α΄) Αν $E \subset \mathbb{R}$ με $m^*(E) = 0$, δείξτε ότι $E \in \mathcal{M}$. (0,5 μον.)

(β΄) Αν $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, δείξτε ότι $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$. (1 μον.)

(γ΄) Έστω $A \triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ η συμμετρική διαφορά των συνόλων $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Αν $m^*(A \triangle B) = 0$ και $B \in \mathcal{M}$, δείξτε ότι $A \in \mathcal{M}$. (0,8 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στις σημειώσεις του μαθήματος.

(β΄) Παραπέμπουμε στις σημειώσεις του μαθήματος.

(γ΄) Επειδή $A \setminus B, B \setminus A \subseteq A \triangle B$ και $m^*(A \triangle B) = 0$, είναι $m^*(A \setminus B) = m^*(B \setminus A) = 0$ και κατά συνέπεια $A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{M}$. Όμως

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

με $A \setminus B \in \mathcal{M}$ και $A \cap B = B \setminus (B \setminus A) \in \mathcal{M}$. Άρα, $A \in \mathcal{M}$.

■

Θ2. Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ ο χώρος μέτρου του Lebesgue και έστω $X \in \mathcal{M}$.

(α΄) (**Λήμμα Borel-Cantelli**) Αν (E_n) είναι ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του X με $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty$, δείξτε ότι το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε άπειρο το πλήθος E_n, δηλαδή το $\overline{\lim} E_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, έχει μέτρο Lebesgue μηδέν.

(1 μον.)

(β΄) Έστω (f_n), $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\left\{x \in X : |f_n(x)| > 1\right\} < \infty\,,$$

δείξτε ότι

$$-1 \leq \underline{\lim} f_n(x) \leq \overline{\lim} f_n(x) \leq 1\,, \quad \text{σχεδόν για κάθε } x \in X\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Έστω $E_n := \{x \in X : |f_n(x)| > 1\}$. Η (E_n) είναι ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του X με $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty$. Τότε από το λήμμα Borel-Cantelli σχεδόν όλα τα $x \in X$ ανήκουν σε πεπερασμένα το πολύ E_n. Επομένως υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ σχεδόν κάθε $x \in X$ δεν ανήκει στο E_n. Ισοδύναμα,

$$\text{για κάθε } n \geq N\text{: } |f_n(x)| \leq 1 \text{ σχεδόν για κάθε } x \in X\,.$$

Άρα,

$$-1 \leq \underline{\lim} f_n(x) \leq \overline{\lim} f_n(x) \leq 1\,, \quad \text{σχεδόν για κάθε } x \in X\,.$$

■

Θ3. (α') Έστω $g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ με

$$\varphi(A) := \int_A g\, dm\,,$$

όπου $A \in \mathcal{M}$. Δείξτε ότι το φ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

(0,7 μον.)

(β') Έστω $f \in L_1(E)$, όπου $E \in \mathcal{M}$.

(i) Αν (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του E, δείξτε ότι

$$\int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, dm\,.$$

(1 μον.)

(ii) Αν $E_n := \{x \in E : |f(x)| \geq n\}$, αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\text{για κάθε } n \geq N \text{ είναι } \left| \int_{E_n} f\, dm \right| < \varepsilon\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α') Παραπέμπουμε στο [17].

(β') (i) Επειδή $f \in L_1(E)$, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στα μετρήσιμα υποσύνολα του E. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$\int_{E_n} f\, dm = \int_{E_n} f^+\, dm - \int_{E_n} f^-\, dm\,.$$

με $\int_{E_n} f^+\,dm < \infty$ και $\int_{E_n} f^-\,dm < \infty$. Αν

$$\varphi(A) := \int_A f^+\,dm\,,$$

όπου A μετρήσιμο υποσύνολο του E, από το (α′) το φ είναι ένα θετικό μέτρο. Επειδή η (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του E με $\varphi(E_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, από γνωστή ιδιότητα του θετικού μέτρου

$$\varphi(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) \Leftrightarrow \int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f^+\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f^+\,dm\,.$$

Παρόμοια έχουμε

$$\int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f^-\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f^-\,dm\,.$$

Παρατηρούμε ότι τα όρια $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f^+\,dm$, $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f^-\,dm$ είναι πραγματικοί μη αρνητικοί αριθμοί. Άρα,

$$\begin{aligned}
\int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f\,dm &= \int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f^+\,dm - \int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f^-\,dm \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f^+\,dm - \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f^-\,dm \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{E_n} f^+\,dm - \int_{E_n} f^-\,dm \right) = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,dm\,.
\end{aligned}$$

(ii) Αν $E_n := \{x \in E : |f(x)| \geq n\}$, η (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του E με

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x \in E : |f(x)| = \infty\}\ .$$

Επειδή $f \in L_1(E)$, είναι $|f| < \infty$ σχεδόν παντού στο E και κατά συνέπεια

$$m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = m(\{x \in E : |f(x)| = \infty\}) = 0\,.$$

Επομένως, από το (i) έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, dm = \int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f\, dm = 0\,.$$

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\text{για κάθε } n \geq N \text{ είναι } \left| \int_{E_n} f\, dm \right| < \varepsilon\,.$$

■

Θ4. (α΄) Διατυπώστε το λήμμα Fatou. Έστω η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με

$$f_n = \frac{1}{n}\chi_{[-n,\,n]}\,.$$

Να βρεθεί η $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συγκλίνει η (f_n) ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$; Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm$. Ποιο είναι το συμπέρασμα για την ακολουθία (f_n) στο λήμμα Fatou; Εφαρμόζεται το θεώρημα ομοιόμορφης σύγκλισης; (1,5 μον.)

(β΄) Διατυπώστε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. Αν η συνάρτηση f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 f(x) \sin\left(\frac{x}{n}\right)\, dx = \int_0^1 x f(x)\, dx\,.$$

(1,5 μον.)

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

Λύση.

(α΄) *Λήμμα Fatou*: Αν (f_n) είναι ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$, τότε

$$\int_E \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)\, \mathrm{d}m \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\, \mathrm{d}m\,. \tag{5.1}$$

Αν $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[-n,\,n]}$, τότε

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup\{|f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Δηλαδή $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-n,n]} \, dm = \frac{1}{n} m([-n,\, n]) = 2$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = 2 > 0 = \int_{\mathbb{R}} f \, dm = \int_{\mathbb{R}} (\lim_{n\to\infty} f_n) \, dm \, .$$

Επομένως έχουμε αυστηρή ανισότητα στην (5.1).

Δεν εφαρμόζεται το θεώρημα ομοιόμορφης σύγκλισης επειδή $m(\mathbb{R}) = \infty$.

(β') Αν $f_n(x) := nf(x)\sin\left(\frac{x}{n}\right)$, η (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$. Είναι

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} nf(x)\sin\left(\frac{x}{n}\right) \\ &= xf(x) \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \\ &= xf(x) \, , \text{ για κάθε } x \in [0,1] \, . \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= n|f(x)|\sin\left(\frac{x}{n}\right) \\ &\le n|f(x)| \cdot \frac{x}{n} \\ &= x|f(x)| \le |f(x)| \, , \text{ για κάθε } x \in [0,1] \, . \end{aligned}$$

Επειδή η $|f| \in L_1([0,1])$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 f(x)\sin\left(\frac{x}{n}\right) \, dx = \int_0^1 xf(x) \, dx \, .$$

■

5.6 Ακαδημαϊκό έτος 2010–11

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

4 Μαρτίου, 2011

Θ1. Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ ο χώρος μέτρου του Lebesgue και έστω m^* το εξωτερικό μέτρο Lebesgue.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι για κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ υπάρχει ένα G_δ σύνολο $G \in \mathcal{M}$, τέτοιο ώστε $A \subseteq G$ και $m^*(A) = m(G)$. (1 μον.)

(β΄) Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων συνόλων (E_n) με $A_n \subseteq E_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Να αποδειχθεί ότι

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Έστω (ε_n) ακολουθία θετικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$(μπορούμε να πάρουμε $\varepsilon_n = 1/n$). Είναι γνωστό ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει ανοικτό σύνολο G_n με $G_n \supseteq A$, τέτοιο ώστε $m(G_n) \leq m^*(A) + \varepsilon_n$. Αν $G := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, τότε το $G \in \mathcal{M}$ είναι ένα G_δ σύνολο τέτοιο ώστε

$$A \subseteq G \subseteq G_n \quad \text{και} \quad m^*(A) \leq m(G) \leq m(G_n) < m^*(A) + \varepsilon_n\,,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Άρα, $m^*(A) = m(G)$.

(β΄) Έστω $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Τότε, από το (α΄) υπάρχουν σύνολα $G, G_n \in \mathcal{M}$ με $A \subseteq G$, $A_n \subseteq G_n$ και $m^*(A) = m(G)$, $m^*(A_n) = m(G_n)$. Θέτουμε

$$D_n = E_n \cap G_n \cap G\,.$$

Τα D_n είναι ξένα ανά δύο Lebesgue μετρήσιμα σύνολα με $A_n \subseteq D_n \subseteq G_n$. Επομένως

$$m^*(A_n) \leq m^*(D_n) = m(D_n) \leq m(G_n)$$

και κατά συνέπεια $m^*(A_n) = m(D_n)$. Τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(D_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right).$$

(τα $D_n \in \mathcal{M}$ είναι ξένα ανά δύο)

Επειδή $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \subseteq G$, είναι

$$m^*(A) \leq m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) \leq m(G)$$

και κατά συνέπεια $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = m^*(A)$. Άρα,

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = m^*(A) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

■

Θ2. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $X \in \mathcal{M}$, είναι μετρήσιμη.

(α΄) Αν $\alpha > 0$, να αποδειχθεί ότι

$$m\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X |f(x)|\, dm(x).$$

(0,5 μον.)

(β΄) Έστω $f \in L_1(X)$ και έστω $\mathrm{supp} f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ ο *φορέας* της f. Να αποδειχθεί ότι το Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $\mathrm{supp} f$ έχει σ-πεπερασμένο μέτρο, δηλαδή να αποδειχθεί ότι

$$\mathrm{supp} f = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

όπου (A_n) είναι ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων με $m(A_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Έστω $A_n = \{x \in X : |f(x)| > 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή η $|f|$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, η (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του X με $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Επειδή η $f \in L_1(X)$, από το (α΄) έχουμε

$$m(A_n) = m\left(\left\{x \in X : |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n \int_X |f(x)|\, dm(x) < \infty\,.$$

Επομένως, $m\,(A_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

■

Θ3. (**B. Levi**) Έστω X Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω (f_n), $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, μονότονη ακολουθία συναρτήσεων με $f_n \in L_1(X)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Αν $f := \lim_{n\to\infty} f_n$, να αποδειχθεί ότι η $f \in L_1\,(X)$ αν και μόνο αν το όριο $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, dm$ είναι πεπερασμένο. Αν το όριο $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, dm$ είναι πεπερασμένο, τότε

$$\int_X f\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, dm\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (f_n) είναι αύξουσα, αν η (f_n) είναι φθίνουσα τότε θεωρούμε τη $(-f_n)$. Επειδή η $f_1 \in L_1(X)$, το σύνολο $A = \{x \in X : |f_1(x)| < \infty\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο με $m\,(X \setminus A) = 0$. Οι συναρτήσεις $f_n\chi_A - f_1\chi_A$ είναι καλά ορισμένες. Η $\left(f_n\chi_A - f_1\chi_A\right)$ είναι αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο X με

$$\lim_{n\to\infty} \left(f_n\chi_A - f_1\chi_A\right) = f\chi_A - f_1\chi_A\,.$$

Τότε, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης

$$\int_X \left(f\chi_A - f_1\chi_A\right)\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_X \left(f_n\chi_A - f_1\chi_A\right)\, dm\,.$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$\int_X f_n \, dm = \int_A f_n \, dm + \int_{X \setminus A} f_n \, dm = \int_A f_n \, dm \,,$$

τελικά έχουμε

$$\int_X \Big(f\chi_A - f_1\chi_A \Big) \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, dm - \int_X f_1 \, dm \,. \tag{5.2}$$

Από την (5.2) έπεται ότι η $f\chi_A - f_1\chi_A \in L_1(X)$ και κατά συνέπεια η $f \in L_1(X)$, αν και μόνο αν το όριο $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, dm$ είναι πεπερασμένο.

Αν το όριο $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, dm$ είναι πεπερασμένο, τότε η $f \in L_1(X)$ και από την (5.2) παίρνουμε

$$\int_X f \, dm - \int_X f_1 \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, dm - \int_X f_1 \, dm \,.$$

Όμως το ολοκλήρωμα $\int_X f_1 \, dm$ υπάρχει(είναι πραγματικός αριθμός) και επομένως

$$\int_X f \, dm = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, dm \,.$$

■

Θ4. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Υποθέτουμε ότι η (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο X.

(α΄) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης να αποδειχθεί το λήμμα Fatou, δηλαδή ότι

$$\int_X \Big(\liminf_{n\to\infty} |f_n| \Big) \, dm \le \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n| \, dm \,.$$

(1 μον.)

(β΄) Έστω $f_n \in L_1(X)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ με $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ σχεδόν παντού στο X. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subset X$, μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g \ge 0$ και ένας $n_0 \in \mathbb{N}^*$, έτσι ώστε για κάθε $n \ge n_0$ είναι

$$\int_{X \setminus A} |f_n| \, dm < \varepsilon \;\text{ και } |f_n| \le g \text{ στο } A \,.$$

Να αποδειχθεί ότι κάτω από αυτές τις συνθήκες η $f \in L_1(X)$ και ότι
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, dm = \int_X f \, dm \, .$$
(2 μον.)

Λύση.

(α΄) Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Είναι
$$\begin{aligned}\int_{X\setminus A} |f| \, dm &= \int_{X\setminus A} \Big(\lim_{n\to\infty} |f_n|\Big) \, dm \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \int_{X\setminus A} |f_n| \, dm \qquad \text{(λήμμα Fatou)} \\ &\le \varepsilon \, .\end{aligned}$$

Από την υπόθεση έχουμε $|f| \le g$ σχεδόν παντού στο A και επομένως
$$\int_X |f| \, dm = \int_A |f| \, dm + \int_{X\setminus A} |f| \, dm \le \int_A g \, dm + \varepsilon \, ,$$
δηλαδή η $f \in L_1(X)$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ σχεδόν παντού στο A και για κάθε $n \ge n_0$ είναι $|f_n| \le g$ στο A, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έχουμε
$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n - f| \, dm = 0 \, .$$
Τότε, για κάθε $n \ge n_0$ είναι
$$\begin{aligned}\int_X |f_n - f| \, dm &= \int_{X\setminus A} |f_n - f| \, dm + \int_A |f_n - f| \, dm \\ &\le \int_{X\setminus A} |f_n| \, dm + \int_{X\setminus A} |f| \, dm + \int_A |f_n - f| \, dm \\ &< 2\varepsilon + \int_A |f_n - f| \, dm\end{aligned}$$

και κατά συνέπεια

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, dm \le 2\varepsilon \, .$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, dm = \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, dm = 0$$

και αυτό συνεπάγεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, dm = \int_X f \, dm \, .$$

■

Θ5. Να διατυπωθεί το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue και να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-x^n} \arctan(nx) \, dx \, .$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (2 μον.)

Λύση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η $f_n(x) = e^{-x^n} \arctan(nx)$ είναι συνεχής μη αρνητική συνάρτηση στο $[0, \infty)$ με

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x > 1 \, , \\ \pi/2e & \text{αν } x = 1 \, , \\ \pi/2 & \text{αν } 0 < x < 1 \, , \\ 0 & \text{αν } x = 0 \, . \end{cases}$$

Επίσης $|f_n(x)| \le g(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $x \in [0, \infty)$ με

$$g(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{αν } 0 \le x \le 1 \, , \\ (\pi/2)e^{-x} & \text{αν } x > 1 \, . \end{cases}$$

Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty g(x) \, dx = \int_0^1 \frac{\pi}{2} \, dx + \int_1^\infty \frac{\pi}{2} e^{-x} \, dx = \frac{\pi}{2}(1 + e^{-1})$$

συγκλίνει, η $g \in L_1([0,\infty))$ και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}\arctan(nx)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\pi}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

■

Επαναληπτικές Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

22 Οκτωβρίου, 2011

Θ1. Έστω m^* το εξωτερικό μέτρο Lebesgue.

(α') Αν (E_n) είναι αριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) \le \sum_{n=1}^\infty m^*(E_n)\,.$$

(1 μον.)

(β') Αν A, B είναι υποσύνολα του $[0,1]$ με $A\cup B=[0,1]$, να αποδειχθεί ότι

$$m^*(A) \ge 1 - m^*(B)\,.$$

(0,5 μον.)

Λύση.

(α') Παραπέμπουμε στο [17].

(β') Είναι

$$1 = m^*([0,1]) = m^*(A\cup B) \le m^*(A) + m^*(B)$$

και επομένως

$$m^*(A) \ge 1 - m^*(B)\,.$$

■

Θ2. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο.

(α΄) Υποθέτουμε ότι (f_n), $f_n : X \to [0,\infty]$, είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Διατυπώστε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης

(i) αν η (f_n) είναι αύξουσα ακολουθία

και

(ii) αν η (f_n) είναι φθίνουσα ακολουθία. (0,5 μον.)

(β΄) Αν $m(X) < \infty$ και η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_X e^{-|f(x)|^2/t}\, dm(x)\,.$$

(1,5 μον.)

(γ΄) Δώστε ένα παράδειγμα φθίνουσας ακολουθίας φραγμένων και μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων (f_n) στο $\mathbb{R}$, τέτοιας ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm > \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n\, dm\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Έστω $f_n(x) := e^{-|f(x)|^2/t_n}$, όπου t_n φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Η f_n είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων και θετικών συναρτήσεων με

$$\int_X f_n(x)\, dm(x) = \int_X e^{-|f(x)|^2/t_n}\, dm(x) \leq \int_X 1\, dm(x) = m(X) < \infty\,.$$

Αν $f = 0$ στο $A \subseteq X$, τότε το σύνολο A είναι Lebesgue μετρήσιμο και

$$\begin{aligned}\int_X e^{-|f(x)|^2/t}\, dm(x) &= \int_A e^{-|f(x)|^2/t}\, dm(x) + \int_{X\setminus A} e^{-|f(x)|^2/t}\, dm(x)\\ &= \int_A 1\, dm(x) + \int_{X\setminus A} e^{-|f(x)|^2/t}\, dm(x)\\ &= m(A) + \int_{X\setminus A} e^{-|f(x)|^2/t}\, dm(x)\,.\end{aligned}$$

Επειδή $f \neq 0$ στο $X \setminus A$, η $f_n \longrightarrow 0$ στο $X \setminus A$ και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων και μη αρνητικών συναρτήσεων

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X\setminus A} e^{-|f(x)|^2/t_n}\, dm(x) = \int_{X\setminus A} \Big(\lim_{n\to\infty} e^{-|f(x)|^2/t_n} \Big)\, dm(x) = 0\,.$$

Επομένως $\lim_{t\downarrow 0} \int_{X\setminus A} e^{-|f(x)|^2/t}\, dm(x) = 0$ και κατά συνέπεια

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_X e^{-|f(x)|^2/t}\, dm(x) = m(A)\,.$$

Ειδικά αν $f \neq 0$ $\sigma.\pi.$ στο X, τότε $\lim_{t\downarrow 0} \int_{X\setminus A} e^{-|f(x)|^2/t}\, dm(x) = 0.$

(γ΄) Έστω $f_n = \dfrac{1}{n}\chi_{[n,\,\infty)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Παρατηρούμε ότι η f_n είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων και μη αρνητικών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με $|f_n| \leq 1$. Είναι $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ και

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = \int_{[n,\,\infty)} \frac{1}{n}\, dm = \infty\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, dm = \infty > 0 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n\, dm\,.$$

■

Θ3. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και έστω (f_n), $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων.

(α΄) Αν $\int_E |f_n|\, dm < \infty$, να αποδειχθεί ότι $|f_n| < \infty$ σχεδόν παντού στο E. (0,8 μον.)

(β΄) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης να αποδειχθεί ότι

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n|\, dm\,.$$

(0,7 μον.)

(γ΄) Αν $f_n \in L_1(E)$, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f \in L_1(E)$ είναι τέτοια ώστε

$$\int_E |f_n - f|\, dm \leq \frac{1}{n^2}\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Να αποδειχθεί ότι $f_n \longrightarrow f$ σχεδόν παντού στο E. (1 μον.)

Απόδειξη. (α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(γ΄) Από την υπόθεση έχουμε

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f|\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n - f|\, dm \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\,.$$

Επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f| < \infty$ $\sigma.\pi.$ στο E, δηλαδή η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f| \text{ συγκλίνει } \sigma.\pi. \text{ στο } E\,.$$

Όμως είναι γνωστό ότι αν μια σειρά συγκλίνει, τότε ο γενικός όρος της σειράς τείνει στο μηδέν. Άρα, $f_n \longrightarrow f$ $\sigma.\pi.$ στο E.

□

Θ4. Διατυπώστε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. Έστω $f_n, f \in L_1(E)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Αν $f_n \longrightarrow f$ $\sigma.\pi.$ στο E, αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} (\|f_n\|_1 - \|f\|_1 - \|f_n - f\|_1) = \lim_{n\to\infty} \int_E ||f_n| - |f| - |f_n - f||\, dm = 0\,.$$

Ειδικά αν $\|f_n\|_1 \longrightarrow \|f\|_1$, τότε $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$. (2 μον.)

Λύση. Επειδή

$$\begin{aligned} |\|f_n\|_1 - \|f\|_1 - \|f_n - f\|_1| &= \left| \int_E (|f_n| - |f| - |f_n - f|)\, dm \right| \\ &\leq \int_E ||f_n| - |f| - |f_n - f||\, dm\,, \end{aligned}$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_E ||f_n|-|f|-|f_n-f||\,dm = 0\,.$$

Όμως, από την υπόθεση έχουμε

$$||f_n|-|f|-|f_n-f|| \longrightarrow 0 \;\sigma.\pi.\ \text{στο}\ E\,.$$

Επίσης είναι

$$\begin{aligned} ||f_n|-|f|-|f_n-f|| &\le ||f_n|-|f_n-f||+|f| \\ &\le |f_n+(f-f_n)|+|f| = 2|f|\,, \end{aligned}$$

με $2f \in L_1(E)$. Τότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\int_E ||f_n|-|f|-|f_n-f||\,dm \\ &\quad = \int_E \Big(\lim_{n\to\infty} ||f_n|-|f|-|f_n-f||\Big)\,dm = 0\,. \end{aligned}$$

■

Θ5. Αν $g \in L_1(\mathbb{R})$, δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(t) := \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)g(x)\,dm(x)$$

είναι φραγμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$. (1,5 μον.)

Λύση. Επειδή $|\cos(tx)g(x)| \le |g(x)| \in L_1(\mathbb{R})$ η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη. Είναι

$$|f(t)| \le \int_{\mathbb{R}} |\cos(tx)g(x)|\,dm(x) \le \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dm(x)\,,$$

δηλαδή η f είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$.
Έστω (t_n) πραγματική ακολουθία με $\lim_{n\to\infty} t_n = t \in \mathbb{R}$ και έστω

$$g_n(x) := \cos(t_n x)g(x)\,.$$

Επειδή η συνάρτηση $y = \cos x$ είναι συνεχής, η (g_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \cos(tx)g(x)$ και

$$|g_n(x)| \leq |g(x)| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } g \in L_1(\mathbb{R}).$$

Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \cos(t_n x)g(x)\, dm(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n\to\infty} \cos\left((t_n x)g(x)\right)\right) dm(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)g(x)\, dm(x) \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

Δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. ■

5.7 Ακαδημαϊκό έτος 2009–10

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

26 Φεβρουαρίου, 2010

Θ1. Έστω $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, όπου (E_n) αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων με $\mu(E_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Ορίζουμε το $\nu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ με

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\mu(A \cap E_n)}{\mu(E_n) + 1}\,.$$

(α΄) Να αποδειχθεί ότι το ν είναι ένα θετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathfrak{M})$ με $\nu(X) < \infty$. (1 μον.)

(β΄) Έστω $A \in \mathfrak{M}$. Να αποδειχθεί ότι $\mu(A) = 0$ αν και μόνο αν $\nu(A) = 0$. (0,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι προφανές ότι $\nu(\emptyset) = 0$ και

$$\nu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\mu(E_n)}{\mu(E_n) + 1} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty\,.$$

Αν (A_k) είναι αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων, τότε

$$
\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap E_n\right)}{\mu(E_n)+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap E_n)\right)}{\mu(E_n)+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(A_k \cap E_n)}{\mu(E_n)+1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\mu(A_k \cap E_n)}{\mu(E_n)+1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)\,.
\end{aligned}
$$

Επομένως το ν είναι ένα θετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathfrak{M})$ με $\nu(X) < \infty$.

(β΄) Αν $\mu(A) = 0$, τότε $\mu(A \cap E_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και επομένως $\nu(A) = 0$.

Αντίστροφα, αν $\nu(A) = 0$, τότε $\mu(A \cap E_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και η (E_n) είναι αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων, τότε και η $(A \cap E_n)$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων. Επομένως

$$
\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n) = 0\,.
\end{aligned}
$$

■

Θ2. Εστω μ ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων, τέτοιο ώστε $\mu(I) = \ell(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα I ($\ell(I)$ είναι το μήκος του διαστήματος I). Ζητείται να αποδειχθεί ότι $\mu = m$, δηλαδή $\mu(E) = m(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{M}$, όπου $m(E)$ είναι το μέτρο Lebesgue του E.

(α΄) Αποδείξτε πρώτα ότι $\mu(E) = m(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{M}$ υποσύνολο ενός διαστήματος $I_n = (-n, n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. (1 μον.)

(β΄) Αποδείξτε τη γενική περίπτωση, δηλαδή ότι $\mu(E) = m(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{M}$.
Υπόδειξη. Θεωρείστε την αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων (E_n) με

$$E_1 := E \cap I_1 \quad \text{και} \quad E_n := E \cap (I_n \setminus I_{n-1}) \ , \quad \text{για κάθε } n > 1 \, .$$

(0,5 μον.)

Απόδειξη. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [17]. □

Θ3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0 \ , \\ 2^{-k} & \text{αν } x \in [k, k+1),\ k = 0, 1, 2, \dots \, . \end{cases}$$

(α΄) Δείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο

$$f^{-1}\left((-\infty, a]\right) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq a\}$$

είναι Lebesgue μετρήσιμο, δηλαδή η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Με ποιο άλλο τρόπο μπορείτε να δείξετε ότι η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση; (1 μον.)

(β΄) Υπολογίστε τα μέτρα Lebesgue των παρακάτω Lebesgue μετρήσιμων συνόλων

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 1\}, \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 1\},\ \{x \in \mathbb{R} : 1/4 \leq f(x) < 1\}.$$

(0,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq a\} = \begin{cases} \emptyset & \text{αν } a < 0\ , \\ (-\infty, 0) & \text{αν } a = 0\ , \\ (-\infty, 0) \cup [k+1, \infty) & \text{αν } \frac{1}{2^{k+1}} \leq a < \frac{1}{2^k}, \\ & k = 0, 1, 2, \ldots\ , \\ \mathbb{R} & \text{αν } a \geq 1\ . \end{cases}$$

Επομένως το σύνολο $f^{-1}((-\infty, a]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq a\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο και κατά συνέπεια η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$, δεν είναι συνεχής μόνο στους φυσικούς αριθμούς. Επομένως, το ότι η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση προκύπτει και από την εξής γνωστή πρόταση: "Αν μια πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής $\sigma.\pi.$ στο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο E, τότε η f είναι μετρήσιμη".

(β΄) Είναι

$$m(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 1\}) = m(\emptyset) = 0\,,$$

$$m(\{x \in \mathbb{R} : f(x) < 1\}) = m((-\infty, 0) \cup [1, \infty)) = \infty$$

και

$$m(\{x \in \mathbb{R} : 1/4 \leq f(x) < 1\}) = m([1, 2) \cup [2, 3)) = 2\,.$$

■

Θ4. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Υποθέτουμε ότι η (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο E.

(α΄) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης να αποδειχθεί το λήμμα Fatou, δηλαδή ότι

$$\int_E \left(\liminf_{n\to\infty} |f_n|\right)\, dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n|\, dm\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ σχεδόν παντού στο E και ότι $f_n, f \in L_1(E)$, $n = 1, 2, \dots$.

(i) Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\, dm = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_E |f_n|\, dm = \int_E |f|\, dm\,.$$

Υπόδειξη. Αν $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n|\, dm = \int_E |f|\, dm$, θεωρείστε την ακολουθία

$$g_n := |f_n| + |f| - |f_n - f|\,.$$

(1,5 μον.)

(ii) Ισχύει γενικά η παρακάτω συνεπαγωγή

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, dm = \int_E f\, dm \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_E |f_n|\; dm = \int_E |f|\; dm\,;$$

Υπόδειξη. Θεωρείστε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n) στο $[0, 1]$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} n & x \in [0, 1/2n)\ , \\ -n & x \in [1/2n, 1/n)\ , \\ 0 & \text{διαφορετικά}\ . \end{cases}$$

(0,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) (i) Έστω $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\, dm = 0$. Επειδή

$$\begin{aligned} \left| \int_E |f_n|\, dm - \int_E |f|\, dm \right| &= \left| \int_E (|f_n| - |f|)\; dm \right| \\ &\le \int_E ||f_n| - |f||\; dm \\ &\le \int_E |f_n - f|\, dm\,, \end{aligned}$$

τότε και $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n|\, dm = \int_E |f|\, dm$.

Αντίστροφα, έστω $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n|\, dm = \int_E |f|\, dm$.

Αν $g_n := |f_n| + |f| - |f_n - f|$, η (g_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων και μη αρνητικών συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} g_n = 2|f|$ $\sigma.\pi.$ στο E. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_E 2|f|\,dm &= \int_E \lim_{n\to\infty} (|f_n| + |f| - |f_n - f|)\,dm \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \int_E (|f_n| + |f| - |f_n - f|)\,dm \\
&\hfill \text{(λήμμα Fatou)} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(\int_E |f_n|\,dm + \int_E |f|\,dm - \int_E |f_n - f|\,dm \right) \\
&= 2\int_E |f|\,dm + \liminf_{n\to\infty} \left(- \int_E |f_n - f|\,dm \right) \\
&\hfill (\lim_{n\to\infty} \textstyle\int_E |f_n|\,dm = \int_E |f|\,dm) \\
&= \int_E 2|f|\,dm - \limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\,dm\,.
\end{aligned}$$

Δηλαδή $\limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\,dm \le 0$ και αυτό συνεπάγεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\,dm = 0\,.$$

(ii) Έστω

$$f_n = n\chi_{[0,\,1/2n)} - n\chi_{[1/2n,\,1/n)}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Είναι

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\,1]} f_n\,dm &= \int_{[0,\,1/2n)} f_n\,dm + \int_{[1/2n,\,1/n)} f_n\,dm + \int_{[1/n,\,1]} f_n\,dm \\
&= n\frac{1}{2n} - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) = 0
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\,1]} |f_n|\,dm &= \int_{[0,\,1/2n)} |f_n|\,dm + \int_{[1/2n,\,1/n)} |f_n|\,dm \\
&\quad + \int_{[1/n,\,1]} |f_n|\,dm \\
&= n\frac{1}{2n} + n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) = 1\,.
\end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,dm = 0 = \int_E f\,dm$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n|\,dm = 1 \neq 0 = \int_E |f|\,dm\,.$$

■

Θ5. (α΄) Διατυπώστε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue και υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\,1]}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\,dm(x)\,.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (1,5 μον.)

(β΄) Έστω η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x/n)^n x^{1/n}}\,,\quad x>0\,.$$

Να βρεθεί συνάρτηση $g_1 \in L_1\left((0,1]\right)$, τέτοια ώστε $f_n(x) \le g_1(x)$ για κάθε $x \in (0,1]$, $n \ge 2$ και συνάρτηση $g_2 \in L_1\left((1,\infty)\right)$, τέτοια ώστε $f_n(x) \le g_2(x)$ για κάθε $x \in (1,\infty)$, $n \ge 2$. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\,\infty)}\frac{1}{(1+x/n)^n x^{1/n}}\,dm(x) = 1\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Για $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $x \in [0,1]$ είναι

$$\frac{\ln(x+n)}{n} \le \frac{x+n-1}{n} \le 1\,.$$

Αν

$$f_n(x) = \frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x \quad \text{και} \quad g(x) = e^{-x}\,,$$

τότε $|f_n(x)| \leq g(x)$, για κάθε $x \in [0,1]$ και η $g \in L_1([0,1])$. Επειδή για $x \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x+n)}{n} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(x+t)}{t} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{x+t} = 0\,,$$

είναι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\,1]} &\frac{\ln(x+n)}{n} \mathrm{e}^{-x} \cos x \, dm(x) \\ &= \int_{[0,\,1]} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x+n)}{n} \mathrm{e}^{-x} \cos x \right) dm(x) = 0\,.\end{aligned}$$

(β΄) Είναι

$$\int_{(0,\,\infty)} f_n(x)\, dm(x) = \int_{(0,\,1]} f_n(x)\, dm(x) + \int_{(1,\,\infty)} f_n(x)\, dm(x)\,.$$

Έστω $x \in (0,1]$. Τότε $(1+x/n)^{-n} < 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ και $x^{-1/n} \leq x^{-1/2}$ για κάθε $n \geq 2$. Επομένως για κάθε $x \in (0,1]$ και για κάθε $n \geq 2$

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x/n)^n x^{1/n}} < \frac{1}{x^{1/2}}\,.$$

Αν $g_1(x) := 1/x^{1/2}$, επειδή

$$\int_0^1 g_1(x)\, dx = \int_0^1 x^{-1/2}\, dx = 2$$

η $g_1 \in L_1((0,1])$.

Έστω $x \in (1,\infty)$. Τότε $x^{1/n} > 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ και

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n > \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{x^2}{n^2} = \frac{n-1}{2n} x^2 \geq \frac{x^2}{4}\,, \quad \text{για κάθε } n \geq 2.$$

Επομένως για κάθε $x \in (1,\infty)$ και για κάθε $n \geq 2$

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x/n)^n x^{1/n}} < \frac{4}{x^2}\,.$$

Αν $g_2(x) := 4/x^2$, επειδή

$$\int_1^\infty g_2(x)\,dx = 4\int_1^\infty x^{-2}\,dx = 4$$

η $g_2 \in L_1(1,\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+x/n)^n x^{1/n}} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\,\infty)} f_n(x)\,dm(x)\\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{(0,\,1]} f_n(x)\,dm(x) + \lim_{n\to\infty} \int_{(1,\,\infty)} f_n(x)\,dm(x)\\
&= \int_{(0,\,1]} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dm(x) + \int_{(1,\,\infty)} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dm(x)
\end{aligned}$$

(θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue)

$$= \int_{(0,\,1]} e^{-x}\,dm(x) + \int_{(1,\,\infty)} e^{-x}\,dm(x) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1\,.$$

■

Επαναληπτικές Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

13 Σεπτεμβρίου, 2010

Θ1. (α') Έστω $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) < \infty$ και έστω (A_n), (B_n) αριθμήσιμες οικογένειες μετρήσιμων συνόλων με $B_n \subset A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Αποδείξτε πρώτα ότι

$$\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \setminus \bigcup_{n=1}^\infty B_n \subset \bigcup_{n=1}^\infty (A_n \setminus B_n)$$

και στη συνέχεια ότι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) \le \sum_{n=1}^\infty \left(\mu(A_n) - \mu(B_n)\right)\,.$$

(1,3 μον.)

(β΄) Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, όπου το $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Αν

$$f_A(x) = \begin{cases} -A & \text{αν } f(x) < -A \\ f(x) & \text{αν } |f(x)| \leq A \\ A & \text{αν } f(x) > A\,, \end{cases}$$

όπου $A > 0$, δείξτε ότι η f_A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. (0,7 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $x \in (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, τότε $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Επομένως υπάρχει $p \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $x \in A_p$ και $x \notin B_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε, $x \in A_p \setminus B_p$ και αυτό συνεπάγεται ότι $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus B_n)$. Άρα,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus B_n)\,.$$

Επειδή $\mu(X) < \infty$, αν $A, B \in \mathfrak{M}$ με $B \subset A$ τότε ως γνωστόν $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right) \\ &\qquad \text{(}\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\text{)} \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus B_n)\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus B_n) \\ &\qquad \text{(ιδιότητα του μέτρου)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(A_n) - \mu(B_n)\right)\,. \\ &\qquad (B_n \subset A_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

(β΄) Επειδή η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση, τα σύνολα

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in E : f(x) < -A\} = f^{-1}\left((-\infty, -A)\right) , \\ E_2 &= \{x \in E : |f(x)| \leq A\} = f^{-1}\left([-A, -A]\right) , \\ E_3 &= \{x \in E : f(x) > A\} \quad = f^{-1}\left((A, \infty)\right) , \end{aligned}$$

είναι Lebesgue μετρήσιμα. Επειδή

$$f_A = -A\chi_{E_1} + f\chi_{E_2} + A\chi_{E_3} ,$$

τότε και η f_A είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

■

Θ2. Έστω $E \subset \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}$, με $m(E) < \infty$ ($m(E)$ είναι το μέτρο Lebesgue του E). Αν η συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, να αποδειχθεί ότι

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $m\left(\{x \in E : |f(x)| \geq N\}\right) < \varepsilon$.

Υπόδειξη. $E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : (n-1) \leq |f(x)| < n\}$. (1,3 μον.)

Λύση. Επειδή η $|f|$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, τα σύνολα

$$E_n := \{x \in E : (n-1) \leq |f(x)| < n\} , \quad n \in \mathbb{N}^* ,$$

είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο. Είναι $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, οπότε

$$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m\left(\{x \in E : (n-1) \leq |f(x)| < n\}\right) < \infty .$$

Επομένως για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} m\left(\{x \in E : (n-1) \leq |f(x)| < n\}\right) < \varepsilon .$$

Επειδή

$$\{x \in E : |f(x)| \geq N\} = \bigcup_{n=N+1}^{\infty} \{x \in E : (n-1) \leq |f(x)| < n\} ,$$

τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} & m\left(\{x \in E : |f(x)| \geq N\}\right) \\ & \quad = \sum_{n=N+1}^{\infty} m\left(\{x \in E : (n-1) \leq |f(x)| < n\}\right) < \varepsilon \,. \end{aligned}$$

■

Θ3. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμες, $X \in \mathcal{M}$ και έστω τα ολοκληρώματα $\int_X f\, dm$, $\int_X g\, dm$ υπάρχουν.

(α΄) Αν $f \leq g$ $\sigma.\pi.$ στο X, δείξτε ότι

$$\int_X f\, dm \leq \int_X g\, dm \,.$$

Αν $E_1 \subseteq E_2 \subseteq X$, $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ και το $\int_{E_2} f\, dm$ υπάρχει, δείξτε ότι και το $\int_{E_1} f\, dm$ υπάρχει. (1 μον.)

(β΄) Αν $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, όπου τα E_k είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα, τότε τα ολοκληρώματα $\int_{E_k} f\, dm$, $k \in \mathbb{N}^*$, υπάρχουν και

$$\int_X f\, dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f\, dm \,.$$

(0,7 μον.)

(γ΄) Αν $f, g \in L_1(X)$ και

$$\int_X f\, dm = \int_X g\, dm \,,$$

να αποδειχθεί ότι είτε $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο X ή υπάρχει $E \in \mathcal{M}$, $E \subset X$, τέτοιο ώστε

$$\int_E f\, dm > \int_E g\, dm \,.$$

(1,5 μον.)

Απόδειξη. (α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(γ΄) Έστω
$$\int_E f\,dm \le \int_E g\,dm\,,$$
για κάθε $E \in \mathcal{M}$, $E \subset X$. Τότε από το (β΄) έχουμε
$$\int_E f\,dm + \int_{X\setminus E} f\,dm = \int_X f\,dm = \int_X g\,dm = \int_E g\,dm + \int_{X\setminus E} g\,dm\,.$$
Επειδή $\int_E f\,dm \le \int_E g\,dm$, $\int_{X\setminus E} f\,dm \le \int_{X\setminus E} g\,dm$ και τα ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα, από την προηγούμενη ισότητα συνεπάγεται ότι
$$\int_E f\,dm = \int_E g\,dm\,, \quad \text{για κάθε } E \in \mathcal{M},\ E \subseteq X.$$
Αν
$$E_+ = \{x \in X : f(x) - g(x) \ge 0\}\ ,$$
το E_+ είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του X και
$$\begin{aligned}\int_X |f-g|\,dm &= \int_{E_+} |f-g|\,dm + \int_{X\setminus E_+} |f-g|\,dm \\ &= \int_{E_+} (f-g)\,dm - \int_{X\setminus E_+} (f-g)\,dm = 0\,.\end{aligned}$$
Άρα $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο X.

□

Θ4. (α΄) Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$ τέτοια ώστε
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n|\,dm < \infty\,.$$
Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο E. Επιπλέον, αν
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,,$$

να αποδειχθεί ότι η $f \in L_1(E)$ και

$$\int_E f\,dm = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n\,dm\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Θεώρημα B. Levi([17]).

(β΄) Είναι

$$\frac{\ln^2 x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\ln^2 x\,, \quad |x|<1,\ x\neq 0\,.$$

Επειδή

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{2n}\ln^2 x\,dx &= -\frac{1}{2n+1}\lim_{x\to 0+} x^{2n+1}\ln^2 x - \frac{2}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\ln x\,dx \\ &\qquad\text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\ &= \frac{2}{(2n+1)^2}\lim_{x\to 0+} x^{2n+1}\ln x + \frac{2}{(2n+1)^2}\int_0^1 x^{2n}\,dx \\ &\qquad\text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\ &= \frac{2}{(2n+1)^3}\,,\end{aligned}$$

τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{2n}\ln^2 x\right|\,dx = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3} < \infty\,.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\ln^2 x\right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{2n}\ln^2 x\,dx \qquad \text{(Θεώρημα B. Levi)} \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\,.\end{aligned}$$

■

Θ5. Διατυπώστε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(t) = e^{-t}\ln t$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,\infty)$ και ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\ln t\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\,dt\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Είναι

$$\int_{(0,\infty)} |e^{-t}\ln t|\,dm(t) = \int_{(0,1]} |e^{-t}\ln t|\,dm(t) + \int_{(1,\infty)} |e^{-t}\ln t|\,dm(t)\,.$$

Επειδή

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{|e^{-t}\ln t|}{|\ln t|} = \lim_{t\to 0^+} e^{-t} = 1$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 |\ln t|\,dt = -\int_0^1 \ln t\,dt = 1$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 |e^{-t}\ln t|\,dt$ θα συγκλίνει. Επομένως $f(t) = e^{-t}\ln t \in L_1((0,1])$.
Επειδή για κάθε $t \geq 1$

$$|e^{-t}\ln t| = e^{-t}\ln t < te^{-t}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^{\infty} te^{-t}\,dt = \lim_{R\to\infty}\left(-\,te^{-t}\Big|_{t=1}^{R} + \int_1^{\infty} e^{-t}\,dt\right) = 2e^{-1}$$

συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty |e^{-t}\ln t|\, dt = \int_1^\infty e^{-t}\ln t\, dt$ θα συγκλίνει. Επομένως η $f(t) = e^{-t}\ln t \in L_1([1,\infty))$. Άρα η συνάρτηση $f(t) = e^{-t}\ln t$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,\infty)$.

Επειδή $(1-t/n)^n \nearrow e^{-t}$, αν $f_n(t) = (1-t/n)^n \ln t \chi_{(0,n)}(t)$, τότε η (f_n) είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = e^{-t}\ln t \text{ και } |f_n(t)| < |e^{-t}\ln t|\,, \text{ για κάθε } t>0\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\, dt &= \lim_{n\to\infty}\int_{(0,\,\infty)} f_n(t)\, dm(t)\\ &= \int_{(0,\,\infty)} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dm(t)\\ &\qquad \text{(θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue)}\\ &= \int_{(0,\,\infty)} e^{-t}\ln t\, dm(t) = \int_0^\infty e^{-t}\ln t\, dt\,.\end{aligned}$$

■

5.8 Ακαδημαϊκό έτος 2008–9

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

7 Μαρτίου, 2009

Θ 1. (α΄) Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου Lebesgue m^*, δείξτε ότι

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)\,.$$

(0,8 μον.)

(β΄) Ως γνωστόν υπάρχει ακολουθία (E_n) ξένων ανά δύο συνόλων που δεν είναι Lebesgue μετρήσιμα, $E_n \subset (-1,2)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τέτοια ώστε

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)\,,$$

όπου $m^*(E_n) = m^*(E) > 0$ και E είναι το σύνολο του Vitali στο $(0,1)$.

Δώστε ένα παράδειγμα φθίνουσας ακολουθίας (A_n) υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με $m^*(A_1) < \infty$ και

$$m^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \lim_{n\to\infty} m^*(A_n)\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Έστω $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$. Τότε $m^*(A_n) < \infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και η (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του $(-1,2)$. Επομένως η $(m^*(A_n))$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \emptyset\,.$$

Επίσης

$$m^*(A_n) \geq m^*(E_n) = m^*(E) > 0\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Άρα,

$$m^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 < m^*(E) \leq \lim_{n\to\infty} m^*(A_n)\,.$$

■

Θ 2. (α΄) Αν (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων, τότε

$$\lim_{n\to\infty} m\,(A_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ιδιότητα του μέτρου Lebesgue, να αποδειχθεί ότι αν (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων με $m(A_1) < \infty$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

(0,7 μον.)

(β΄) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη και πεπερασμένη σχεδόν παντού στο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο A, με $m(A) < \infty$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $B \subset A$, τέτοιο ώστε $m(A \setminus B) < \varepsilon$ και η f είναι φραγμένη στο B (ο περιορισμός της f στο B είναι φραγμένη συνάρτηση). (1 μον.)

(γ΄) Έστω το διάστημα $I = (0,1)$. Αν το $E \subset I$ είναι μετρήσιμο σύνολο με $m(E) = 1$, να αποδειχθεί ότι το E είναι σύνολο πυκνό στο I.
Αν f είναι μια συνεχής και μη φραγμένη συνάρτηση στο $I = (0,1)$, να δείξετε ότι για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο E του I με $m(I \setminus E) = 0$, ο περιορισμός της f στο E είναι μη φραγμένη συνάρτηση. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17]

(β΄) Έστω

$$A_n = \{x \in A : |f(x)| > n\}\,, n \in \mathbb{N}^* \text{ και } Z = \{x \in A : |f(x)| = \infty\}.$$

Από την υπόθεση είναι $m(Z) = 0$. Επειδή η $|f|$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, η (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων με $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = Z$ και $m(A_1) \leq m(A) < \infty$. Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(Z) = 0\,.$$

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $m(A_N) < \varepsilon$. Είναι $A_N \subset A$ και αν $B = A \setminus A_N$, τότε το B είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με

$$m(A \setminus B) = m(A_N) < \varepsilon \quad \text{και} \quad |f(x)| \leq N\,, \text{ για κάθε } x \in B.$$

Δηλαδή, ο περιορισμός της f στο B είναι φραγμένη συνάρτηση.

(γ΄) Έστω ότι το E δεν είναι σύνολο πυκνό στο $I = (0,1)$. Τότε υπάρχει $x \in I$ και περιοχή $(x-\delta, x+\delta)$ του x, τέτοια ώστε

$$(x-\delta, x+\delta) \cap E = \emptyset\,.$$

Επομένως, $(x-\delta, x+\delta) \subset I \setminus E$ και αυτό συνεπάγεται ότι

$$0 < 2\delta = m\left((x-\delta, x+\delta)\right) \leq m(I \setminus E) = m(I) - m(E) = 0\,.$$

(άτοπο)

Άρα το E είναι σύνολο πυκνό στο I.

Έστω f μια συνεχής και μη φραγμένη συνάρτηση στο $I = (0,1)$ (μια τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x) = 1/x$) και έστω $M > 0$. Επειδή η συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη στο I, υπάρχει $x \in I$ τέτοιο ώστε $|f(x)| > 2M$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x \in I$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap I$ είναι $|f(y) - f(x)| < M$. Επομένως, για κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap I$ είναι

$$|f(y)| > |f(x)| - M > 2M - M = M\,.$$

Επειδή από την υπόθεση $m(E) = m(I) = 1$, το E είναι σύνολο πυκνό στο I και κατά συνέπεια υπάρχει $a \in (x-\delta, x+\delta) \cap E$. Γι' αυτό το $a \in E$ είναι $|f(a)| > M$. Άρα, ο περιορισμός της f στο E είναι μη φραγμένη συνάρτηση.

■

Θ 3. (α') Αν $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, όπου οι συναρτήσεις $f_n : E \to [0, \infty]$, $E \in \mathcal{M}$, είναι μετρήσιμες, δείξτε ότι

$$\int_E f \,\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m \,.$$

(0,8 μον.)

(β') Αν $p, q \in \mathbb{N}^*$, χρησιμοποιώντας το (α') να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+2q} - \frac{1}{p+3q} + \cdots \,.$$

Εφαρμογή. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα των σειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \,.$$

(1,2 μον.)

Λύση.

(α') Παραπέμπουμε στο [17].

(β') Από τη γεωμετρική σειρά $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, $|t| < 1$, για $x \in [0, 1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{x^{p-1}}{1+x^q} &= \frac{x^{p-1}(1-x^q)}{1-x^{2q}} \\ &= x^{p-1}(1-x^q) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2qn} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x^q) x^{p-1+2nq} \,. \end{aligned}$$

Αν

$$f_n(x) := (1-x^q)\, x^{p-1+2nq} \,, \quad x \in [0, 1) \,,$$

οι συναρτήσεις f_n είναι μη αρνητικές και συνεχείς στο $[0,1)$ με

$$\frac{x^{p-1}}{1+x^q} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,, \quad \text{για κάθε } x \in [0,1)\,.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f_n είναι μετρήσιμες και μη αρνητικές στο $[0,1)$, είναι

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1)} \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dm(x) &= \int_{[0,1)} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dm(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1)} f_n(x)\,dm(x) && \text{(από το (α'))} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (1-x^q)x^{p-1+2nq}\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{p-1+2nq} - x^{p-1+(2n+1)q}\right)dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p+2nq} - \frac{1}{p+(2n+1)q}\right).
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p+2nq} - \frac{1}{p+(2n+1)q}\right).$$

Στην ειδική περίπτωση $p = q = 1$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln 2\,.$$

Για $p = 1$, $q = 2$ παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

■

Θ 4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση.

(α΄) Αν $\alpha > 0$ και $E \in \mathcal{M}$, δείξτε ότι

$$m\left(\{x \in E : |f(x)| > \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha}\int_E |f(x)|\, dm(x)\,.$$

(0,5 μον.)

(β΄) Ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, με

$$\varphi(E) := \int_E |f|\; dm\,,$$

όπου $E \in \mathcal{M}$. Δείξτε ότι το φ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. (0,7 μον.)

(γ΄) Έστω $f \in L_1(E)$, όπου $E \in \mathcal{M}$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A_\varepsilon \subseteq E$ τέτοιο ώστε $m(A_\varepsilon) < \infty$ και

$$\int_E |f|\, dm < \int_{A_\varepsilon} |f|\, dm + \varepsilon\,.$$

(1,5 μον.)

Υπόδειξη. Έστω

$$A = \{x \in E : f(x) \neq 0\} \text{ και } A_n = \{x \in E : |f(x)| > 1/n\},\ n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Λύση.

(α΄) Είναι η ανισότητα Chebyshev([17]).

(β΄) Εφαρμογή του θέματος 3(α΄) (παραπέμπουμε στο [17]).

(γ΄) Έστω $A = \{x \in E : f(x) \neq 0\}$ και $A_n = \{x \in E : |f(x)| > 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή η $|f|$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, η (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E με $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Επειδή από τη (β΄) το φ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων, από γνωστή ιδιότητα του μέτρου

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f|\, dm = \int_A |f|\, dm\,.$$

Όμως για κάθε $x \in E \setminus A$ είναι $f(x) = 0$ οπότε

$$\int_E |f|\, dm = \int_A |f|\, dm\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f|\, dm = \int_E |f|\, dm\,.$$

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\int_E |f|\, dm - \int_{A_N} |f|\, dm < \varepsilon$$

και ισοδύναμα

$$\int_E |f|\, dm < \int_{A_N} |f|\, dm + \varepsilon\,.$$

Επειδή η $f \in L_1(E)$, από την (α΄) (ανισότητα Chebyshev) έχουμε

$$m(A_N) \le N \int_E |f|\, dm < \infty\,.$$

Αν $A_\varepsilon := A_N$, το σύνολο $A_\varepsilon \subseteq E$ είναι Lebesgue μετρήσιμο τέτοιο ώστε $m\left(A_\varepsilon\right) < \infty$ και

$$\int_E |f|\, dm < \int_{A_\varepsilon} |f|\, dm + \varepsilon\,.$$

■

Θ 5. (α΄) Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ως γνωστόν

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\,.$$

Αν χ_{A_k} είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου A_k, αποδείξτε μία από τις παρακάτω ισότητες

$$\chi_{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} = \sup_{k\ge n} \chi_{A_k} \quad \text{και} \quad \chi_{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k} = \inf_{k\ge n} \chi_{A_k}\,.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ισότητες αποδείξτε μία από τις παρακάτω ισότητες

$$\limsup \chi_{A_n} = \chi_{\limsup A_n} \quad \text{και} \quad \liminf \chi_{A_n} = \chi_{\liminf A_n} .$$

(0,8 μον.)

(β΄) Διατυπώστε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$ και $x \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) := \int_{(-\infty,\, x]} f\, dm .$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue, για κάθε πραγματική ακολουθία (x_n) με $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$. Δηλαδή ότι η F είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. (1,3 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\begin{aligned}
\chi_{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}(x) = 1 &\iff x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \\
&\iff x \in A_k\,, \quad \forall k \geq n \\
&\iff \chi_{A_k}(x) = 1\,, \quad \forall k \geq n \\
&\iff \inf_{k\geq n} \chi_{A_k}(x) = 1\,.
\end{aligned}$$

Παρόμοια είναι η απόδειξη της άλλης ισότητας.
Τότε

$$\begin{aligned}
\chi_{\liminf A_n} &= \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k} \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} \chi_{A_k} = \liminf \chi_{A_n}\,.
\end{aligned}$$

Ανάλογη είναι η απόδειξη της άλλης ισότητας.

(β΄) Παρατηρούμε ότι

$$F(x_n) = \int_{(-\infty,\, x_n]} f\, dm = \int_{\mathbb{R}} f\chi_{(-\infty,\, x_n]}\, dm\, .$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, από την (α΄) έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \chi_{(-\infty,\, x_n]} = \chi_{(-\infty,\, x]}$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$. Ας σημειωθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \chi_{(-\infty,\, x_n]}(t) \neq \chi_{(-\infty,\, x]}(t)$, το πολύ αν $t = x$. Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} f\chi_{(-\infty,\, x_n]} = f\chi_{(-\infty,\, x]} \;\; \sigma.\pi. \text{ στο } \mathbb{R} \text{ και } \left| f\chi_{(-\infty,\, x_n]} \right| < |f|\, ,$$

όπου $f \in L_1(\mathbb{R})$ (επειδή η $f \in L_1(\mathbb{R})$, είναι $|f| < \infty$ $\sigma.\pi.$). Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F(x_n) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n\to\infty} f\chi_{(-\infty,\, x_n]} \right) dm \\ &= \int_{\mathbb{R}} f\chi_{(-\infty,\, x]}\, dm = \int_{(-\infty,\, x]} f\, dm = F(x)\, .\end{aligned}$$

■

Επαναληπτικές Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

2 Σεπτεμβρίου, 2009

Θ1. (α΄) Να αποδειχθεί ότι για κάθε υποσύνολο E του $\mathbb{R}$ είναι

$$m^*(E) = \inf\left\{ m^*(G) :\; G \supseteq E,\; G \text{ είναι ανοικτό σύνολο} \right\}\, ,$$

όπου m^* είναι το εξωτερικό μέτρο Lebesgue. (0,8 μον.)

(β΄) Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E) < \infty$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ανοικτά, φραγμένα και ξένα ανά δύο διαστήματα $I_1, I_2, \ldots, I_N$ τέτοια ώστε

$$m\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n \right) < \varepsilon \quad \text{και} \quad m\left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n \setminus E \right) < \varepsilon\, .$$

(1,2 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Από το (α΄) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο $G \supset E$, τέτοιο ώστε

$$m(G) - m(E) = m\left(G \setminus E\right) < \varepsilon\,.$$

Επομένως $m(G) < m(E) + \varepsilon < \infty$ και αυτό συνεπάγεται ότι $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, όπου (I_n) είναι αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων. Επειδή

$$m\left(G\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m\left(I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell\left(I_n\right) < \infty,$$

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} m\left(I_n\right)$ συγκλίνει και επομένως υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $\sum_{n=N+1}^{\infty} m\left(I_n\right) < \varepsilon$. Άρα,

$$\begin{aligned} m\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) &\leq m\left(G \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) \\ &= m\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} I_n\right) = \sum_{n=N+1}^{\infty} m\left(I_n\right) < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Επειδή $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, είναι

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n \setminus E\right) \leq m\left(G \setminus E\right) < \varepsilon\,.$$

■

Θ2. (α΄) Έστω E υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subset E$, τέτοιο ώστε

$$m^*\left(E \setminus F_\varepsilon\right) < \varepsilon\,.$$

Να αποδειχθεί ότι $E = F \cup N$, όπου F είναι ένα F_σ σύνολο και $N = E \setminus F$ με $m^*\left(N\right) = 0$ και ότι το σύνολο E είναι Lebesgue μετρήσιμο. (1 μον.)

(β΄) Έστω η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου A Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subset A$ τέτοιο, ώστε $m(A \setminus F) < \varepsilon$ και ο περιορισμός της f στο F είναι συνεχής συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση. (1 μον.)
Υπόδειξη. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $A_c := \{x \in A : f(x) \geq c\}$, $c \in \mathbb{R}$, είναι Lebesgue μετρήσιμο. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό υποσύνολο F του $\mathbb{R}$, θεωρείστε γνωστό ότι το

$$F_c := \{x \in F : f(x) \geq c\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Έστω $c \in \mathbb{R}$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι το $A_c := \{x \in A : f(x) \geq c\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Για $\varepsilon > 0$ από την υπόθεση υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subset A$, τέτοιο ώστε $m(A \setminus F) < \varepsilon$ και ο περιορισμός της f στο F είναι συνεχής συνάρτηση. Αυτό συνεπάγεται ότι το σύνολο

$$F_c := \{x \in F : f(x) \geq c\} = A_c \cap F$$

είναι σχετικά κλειστό στο F, δηλαδή κλειστό ως προς τη σχετική τοπολογία στο F. Επειδή το F είναι κλειστό σύνολο, το F_c είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $F_c \subset A_c$.
Επίσης, επειδή $A_c \setminus F_c \subset A \setminus F$, είναι

$$m^*(A_c \setminus F_c) \leq m^*(A \setminus F) = m(A \setminus F) < \varepsilon\,.$$

Επομένως από το (α΄) το σύνολο A_c είναι Lebesgue μετρήσιμο.

■

Θ3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση.

(α΄) Ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ με

$$\varphi(E) := \int_E |f|\, dm\,,$$

όπου $E \in \mathcal{M}$. Να αποδειχθεί ότι το φ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. (0,7 μον.)

(β΄) Υποθέτουμε ότι η f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη, δηλαδή

$$\forall\, E \in \mathcal{M}, \quad m(E) < \infty \Rightarrow \int_E |f|\, dm < \infty\,.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε για κάθε } A \in \mathcal{M}, \\ m(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f|\, dm < \varepsilon\,.\end{gathered} \tag{5.3}$$

(1,5 μον.)

Υπόδειξη. Έστω ότι δεν ισχύει η (5.3). Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, A_n \in \mathcal{M}\,,\ m(A_n) < \frac{1}{2^n} \text{ και } \int_{A_n} |f|\, dm \geq \varepsilon\,.$$

Αν $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, δείξτε ότι

$$\int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n} |f|\, dm \geq \varepsilon \text{ και } m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 0\,.$$

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Επειδή

$$m(B_n) = m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} m(A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2^n}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^{n-1}}\,,$$

από την υπόθεση συνεπάγεται ότι $\int_{B_n} |f(t)|\, dm < \infty$. Επίσης,

$$\int_{B_n} |f|\, dm \geq \int_{A_n} |f|\, dm \geq \varepsilon\,.$$

Από την (α΄) το φ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. Επειδή $B_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, με $\varphi(B_n) = \int_{B_n} |f|\, dm < \infty$, από γνωστή ιδιότητα του μέτρου

$$\int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n} |f|\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f|\, dm \geq \varepsilon\,.$$

Επειδή $m(B_n) \leq 1/2^{n-1} < \infty$, από την ίδια ιδιότητα για το μέτρο Lebesgue

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(B_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

και επομένως $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 0$. Άρα,

$$0 = \int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n} |f|\, dm \geq \varepsilon\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι δεν ισχύει η (5.3).

Σημείωση. Επειδή $\limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1\,,$$

το ότι $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 0$ προκύπτει και από το λήμμα των Borel-Cantelli.

■

Θ4. Έστω $f \in L_1(\mathbb{R})$.

(α΄) Αν η συνάρτηση φ είναι φραγμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι και η συνάρτηση

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(t-x)\, dm(x)$$

είναι φραγμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$. (1 μον.)

(β΄) Αν η $g \in L_1(\mathbb{R})$, όπου $g(x) = xf(x)$, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi itx}\, dm(x)$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι

$$F'(t) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-2\pi itx}\, dm(x)\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν (h_n) είναι πραγματική ακολουθία, με $h_n \neq 0$ και $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-2\pi itx}\, dm(x)\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή από την υπόθεση $\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(x)| : x \in \mathbb{R}\} < \infty$, είναι $|f(x)\varphi(t-x)| \leq \|\varphi\|_\infty |f(x)| \in L_1(\mathbb{R})$ και η F είναι καλά ορισμένη. Επειδή

$$|F(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)\varphi(t-x)|\, dm(x) \leq \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dm(x)\,,$$

η F είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$.

Έστω (t_n) πραγματική ακολουθία με $\lim_{n\to\infty} t_n = t \in \mathbb{R}$. Αν

$$f_n(x) := f(x)\varphi(t_n - x)\,,$$

η (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με

$$|f_n(x)| \leq \|\varphi\|_\infty |f(x)|\,.$$

Επειδή από την υπόθεση η $f \in L_1(\mathbb{R})$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(t_n - x)\, dm(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f(x)\varphi(t_n - x)\, dm(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(t - x)\, dm(x) \qquad \text{(η } \varphi \text{ είναι συνεχής)}\\ &= F(t)\,,\end{aligned}$$

δηλαδή η F είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(β΄) Επειδή η $f \in L_1(\mathbb{R})$, η F είναι καλά ορισμένη. Έστω (h_n) πραγματική ακολουθία με $h_n \neq 0$ και $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}\frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{e^{-2\pi i h_n x} - 1}{h_n}\, e^{-2\pi i t x}\, dm(x)\\ &= -2\pi i \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{\sin \pi h_n x}{\pi h_n}\, e^{-\pi i h_n x} e^{-2\pi i t x}\, dm(x)\,.\end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την ταυτότητα

$$e^{-2iu} - 1 = e^{-iu}(e^{-iu} - e^{iu}) = -2ie^{-iu} \cdot \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i} = -2ie^{-iu} \sin u\,,$$

με $u = \pi h_n x \in \mathbb{R}$. Επειδή

$$\begin{aligned}\left| f(x)\frac{\sin \pi h_n x}{\pi h_n}\, e^{-\pi i h_n x} e^{-2\pi i t x} \right| &= |f(x)|\frac{|\sin \pi h_n x|}{|\pi h_n|}\\ &\leq |f(x)|\frac{|\pi h_n x|}{|\pi h_n|} = |x f(x)| = |g(x)|\end{aligned}$$

και η $g \in L_1(\mathbb{R})$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n}\\ &\quad = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n\to\infty} f(x)\frac{\sin \pi h_n x}{\pi h_n}\, e^{-\pi i h_n x} e^{-2\pi i t x} \right) dm(x)\\ &\quad = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, e^{-2\pi i t x}\, dm(x)\,.\end{aligned}$$

Ας σημειωθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \pi h_n x}{\pi h_n} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin tx}{t} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} x\,.$$

Άρα, η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$F'(t) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-2\pi i t x}\, dm(x)\,.$$

■

Θ5. (α΄) Υποθέτουμε ότι η μετρήσιμη συνάρτηση $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, δηλαδή $\int_{[a,\infty} |f|\, dm < \infty$. Αν $N \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι το όριο $\lim_{N\to\infty} \int_{[a,N)} f\, dm$ υπάρχει και ότι

$$\lim_{N\to\infty} \int_{[a,N)} f\, dm = \int_{[a,\infty)} f\, dm\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Έστω

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{[n,\,n+1)}(x)\,.$$

Εξετάστε αν $\int_{[1,\infty)} |f|\, dm < \infty$ και αν το όριο $\lim_{N\to\infty} \int_{[1,N)} f\, dm$ υπάρχει, $N \in \mathbb{N}^*$. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή $\left| f\chi_{[a,\,N)} \right| \le |f|$, όπου $f \in L_1\left([a,\infty)\right)$ και

$$\lim_{N\to\infty} f(x)\chi_{[a,\,N)}(x) = f(x)\,,$$

από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue το όριο

$$\lim_{N\to\infty} \int_{[a,N)} f\, dm = \lim_{N\to\infty} \int_{[a,\,\infty)} f\chi_{[a,\,N)}\, dm$$

υπάρχει και είναι

$$\lim_{N\to\infty} \int_{[a,\,N)} f\, dm = \int_{[a,\,\infty)} \left(\lim_{N\to\infty} f\chi_{[a,\,N)} \right) dm = \int_{[a,\infty)} f\, dm\,.$$

(β΄) Η f είναι συνεχής σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$. Είναι

$$\begin{aligned}\int_{[1,\,\infty)} |f|\,dm &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}[n,\,n+1)} |f|\,dm \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[n,\,n+1)} |f|\,dm \\ &\text{(τα σύνολα } [n,\,n+1) \text{ είναι ξένα ανά δύο)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty\end{aligned}$$

και επομένως $\int_{[1,\infty)} |f|\,dm = \infty$.
Επειδή η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}\int_{[1,\,N)} f\,dm &= \int_1^N f(x)\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n}\end{aligned}$$

και ως γνωστόν η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ συγκλίνει. Επομένως το όριο

$$\lim_{N\to\infty} \int_{[1,N)} f\,dm = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

υπάρχει.
Σημείωση. Η $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ είναι ένα άλλο παράδειγμα συνάρτησης για την οποία έχουμε

$$\int_{[0,\infty)} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dm(x) = \infty$$

και

$$\lim_{N\to\infty} \int_{[0,N)} \frac{\sin x}{x}\,dm(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

■

5.9 Ακαδημαϊκό έτος 2007–8

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

26 Φεβρουαρίου, 2008

Θ1. (α΄) Από τον ορισμό, η Borel σ-άλγεβρα $\mathfrak{B}$ παράγεται από τα ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}$. Ζητείται να αποδειχθεί ότι η Borel σ-άλγεβρα παράγεται επίσης από τα κλειστά και φραγμένα διαστήματα $\mathcal{E} = \{[a,b] : a < b\}$. (0,7 μον.)

(β΄) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$ και επί, δηλαδή αμφιμονοσήμαντη. Αν

$$\mathfrak{M} = \{A \subseteq \mathbb{R} : f(A) \in \mathfrak{B}\} ,$$

να αποδειχθεί ότι η $\mathfrak{M}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$ η οποία περιέχει τα σύνολα Borel. Δηλαδή, η f απεικονίζει σύνολα Borel σε σύνολα Borel. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Έστω $\sigma(\mathcal{E})$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{E}$. Επειδή κάθε ανοικτό σύνολο είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος κλειστών και φραγμένων διαστημάτων, τα ανοικτά σύνολα ανήκουν στη σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{E})$ και επομένως $\mathfrak{B} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Όμως τα κλειστά και φραγμένα διαστήματα είναι κλειστά σύνολα και επομένως ανήκουν στη σ-άλγεβρα $\mathfrak{B}$. Επομένως $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{B}$. Άρα, $\mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{E})$.

(β΄) Επειδή η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$ και επί, για κάθε $A, B \subseteq \mathbb{R}$ είναι

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \quad \text{και} \quad f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$$

Θα αποδείξουμε ότι η $\mathfrak{M}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$ η οποία περιέχει τα σύνολα Borel. Πράγματι, επειδή $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, το $\mathbb{R} \in \mathfrak{M}$. Αν

$E \in \mathfrak{M}$, επειδή

$$f(E^c) = f(\mathbb{R} \setminus E) = \mathbb{R} \setminus f(E),$$

τότε $E^c \in \mathfrak{M}$. Επίσης αν (E_n) είναι αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων του $\mathfrak{M}$, τότε $f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(E_n)$ και αυτό αποδεικνύει ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{M}$. Άρα, η $\mathfrak{M}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$.

Τέλος, επειδή η f είναι γνήσια μονότονη και συνεχής, για κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$ είναι $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ ή $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$. Επομένως, η σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}$ περιέχει τα κλειστά και φραγμένα διαστήματα τα οποία από την (α') παράγουν τη Borel σ-άλγεβρα. Άρα, η σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}$ περιέχει όλα τα σύνολα Borel.

■

Θ2. (α') Διατυπώστε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και αποδείξτε ότι αν (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, dm.$$

(0,8 μον.)

(β') Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ με

$$\varphi(E) := \int_E f \, dm,$$

όπου $E \in \mathcal{M}$, δείξτε ότι το φ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. (0,7 μον.)

(γ') Έστω $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, όπου E είναι ένα μετρήσιμο σύνολο με $m(E) < \infty$ και έστω

$$E_n = \{x \in E : n - 1 \leq |f(x)| < n\}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

με $m(E_n) > 0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : E \to \mathbb{R}$, με

$$g(x) = \frac{1}{n^2 m(E_n)}, \quad \text{αν } x \in E_n.$$

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση g είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο E και να εξεταστεί αν η συνάρτηση fg είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο E. (2 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(γ΄) Επειδή η $|f|$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, τα σύνολα E_n, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο με $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Είναι

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m(E_n)} \chi_{E_n}(x)$$

και επομένως η g είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Επειδή

$$\begin{aligned} \int_E |g(x)|\, dm(x) &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} |g(x)|\, dm(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |g(x)|\, dm(x) \qquad \text{(από τη (β΄))} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m(E_n)} m(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\,, \end{aligned}$$

η $g \in L_1(E)$.

Επειδή

$$(n-1)\chi_{E_n}(x) \leq |f(x)|\chi_{E_n}(x) \leq n\chi_{E_n}(x)\,,$$

τότε και

$$(n-1)|g(x)|\chi_{E_n}(x) \leq |f(x)g(x)|\chi_{E_n}(x) \leq n|g(x)|\chi_{E_n}(x)\,, \tag{5.4}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)g(x)|\,dm(x) &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} |f(x)g(x)|\,dm(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f(x)g(x)|\,dm(x) \qquad \text{(από τη (β'))} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E} |f(x)g(x)|\chi_{E_n}(x)\,dm(x) \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \int_{E} |g(x)|\chi_{E_n}(x)\,dm(x) \\
&\qquad \text{(από την (5.4))} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \int_{E_n} |g(x)|\,dm(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \frac{1}{n^2 m(E_n)} m(E_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2} = \infty\,.
\end{aligned}$$

Άρα, η συνάρτηση fg δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο E.

■

Θ3. (α') (**Λήμμα Borel- Cantelli**) Αν (E_n) είναι ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων με $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < +\infty$, να αποδειχθεί ότι το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε άπειρα το πλήθος E_n, δηλαδή το $\overline{\lim}\, E_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, έχει μέτρο μηδέν. (1 μον.)

(β') Έστω $f : E \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση, $E \in \mathcal{M}$ και έστω $\alpha > 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$m\left(\{x \in E : |f(x)| > \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_E |f(x)|\,dm(x)\,.$$

(0,5 μον.)

(γ΄) Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών και ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $[0,1]$. Υποθέτουμε ότι

$$\int_{[0,1]} f_n(x)\,dm(x) = c_n > 0\,, \quad \text{με } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{c_n} < \infty\,.$$

Αν $E_n = \left\{x \in [0,1] : f_n(x) > \sqrt{c_n}\right\}$, να αποδειχθεί ότι $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < +\infty$ και ότι σχεδόν για όλα τα $x \in [0,1]$ υπάρχει $N = N(x) \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $f_n(x) \le \sqrt{c_n}$, για κάθε $n \ge N$.

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Είναι ανισότητα Chebyshev([17]).

(γ΄) Από την ανισότητα Chebyshev

$$m\,(E_n) \le \frac{1}{\sqrt{c_n}} \int_{[0,1]} f_n(x)\,dm(x) = \frac{1}{\sqrt{c_n}}\,c_n = \sqrt{c_n}\,,$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\,(E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{c_n} < \infty\,.$$

Επομένως, από το λήμμα των Borel– Cantelli είναι $m\left(\overline{\lim}\,E_n\right) = 0$. Αν $x \notin \overline{\lim}\,E_n$, τότε υπάρχει $N = N(x) \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $x \notin \bigcup_{k=N}^{\infty} E_k$ και κατά συνέπεια $x \notin E_n$, για κάθε $n \ge N$. Άρα, σχεδόν για όλα τα $x \in [0,1]$ και για κάθε $n \ge N$ είναι $f_n(x) \le \sqrt{c_n}$.

■

Θ4. (α΄) Αν η $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}$, είναι μετρήσιμη συνάρτηση και το F είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δείξτε ότι το $f^{-1}(F)$ είναι μετρήσιμο σύνολο. (0,5 μον.)

(β΄) Έστω $f \in L_1\,[0,1]$ και $A = \{x \in [0,1] : f(x) = 2k+1\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο A είναι Lebesgue μετρήσιμο και ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} f(x)\right)\right|^n dx = m(A)\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α') Επειδή το F^c είναι ανοικτό σύνολο, το $f^{-1}(F^c)$ είναι μετρήσιμο σύνολο. Άρα, το $f^{-1}(F) = \left(f^{-1}(F^c)\right)^c$ θα είναι μετρήσιμο σύνολο.

(β') Επειδή το $\mathbb{Z}$, καθώς επίσης και κάθε υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ είναι σύνολο κλειστό, από το (α') το $A \in \mathcal{M}$. Παρατηρούμε ότι $\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}f(x)\right)\right| = 1$ αν και μόνο αν $x \in A$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}f(x)\right)\right|^n dx &= \int_A \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}f(x)\right)\right|^n dx \\ &\quad + \int_{[0,1]\setminus A} \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}f(x)\right)\right|^n dx \\ &= m(A) + \int_{[0,1]\setminus A} \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}f(x)\right)\right|^n dx\,.\end{aligned}$$

Επειδή $f \in L_1\,[0,1]$, είναι $|f| < \infty$ $\sigma.\pi.$ Επίσης

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}f(x)\right)\right|^n = 0 \text{ και } \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}f(x)\right)\right|^n < 1,$$

σχεδόν για κάθε $x \in [0,1] \setminus A$. Κατά συνέπεια, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]\setminus A} \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}f(x)\right)\right|^n dx = 0\,.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}f(x)\right)\right|^n dx \\ &\quad = m(A) + \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]\setminus A} \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}f(x)\right)\right|^n dx \\ &\quad = m(A)\,.\end{aligned}$$

■

Επαναληπτικές Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

3 Σεπτεμβρίου, 2008

Θ1. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο $G \supseteq E$ τέτοιο ώστε
$$m(G) \leq m(E) + \varepsilon\,.$$
Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο $G \supseteq E$ τέτοιο ώστε
$$m\left(G \setminus E\right) < \varepsilon\,.$$
(1,5 μον.)

(β΄) Αν $m(E) < \infty$, δείξτε ότι υπάρχει φθίνουσα οικογένεια ανοικτών συνόλων (G_n) με $E \subseteq G_n$ και $m(G_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} m(G_n) = m(E)$. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Από το (α΄) για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει ανοικτό σύνολο G'_n με $G'_n \supseteq E$, τέτοιο ώστε
$$m(G'_n) < m(E) + \frac{1}{n}\,.$$
Κατά συνέπεια $m(G'_n) < \infty$ και επειδή $E \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G'_n \subseteq G'_n$, είναι
$$m(E) \leq m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G'_n\right) \leq m(G'_n) < m(E) + \frac{1}{n}\,,$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως, $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G'_n\right) = m(E)$.
Θεωρούμε τώρα τα ανοικτά σύνολα $G_n := \bigcap_{k=1}^{n} G'_k$. Τότε $E \subseteq G_n$ και $m(G_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή
$$G_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} G'_k \text{ και } m(G_1) = m(G'_1) < \infty\,,$$

τελικά έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} m(G_n) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G'_k\right) = m(E)\,.$$

■

Θ2. Έστω $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση με $|f| \leq 1$ σχεδόν παντού στο E, όπου E είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E) > 0$. Υποθέτουμε ότι $|f| < 1$ σ' ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του E θετικού μέτρου. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε το σύνολο

$$E_\varepsilon := \{x \in E : |f(x)| \leq 1 - \varepsilon\}\ .$$

(α') Να αποδειχθεί ότι το E_ε είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $m\left(E_\varepsilon\right) > 0$. (1 μον.)

(β') Να βρεθούν δύο μετρήσιμες συναρτήσεις $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}$ που να μην είναι ίσες σχεδόν παντού στο E και τέτοιες ώστε

$$|f_1| \leq 1\,, \quad |f_2| \leq 1 \quad \text{και} \quad f = \frac{f_1 + f_2}{2}\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α') Επειδή η $|f|$ είναι μετρήσιμη, το E_ε είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Υποθέτουμε ότι $m\left(E_\varepsilon\right) = 0$, για κάθε $\varepsilon > 0$. Αν

$$E_n := \left\{x \in E : |f(x)| \leq 1 - \frac{1}{n}\right\}\,,$$

τότε $m(E_n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Είναι $E_n \subseteq E_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{x \in E : |f(x)| < 1\}$ και επομένως

$$0 = \lim_{n\to\infty} m(E_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m\left(\{x \in E : |f(x)| < 1\}\right)$$

που είναι άτοπο (από την υπόθεση υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του E θετικού μέτρου και στο οποίο είναι $|f| < 1$). Άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $m(E_\varepsilon) > 0$.

(β΄) Από το (α΄), για κάποιο $\varepsilon > 0$ το $E_\varepsilon := \{x \in E : |f(x)| \leq 1 - \varepsilon\}$ έχει θετικό μέτρο, δηλαδή $m(E_\varepsilon) > 0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}$ με

$$f_1 := f + \varepsilon \chi_{E_\varepsilon} \quad \text{και} \quad f_2 := f - \varepsilon \chi_{E_\varepsilon} .$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, χ_{E_ε} είναι μετρήσιμες και οι συναρτήσεις f_1, f_2 θα είναι μετρήσιμες. Για κάθε $x \in E_\varepsilon$ είναι $f_1(x) = f(x) + \varepsilon$ και $f_2(x) = f(x) - \varepsilon$. Επομένως $f_1(x) \neq f_2(x)$, για κάθε $x \in E_\varepsilon$. Επειδή $m(E_\varepsilon) > 0$, οι συναρτήσεις f_1, f_2 δεν είναι ίσες σχεδόν παντού στο E. Επίσης, από τον ορισμό των συναρτήσεων f_1 και f_2 έχουμε

$$|f_1(x)| = \begin{cases} |f(x) + \varepsilon| \leq (1 - \varepsilon) + \varepsilon = 1 & \text{αν } x \in E_\varepsilon \\ |f(x)| \leq 1 & \text{αν } x \in E \setminus E_\varepsilon \end{cases}$$

και

$$|f_2(x)| = \begin{cases} |f(x) - \varepsilon| \leq (1 - \varepsilon) + \varepsilon = 1 & \text{αν } x \in E_\varepsilon \\ |f(x)| \leq 1 & \text{αν } x \in E \setminus E_\varepsilon . \end{cases}$$

Άρα,

$$|f_1| \leq 1 , \quad |f_2| \leq 1 \quad \text{και} \quad f = \frac{f_1 + f_2}{2} .$$

■

Θ3. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Υποθέτουμε ότι η (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο E και ότι η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση στο E.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι $\int_E |f|\, dm = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$ σχεδόν παντού στο E. (1 μον.)

(β΄) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης να αποδειχθεί το λήμμα Fatou, δηλαδή ότι

$$\int_E \left(\liminf_{n\to\infty} |f_n| \right) dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n|\, dm .$$

(1 μον.)

(γ΄) Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει σχεδόν παντού στο E και ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|\, dm = 0\,.$$

Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ σχεδόν παντού στο E. (0,8 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(γ΄) Έστω $\lim_{n\to\infty} f_n = g$ σχεδόν παντού στο E. Τότε, από γνωστή πρόταση η συνάρτηση g είναι μετρήσιμη στο E και

$$\begin{aligned}\int_E |g - f|\, dm &= \int_E \lim_{n\to\infty} |f_n - f|\, dm \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\, dm \qquad \text{(λήμμα Fatou)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|\, dm = 0\,.\end{aligned}$$

Επομένως $\int_E |g - f|\, dm = 0$ και από το (α΄) έπεται ότι $g = f$ σχεδόν παντού στο E. Άρα, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ σχεδόν παντού στο E.

■

Θ4. (α΄) Να εξεταστεί αν υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων στο $[0, 2\pi]$ της μορφής

$$f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\,,$$

$a_n, b_n \in \mathbb{R}$, η οποία να συγκλίνει στο 1 σχεδόν παντού στο $[0, 2\pi]$ και τέτοια ώστε $|a_n| + |b_n| \le 5$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(1 μον.)

(β΄) Υποθέτουμε ότι η

$$g(t) := \int_{[0,\infty)} e^{tx} f(x)\, dm(x)$$

είναι πεπερασμένη για κάθε $t \geq 0$, όπου f είναι μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στο $[0, \infty)$. Να αποδειχθεί ότι η g είναι συνεχής για $t > 0$, αποδεικνύοντας ότι για κάθε ακολουθία (h_n) με $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ είναι

$$\lim_{n\to\infty} g(t + h_n) = g(t)\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Έστω ότι υπάρχει τέτοια ακολουθία συναρτήσεων στο $[0, 2\pi]$. Οι f_n είναι συνεχείς συναρτήσεις και

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f_n(x)\,dx &= \int_0^{2\pi} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\; dx \\ &= \frac{1}{n}\,(a_n \sin(nx) - b_n \cos(nx))\Big|_{x=0}^{x=2\pi} = 0\,,\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή από την υπόθεση $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$ σχεδόν παντού στο $[0, 2\pi]$ και

$$|f_n(x)| = |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n| \leq 5\,,$$

από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης έχουμε

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\; dx = 2\pi$$

που είναι άτοπο. Άρα, δεν υπάρχει τέτοια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων.

(β΄) Έστω $t > 0$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, υπάρχει $N_1 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $t + h_n \geq 0$, για κάθε $n \geq N_1$. Από την υπόθεση, για κάθε $n \geq N_1$ η $g\,(t + h_n)$ υπάρχει. Επίσης από τον ορισμό της g έχουμε

$$g(t + h_n) - g(t) = \int_{[0,\infty)} e^{tx} \Big(e^{h_n x} - 1\Big)\, f(x)\, dm(x)\,.$$

Αν

$$f_n(x) := e^{tx}\left(e^{h_n x} - 1\right) f(x)\,,$$

η (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $[0, \infty)$ με

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\,.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty}\left(e^{h_n x} - 1\right) = 0$, για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $N_2 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $\left|e^{h_n x} - 1\right| < 1$, για κάθε $n \geq N_2$. Επομένως,

$$|f_n(x)| = e^{tx}\left|e^{h_n x} - 1\right| f(x) < e^{tx} f(x)\,,\ \forall n \geq n_0 = \max\left\{N_1, N_2\right\}\,.$$

Από την υπόθεση $g(t) = \int_{[0,\infty)} e^{tx} f(x)\, dm(x) < \infty$, για κάθε $t \geq 0$. Δηλαδή η συνάρτηση $e^{tx} f(x) \in L_1\left([0, \infty)\right)$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\left(g(t + h_n) - g(t)\right) = \int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} e^{tx}\left(e^{h_n x} - 1\right) f(x)\, dm(x) = 0\,.$$

■

Θ5. Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$. Λέμε ότι η (f_n) **συγκλίνει ως προς το μέτρο Lebesgue** m στη συνάρτηση f, συμβολισμός $f_n \xrightarrow{m} f$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0\,.$$

(α΄) Αν $E_n := \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$, να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} m(E_n) \leq \int_E \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, dm \leq m(E_n) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} m(E \setminus E_n)\,. \tag{5.5}$$

(1 μον.)

(β΄) Αν $m(E) < \infty$, να αποδειχθεί ότι $f_n \xrightarrow{m} f$ αν και μόνο αν

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, dm = 0\,.$$

(0,7 μον.)

(γ΄) Έστω η ακολουθία συναρτήσεων (f_n), με $f_n(x) = \frac{1}{nx}$, ορισμένη στο διάστημα $E = (0, \infty)$. Να αποδειχθεί ότι $f_n \xrightarrow{m} 0$ στο $(0, \infty)$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} \frac{|f_n|}{1 + |f_n|}\, dm \neq 0\,.$$

Τι συμπεραίνετε για το (β΄); (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι $E \setminus E_n = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\}$. Επειδή η συνάρτηση $\varphi(t) := \frac{t}{1+t}$ είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $(0, \infty)$ με $\varphi(t) < 1$, έχουμε

$$\frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} \leq \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in E_n \\ \varepsilon/(1+\varepsilon) & \text{αν } x \in E \setminus E_n\,. \end{cases}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_E \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, dm &= \int_{E_n} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, dm + \int_{E\setminus E_n} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, dm \\ &\leq m(E_n) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} m\left(E \setminus E_n\right)\,. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \int_E \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, dm &\geq \int_{E_n} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, dm \\ &\geq \int_{E_n} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\, dm = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} m(E_n)\,. \end{aligned}$$

(β΄) Έστω $f_n \xrightarrow{m} f$, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = 0$. Αν $m(E) = c < \infty$, τότε $m\left(E \setminus E_n\right) \leq c$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και από τη δεξιά ανισότητα της (5.5) προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, dm \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} c < c\varepsilon\,.$$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, dm < c\varepsilon$$

και αυτό συνεπάγεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, dm = 0\,.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, dm = 0\,.$$

Τότε η αριστερή ανισότητα της (5.5) συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = 0$, για κάθε σταθερό $\varepsilon > 0$. Άρα, $f_n \xrightarrow{m} f$.

(γ') Είναι $E = (0, \infty)$ και $m(E) = \infty$. Αν $E_n := \{x \in E : |f_n(x)| > \varepsilon\}$, με $f_n(x) = \frac{1}{nx}$, τότε

$$E_n = \left\{ x \in (0,\infty) : \frac{1}{nx} > \varepsilon \right\} = \left\{ x \in (0,\infty) : x < \frac{1}{n\varepsilon} \right\} = \left(0, \frac{1}{n\varepsilon}\right)\,.$$

Επομένως, $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\varepsilon} = 0$, για κάθε σταθερό $\varepsilon > 0$. Ισοδύναμα,

$$f_n \xrightarrow{m} 0 \quad \text{στο } (0,\infty)\,.$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + nx}\, dx = \infty\,,$$

είναι

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} \frac{|f_n|}{1 + |f_n|}\, dm &= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1/nx}{1 + 1/nx}\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{1 + nx}\, dx = \infty \neq 0\,.
\end{aligned}$$

Άρα, αν $m(E) = \infty$ και $f_n \xrightarrow{m} f$ στο E, τότε γενικά δεν ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, dm = 0\,.$$

Αν όμως η τελευταία σχέση ισχύει, η (5.5) συνεπάγεται ότι $f_n \xrightarrow{m} f$ στο E.

■

5.10 Ακαδημαϊκό έτος 2004–5

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

9 Φεβρουαρίου, 2005

Θ1. Έστω το σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο και έστω $\varepsilon > 0$.

(α΄) Δείξτε ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο G με $G \supseteq E$ και $m(G \setminus E) < \varepsilon$. Επίσης να αποδειχθεί ότι υπάρχει κλειστό σύνολο F με $F \subseteq E$ και $m(E \setminus F) < \varepsilon$. (1,5 μον.)

(β΄) Έστω $m(E) < \infty$. Αν $E_n := E \cap [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδειχθεί πρώτα ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $m(E) < m(E_{n_0}) + \varepsilon/2$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει συμπαγές σύνολο K με $K \subseteq E$ και

$$m(E \setminus K) < \varepsilon\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Είναι $m(E_n) < \infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή $E_n \subseteq E_{n+1}$, η (E_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και από γνωστή ιδιότητα του μέτρου $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m(E) < \infty$. Επομένως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$m(E) - m\left(E_{n_0}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και ισοδύναμα } m(E) < m\left(E_{n_0}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Από το (α΄) υπάρχει κλειστό σύνολο K με $K \subseteq E_{n_0}$ και $m\left(E_{n_0} \setminus K\right) = m\left(E_{n_0}\right) - m(K) < \varepsilon/2$. Δηλαδή $m\left(E_{n_0}\right) < m(K) + \varepsilon/2$. Άρα, $m(E) < m(K)+\varepsilon$ και ισοδύναμα $m\left(E \setminus K\right) < \varepsilon$. Επειδή $K \subseteq E_{n_0}$, το K είναι κλειστό και φραγμένο και επομένως συμπαγές σύνολο.

■

Θ2. Έστω η συνάρτηση $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, όπου $E \in \mathcal{M}$. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν το σύνολο

$$E_r := \{x \in E : f(x) \geq r\} \text{ είναι μετρήσιμο}, \quad \text{για κάθε } r \in \mathbb{Q}.$$

(1 μον.)

Λύση. Αν η f είναι μετρήσιμη, τότε το E_r, $r \in \mathbb{Q}$, είναι μετρήσιμο σύνολο. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι τα σύνολα E_r είναι μετρήσιμα για κάθε $r \in \mathbb{Q}$. Αν $a \in \mathbb{R}$, υπάρχει *αύξουσα* ακολουθία (r_n) ρητών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} r_n = a$. Επομένως, το

$$\{x \in E : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) \geq r_n\}$$

είναι ένα μετρήσιμο σύνολο. Δηλαδή το $\{x \in E : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και επομένως η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση. ■

Θ3. Έστω $f \in L_1(E)$, όπου E είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(α΄) Αν $E_c = \{x \in E : |f(x)| \geq c\}$, $c \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{c\to\infty} \int_{E_c} |f| \,\mathrm{d}m = 0\,.$$

(1,2 μον.)

(β΄) Χρησιμοποιώντας το (α΄) να αποδειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$ με $m(A) < \delta$, είναι $\int_A |f| \,\mathrm{d}m < \varepsilon$. (1,3 μον.)

Απόδειξη. (α΄) Έστω (c_n) πραγματική ακολουθία με $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ και έστω $f_n = |f|\chi_{E_{c_n}}$. Επειδή η $f \in L_1(E)$, από γνωστή πρόταση θα είναι $|f| < \infty$ $\sigma.\pi.$ και επομένως $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ $\sigma.\pi.$ στο E.

Επίσης, $f_n \leq |f| \in L_1(E)$ και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_{c_n}} |f|\,\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,\mathrm{d}m = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}m = 0\,.$$

Άρα, $\lim_{c\to\infty} \int_{E_c} |f|\,\mathrm{d}m = 0$.

(β΄) Από το (α΄), για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $\int_{E_c} |f|\,\mathrm{d}m < \varepsilon/2$. Έστω $0 < \delta \leq \varepsilon/2c$. Αν το $A \subseteq E$ είναι μετρήσιμο σύνολο με $m(A) < \delta$, επειδή $E \setminus E_c = \{x \in E : |f(x)| < c\}$, τότε

$$\begin{aligned}\int_A |f|\,\mathrm{d}m &= \int_{A\cap E_c} |f|\,\mathrm{d}m + \int_{A\cap(E\setminus E_c)} |f|\,\mathrm{d}m \\ &< \varepsilon/2 + c\cdot m(A) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

□

Θ4. (α΄) Έστω $E \in \mathcal{M}$ και έστω (f_n), $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης δείξτε ότι

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n(x)|\,\mathrm{d}m(x)\,.$$

Αν υποθέσουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n(x)|\,\mathrm{d}m(x) < \infty$, τι συμπεραίνετε για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (1 μον.)

(β΄) Έστω $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ μια αρίθμηση των ρητών αριθμών στο $[0,1]$ και έστω (a_n) πραγματική ακολουθία με $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n |x - r_n|^{-1/2}$ συγκλίνει απόλυτα $\sigma.\pi.$ στο $[0,1]$.

(1 μον.)

(γ΄) Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,\,\pi/2]} \left(1 - \sqrt{\sin x}\right)^n \cos x\,\mathrm{d}m(x)\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Για την απόδειξη της ισότητας παραπέμπουμε στο [17]. Αν υποθέσουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n(x)| \, \mathrm{d}m(x) < \infty$, τότε

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \, \mathrm{d}m(x) < \infty$$

και αυτό συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$ $\sigma.\pi.$ στο E. Άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει απόλυτα $\sigma.\pi.$ στο E.

(β΄) Το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_0^1 |x - r_n|^{-1/2} \, \mathrm{d}x &= \int_0^{r_n} (r_n - x)^{-1/2} \, \mathrm{d}x + \int_{r_n}^1 (x - r_n)^{-1/2} \, \mathrm{d}x \\ &= 2r_n^{1/2} + 2(1 - r_n)^{1/2} \,,\end{aligned}$$

δηλαδή συγκλίνει. Επειδή $\max_{0 \le x \le 1} \left(x^{1/2} + (1-x)^{1/2}\right) = \sqrt{2}$, από γνωστό θεώρημα

$$\int_{[0,1]} |x - r_n|^{-1/2} \, \mathrm{d}m(x) = \int_0^1 |x - r_n|^{-1/2} \, \mathrm{d}x \le 2\sqrt{2} \,.$$

Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int_{[0,1]} |x - r_n|^{-1/2} \, \mathrm{d}m(x) \le 2\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \,.$$

Άρα, από το (α΄) (Θεώρημα B. Levi) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n |x - r_n|^{-1/2}$ θα συγκλίνει απόλυτα $\sigma.\pi.$ στο $[0, 1]$.

(γ΄) Η $f_n(x) := \left(1 - \sqrt{\sin x}\right)^n \cos x$ είναι ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[0, \pi/2]$ και από γνωστό θεώρημα

$$\int_{[0,\, \pi/2]} \left(1 - \sqrt{\sin x}\right)^n \cos x \, \mathrm{d}m(x) = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sqrt{\sin x}\right)^n \cos x \, \mathrm{d}x \,.$$

Επίσης, για κάθε $x \in (0, \pi/2]$ από τη γεωμετρική σειρά έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \sqrt{\sin x}\right)^n = \frac{1}{1 - \left(1 - \sqrt{\sin x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} .$$

Επομένως, από το (α') είναι

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,\,\pi/2]} \left(1 - \sqrt{\sin x}\right)^n \cos x \, \mathrm{d}m(x) \\
&\quad = \int_{[0,\,\pi/2]} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \sqrt{\sin x}\right)^n \cos x \, \mathrm{d}m(x) \\
&\quad = \int_{[0,\,\pi/2]} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, \mathrm{d}m(x) \\
&\quad = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, \mathrm{d}x \\
&\quad = 2\sqrt{\sin x}\,\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} = 2 .
\end{aligned}$$

<u>*Σημείωση*</u>. Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, \mathrm{d}x$ συγκλίνει και ισούται με 2, από γνωστό θεώρημα είναι

$$\int_{[0,\,\pi/2]} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, \mathrm{d}m(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, \mathrm{d}x = 2 .$$

■

Θ5. Έστω $f_n(x) = \dfrac{nx \ln x}{1 + n^2 x^2}$, $x \in (0, 1]$. Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n \to \infty} \int_{(0,1]} f_n(x) \, \mathrm{d}m(x) .$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (1,5 μον.)

Λύση. Για κάθε $x \in (0, 1]$ είναι

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} f_n(x) &= x \ln x \lim_{n \to \infty} \frac{n}{1 + n^2 x^2} \\
&= x \ln x \lim_{t \to \infty} \frac{t}{1 + t^2 x^2} \\
&= x \ln x \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2 t x^2} = 0 . \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}
\end{aligned}$$

Επειδή $1 + n^2x^2 \geq 2nx$, για κάθε $x \in (0, 1]$, είναι

$$|f_n(x)| = \frac{nx|\ln x|}{1 + n^2x^2} \leq \frac{nx|\ln x|}{2nx} = \frac{|\ln x|}{2}$$

και η συνάρτηση $g(x) := |\ln x|/2$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0, 1]$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση εύκολα αποδεικνύεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{|\ln x|}{2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,,$$

δηλαδή ότι συγκλίνει. Επομένως, από γνωστό θεώρημα η $g \in L_1\,(0, 1]$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,1]} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_{(0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) = 0\,.$$

■

Επαναληπτικές Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

30 Αυγούστου, 2005

Θ1. Έστω το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$.

(α΄) Δείξτε ότι υπάρχει ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο G (ένα G_δ σύνολο), τέτοιο ώστε

$$A \subseteq G \quad \text{και} \quad m^*(A) = m(G)\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Αν το A δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο, δείξτε ότι για κάθε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $M \supset A$ είναι $m^*\,(M \setminus A) > 0$. (0,5 μον.)

(γ΄) Αν το A είναι Lebesgue μετρήσιμο με $m(A) < \infty$, δείξτε ότι για κάθε σύνολο $B \supset A$ είναι $m^*(B \setminus A) = m^*(B) - m(A)$. (0,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Αν $m^*(A) = \infty$, τότε το $G = \mathbb{R}$ είναι ανοικτό σύνολο, Lebesgue μετρήσιμο, με $A \subseteq G$ και $m^*(A) = m(G) = \infty$.

Υποθέτουμε ότι $m^*(A) < \infty$. Τότε από γνωστή πρόταση υπάρχει ανοικτό σύνολο G_n με $G_n \supseteq A$ και $m(G_n) < m^*(A) + 1/n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Αν $G := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, το G είναι ένα G_δ σύνολο τέτοιο ώστε

$$A \subseteq G \subseteq G_n \quad \text{και} \quad m^*(A) \leq m(G) \leq m(G_n) < m^*(A) + \frac{1}{n}\,,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Άρα, $m^*(A) = m(G)$.

(β΄) Υποθέτουμε ότι $m^*(M \setminus A) = 0$. Τότε το σύνολο $M \setminus A$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Επειδή και το M είναι Lebesgue μετρήσιμο, τότε και το $A = M \setminus (M \setminus A)$ θα είναι Lebesgue μετρήσιμο, άτοπο. Άρα $m^*(M \setminus A) > 0$.

(γ΄) Επειδή το A είναι Lebesgue μετρήσιμο,

$$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c) = m(A) + m^*(B \setminus A)\,.$$

Επειδή $m(A) < \infty$, ισοδύναμα έχουμε:

$$m^*(B \setminus A) = m^*(B) - m(A)\,.$$

■

Θ2. (α΄) Έστω το σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο και έστω η συνάρτηση f, με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \in A\,, \\ -x^2 & \text{αν } x \in A^c\,. \end{cases}$$

Είναι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x : f(x) = a\}$ Lebesgue μετρήσιμο; Είναι η συνάρτηση f Lebesgue μετρήσιμη; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

(0,5 μον.)

(β') Έστω $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}$, Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η συνάρτηση $g : f(E) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, δείξτε ότι η $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση.
Εφαρμογή. Χρησιμοποιώντας την ακολουθία $h_n := \frac{nf}{nf^2+1}$, δείξτε ότι η συνάρτηση $h : E \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & \text{αν } f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{αν } f(x) = 0\,, \end{cases}$$

είναι Lebesgue μετρήσιμη. (0,8 μον.)

Λύση.

(α') Το σύνολο $\{x : f(x) = a\}$, $a \in \mathbb{R}$, αποτελείται από δύο το πολύ σημεία και επομένως είναι Lebesgue μετρήσιμο. Επειδή

$$\{x : f(x) > 0\} = A \setminus \{0\}\,,$$

η f δεν είναι Lebesgue μετρήσιμη.

(β') Παραπέμπουμε στο [17].
Εφαρμογή. Επειδή η $g_n(x) := \frac{nx}{nx^2+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι συνεχής, τότε η $h_n = g_n \circ f$, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι Lebesgue μετρήσιμη. Όμως $\lim_{n\to\infty} h_n = h$, οπότε από γνωστή πρόταση και η h θα είναι Lebesgue μετρήσιμη.

■

Θ3. Έστω $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}$, Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση και έστω

$$E_n = \{x \in E : n - 1 \leq |f(x)| < n\}\ , \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Υποθέτουμε ότι $m(E_n) > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(α') Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g : E \to \mathbb{R}$ με $g(x) = (n^2 m(E_n))^{-1}$ αν $x \in E_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι ολοκληρώσιμη στο E. (1,2 μον.)

(β') Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση fg δεν είναι ολοκληρώσιμη στο E. (1,3 μον.)

Απόδειξη. Επειδή η συνάρτηση $|f|$ είναι μετρήσιμη, τα σύνολα E_n, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο με $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

(αʹ) Η g είναι μετρήσιμη συνάρτηση και από γνωστό θεώρημα

$$\begin{aligned}\int_E g\,\mathrm{d}m &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} g\,\mathrm{d}m\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} g\,\mathrm{d}m\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 m(E_n)}m(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty\,.\end{aligned}$$

Δηλαδή η $g \in L_1(E)$.

(βʹ) Είναι

$$(n-1)g(x)\chi_{E_n}(x) \le |f(x)g(x)|\chi_{E_n}(x) \le ng(x)\chi_{E_n}(x)\,,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n^2} \ge \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n} = \infty$, από γνωστά θεωρήματα

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}m(x) &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)g(x)|\,\mathrm{d}m(x)\\ &\ge \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}(n-1)g(x)\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2 m(E_n)}m(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2} = \infty\,.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_E |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}m(x) = \infty\,,$$

δηλαδή η συνάρτηση fg δεν είναι ολοκληρώσιμη στο E.

□

Θ4. (α΄) Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,, \quad \text{για κάθε } x \in E\,.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $g \in L_1(E)$ τέτοια ώστε $|f_n(x)| \leq g(x)$, για κάθε $x \in E$. Εφαρμόζοντας το λήμμα Fatou για την ακολουθία των μετρήσιμων συναρτήσεων $(2g - |f_n - f|)$, δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\,\mathrm{d}m = 0$ και στη συνέχεια ότι $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,\mathrm{d}m = \int_E f\,\mathrm{d}m$. (1 μον.)

(β΄) Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} \frac{\ln(x+n)}{n} \mathrm{e}^{-x} \cos x \,\mathrm{d}m(x)\,.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue (βλέπε [17]).

(β΄) Για $n = 1, 2, \ldots$ και για κάθε $x > 0$ είναι

$$\frac{\ln(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq 1 + x\,.$$

Αν

$$f_n(x) = \frac{\ln(x+n)}{n} \mathrm{e}^{-x} \cos x \quad \text{και} \quad g(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}\,,$$

τότε $|f_n(x)| < g(x)$ για κάθε $x > 0$. Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2\,,$$

δηλαδή συγκλίνει και επομένως η $g \in L_1(0,\infty)$. Επειδή για $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x+n)}{n} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(x+t)}{t} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{x+t} = 0\,,$$

είναι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} \frac{\ln(x+n)}{n} \mathrm{e}^{-x} \cos x \,\mathrm{d}m(x) \\ = \int_{(0,\infty)} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x+n)}{n} \mathrm{e}^{-x} \cos x \,\mathrm{d}m(x) = 0\,.$$

■

Θ5. (α΄) Έστω $E \in \mathcal{M}$ και έστω (f_n), $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με $f_n \in L_1(E)$. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L_1(E)$ και $\lim_{N\to\infty} \int_E \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) = 0$, να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}m(x)$ συγκλίνει και ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x)\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει και να υπολογιστεί το άθροισμά της. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Από την υπόθεση $\sum_{n=1}^{N} f_n \in L_1(E)$, $N \in \mathbb{N}^*$ και επομένως

$$\begin{aligned}\int_E \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) &= \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right) \mathrm{d}m(x) \\ &= \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) - \int_E \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) \\ &= \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) - \sum_{n=1}^{N} \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}m(x)\,.\end{aligned}$$

Όμως $\lim_{N\to\infty}\int_E \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) = 0$, οπότε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x)\,.\end{aligned}$$

(β΄) *1ος τρόπος*. Είναι

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\pi/2}\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n\cos^n x\,\mathrm{d}x\right| &= \int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{N+1}x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &\le \int_0^{\pi/2}\cos^{N+1}x\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Επειδή $|\cos^{N+1}x| \le 1$ και $\lim_{N\to\infty}\cos^{N+1}x = 0$ στο $(0,\pi/2]$, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi/2}\cos^{N+1}x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\left(\lim_{N\to\infty}\cos^{N+1}x\right)\mathrm{d}x = 0\,.$$

Επομένως $\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n\cos^n x\,\mathrm{d}x = 0$. Επίσης, για κάθε $x\in(0,\pi/2]$ είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cos^n x = \frac{1}{1+\cos x} \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

και η σειρά είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,\pi/2]$. Άρα, από το (α΄) η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει και

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cos^n x\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^{-2}(x/2)\,\mathrm{d}x\\ &= \tan(x/2)\big|_{x=0}^{x=\pi/2} = 1\,.\end{aligned}$$

2ος τρόπος. Η $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cos^k x$, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων τέτοια ώστε

$$f_n(x) = \frac{1-(-1)^{n+1}\cos^{n+1} x}{1+\cos x} \le \frac{2}{1+\cos x}\,, \quad x \in [0,\pi/2]\,.$$

Επειδή για κάθε $x \in (0,\pi/2]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cos^k x = \frac{1}{1+\cos x}$$

και η $g(x) := 2/(1+\cos x) \in L_1[0,\pi/2]$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^{\pi/2} \cos^k x \,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^{\pi/2} \cos^k x\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = 1\,.\end{aligned}$$

■

5.11 Ακαδημαϊκό έτος 2003–4

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

4 Μαρτίου, 2004

Θ 1. (α΄) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$.

(i) Δείξτε ότι

$$m^*(E) = \inf\left\{m(G) : G \supseteq E,\ G \text{ είναι ανοικτό σύνολο}\right\} .$$

(1 μον.)

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία ανοικτών συνόλων (G_n) με $G_n \supseteq E$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τέτοια ώστε $m^*(E) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)$.

(1 μον.)

(β΄) Έστω οι Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \chi_{\{0\}}(x)$ και $g(x) = \chi_{\{0,1\}}(x)$. Δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι Lebesgue μετρήσιμη. Είναι οι f και g Lebesgue ολοκληρώσιμες; Είναι η $g \circ f$ Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

(0,5 μον.)

Λύση.

(α΄) (i) Παραπέμπουμε στο [17].

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει ανοικτό σύνολο G_n με $G_n \supseteq E$, τέτοιο ώστε

$$m(G_n) \leq m^*(E) + \frac{1}{n} .$$

Επομένως

$$m^*(E) \leq m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) \leq m(G_n) \leq m^*(E) + \frac{1}{n} ,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Άρα $m^*(E) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)$.

(β') Επειδή $(g \circ f)(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η $g \circ f$ είναι Lebesgue μετρήσιμη. Είναι

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{0\}}\, \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{0,1\}}\, \mathrm{d}m = 0$$

και επομένως οι f και g είναι Lebesgue ολοκληρώσιμες. Όμως είναι $\int_{\mathbb{R}} g \circ f\, \mathrm{d}m = \infty$, δηλαδή η $g \circ f$ δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη.

■

Θ 2. (α') Έστω (f_n), $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων. Να διατυπωθεί το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και να αποδειχθεί ότι

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, \mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, \mathrm{d}m\,.$$

<u>*Εφαρμογή*</u>. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$, να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$.

(1,5 μον.)

(β') Υποθέτουμε ότι η $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ είναι Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν το $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο, ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ με

$$\phi(E) := \int_E f\, \mathrm{d}m\,.$$

Δείξτε ότι η ϕ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. (1 μον.)

Λύση.

(α') Παραπέμπουμε στο [17].

<u>*Εφαρμογή*</u>. Επειδή

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}(1 - x^2)\,, \quad |x| < 1$$

και η δεύτερη σειρά έχει θετικούς όρους, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \arctan 1 - \arctan 0 \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}(1-x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (x^{4n} - x^{4n+2})\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,.\end{aligned}$$

(β΄) Παραπέμπουμε στο [17].

■

Θ 3. (α΄) Έστω

$$f_n(x) := \frac{n^2 x}{(1+n^2x^2)\ln n}\,,$$

για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ και για κάθε $0 \leq x \leq 1$,

(i) Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx\,.$$

(ii) Υπάρχει συνάρτηση $\varphi \in L_1[0,1]$ με $f_n \leq \varphi$ στο $[0,1]$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(1,3 μον.)

(β΄) Έστω $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $|a_n| \leq \ln n$. Να αποδειχθεί ότι η $\sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[2,\infty)$ και ότι

$$\int_2^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^2 \ln n}\,.$$

(1,2 μον.)

Λύση.

(α΄) (i)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^1 \frac{n^2x}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{2\ln n}\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{\ln(1+t^2)}{2\ln t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{1+t^2} = 1\,. \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}\end{aligned}$$

(ii) Η απάντηση είναι αρνητική. Πράγματι, επειδή $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, αν υπήρχε συνάρτηση $\varphi \in L_1[0,1]$ με $f_n \leq \varphi$ στο $[0,1]$, τότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue θα είχαμε

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,dx = 0 \neq 1\,.$$

(άτοπο)

(β΄) Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ συγκλίνει, είναι

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\int_2^{\infty}|a_n|n^{-x}\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\int_2^{\infty}\mathrm{e}^{-x\ln n}\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{|a_n|}{\ln n}\left(\frac{1}{n^2} - \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x\ln n}\right)\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^2\ln n} \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty\,.\end{aligned}$$

Επομένως, απο το θεώρημα B. Levi η $\sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x} \in L_1[2,\infty)$ και

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x}\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=2}^{\infty}\int_2^{\infty} a_n n^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n\int_2^{\infty}\mathrm{e}^{-x\ln n}\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{\ln n}\left(\frac{1}{n^2} - \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x\ln n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^2\ln n}\,.\end{aligned}$$

■

Θ 4. Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση και

$$E_n := \{x \in E : n \le |f(x)| < n+1\}\ , \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

όπου E είναι μετρήσιμο σύνολο με $m(E) < \infty$. Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\chi_{E_n}(x) \le \sum_{n=0}^{\infty} |f(x)|\chi_{E_n}(x) \le \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\chi_{E_n}(x)\,, \tag{5.6}$$

να αποδειχθεί ότι η $f \in L_1(E)$ αν και μόνο αν $\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) < \infty$.

(2,5 μον.)

Απόδειξη. Επειδή η συνάρτηση $|f|$ είναι μετρήσιμη, τα σύνολα E_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο. Είναι

$$n\chi_{E_n}(x) \le |f(x)|\chi_{E_n}(x) \le (n+1)\chi_{E_n}(x)\,,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επομένως

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\chi_{E_n}(x) \le \sum_{n=0}^{\infty} |f(x)|\chi_{E_n}(x) \le \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\chi_{E_n}(x)\,.$$

Είναι $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$, όπου τα σύνολα E_n είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο. Από γνωστά θεωρήματα

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}m(x) &= \int_{\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n} |f(x)|\,\mathrm{d}m(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |f(x)|\,\mathrm{d}m(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_E |f(x)|\chi_{E_n}(x)\,\mathrm{d}m(x) \\
&= \int_E \sum_{n=0}^{\infty} |f(x)|\chi_{E_n}(x)\,\mathrm{d}m(x)\,.
\end{aligned}$$

Όμως

$$\int_E \sum_{n=0}^{\infty} n\chi_{E_n}(x)\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \int_E \chi_{E_n}(x)\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n)$$

και παρόμοια

$$\int_E \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\chi_{E_n}(x)\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)m(E_n)\,.$$

Άρα, η (5.6) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) &\le \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}m(x)\\ &\le \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)m(E_n)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) + \sum_{n=0}^{\infty} m(E_n)\\ &\le m(E_0) + 2\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n)\,.\end{aligned}$$

Από τις παραπάνω ανισότητες είναι προφανές ότι $f \in L_1\,(E)$ αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n)$ συγκλίνει, δηλαδή $\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) < \infty$. □

Θ 5. Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, όπου E είναι μετρήσιμο σύνολο με $m(E) < \infty$.

(α΄) Αν (E_n) είναι η ακολουθία των μετρήσιμων συνόλων του προηγούμενου θέματος και

$$A_n := \{x \in E : |f(x)| \ge n\}\ , \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{N} m(A_n) = \sum_{n=0}^{N} nm(E_n) + N \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} m(E_n)\,, \quad N \in \mathbb{N}^*\,.$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θέμα να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f \in L_1(E)$ αν και μόνο αν $\sum_{n=0}^{\infty} m(A_n) < \infty$.

(1,5 μον.)

(β΄) Υποθέτουμε ότι η Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε

$$m\left(\{x \in E : |f(x)| \geq t\}\right) < \frac{1}{1+t^2}, \quad \text{για κάθε } t > 0.$$

Αν $0 < p < 2$, να αποδειχθεί ότι η $|f|^p \in L_1(E)$, δηλαδή η $|f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη. (1 μον.)

Απόδειξη. (α΄) Είναι $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, όπου (E_k) είναι ακολουθία μετρήσιμων συνόλων ξένων ανά δύο. Επομένως, $m(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} m(E_k)$ και κατά συνέπεια

$$\sum_{n=1}^{N} m(A_n) = \sum_{n=0}^{N} nm(E_n) + N \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} m(E_n), \quad N \in \mathbb{N}^*.$$

Αν $f \in L_1(E)$, από το προηγούμενο θέμα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n)$ συγκλίνει και επομένως

$$\lim_{N\to\infty} N \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} m(E_n) \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} nm(E_n) = 0.$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} m(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) < \infty.$$

Αντίστροφα, αν $\sum_{n=0}^{\infty} m(A_n) < \infty$, τότε

$$\sum_{n=0}^{N} nm(E_n) = \sum_{n=1}^{N} m(A_n) - N \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} m(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$$

και επομένως $\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) < \infty$. Άρα από το προηγούμενο θέμα η $f \in L_1(E)$.

(β΄) Επειδή $2/p > 1$, είναι

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} m\left(\{x \in E : |f(x)|^p \geq n\}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} m\left(\left\{x \in E : |f(x)| \geq n^{1/p}\right\}\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^{2/p}} \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/p}} < \infty\,.\end{aligned}$$

Απο την προηγούμενη περίπτωση προκύπτει ότι η $|f|^p \in L_1(E)$.

□

Να επιλέξετε τέσσερα(4) από τα πέντε(5) θέματα

Επαναληπτικές Εξετάσεις στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

30 Σεπτεμβρίου, 2004

Θ 1. Έστω $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη συνάρτηση, όπου το E είναι μετρήσιμο σύνολο και έστω η συνάρτηση $g : E \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι τέτοια ώστε $f = g$ $\sigma.\pi.$

(α΄) Δείξτε ότι η συνάρτηση g είναι μετρήσιμη στο E. (0,7 μον.)

(β΄) Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο E, δείξτε ότι η συνάρτηση g είναι ολοκληρώσιμη στο E και ότι

$$\int_E g\,\mathrm{d}m = \int_E f\,\mathrm{d}m\,.$$

(1 μον.)

(γ΄) Έστω

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \text{ είναι ρητός ,} \\ \mathrm{e}^{-|x|} & \text{αν } x \text{ είναι άρρητος .} \end{cases}$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση g είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}m$. (0,8 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Από την (α΄) η g, καθώς επίσης και οι g^+, g^- είναι μετρήσιμες στο E. Οι συναρτήσεις f^+, f^- και g^+, g^- είναι μετρήσιμες στα μετρήσιμα σύνολα $A = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ και $E \setminus A$. Είναι $m(A) = 0$ και $g^+ = f^+$, $g^- = f^-$ στο $E \setminus A$. Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο E, θα είναι

$$\begin{aligned}\int_E g^+ \,\mathrm{d}m &= \int_A g^+ \,\mathrm{d}m + \int_{E\setminus A} g^+ \,\mathrm{d}m \\ &= \int_{E\setminus A} g^+ \,\mathrm{d}m \\ &= \int_{E\setminus A} f^+ \,\mathrm{d}m \\ &= \int_A f^+ \,\mathrm{d}m + \int_{E\setminus A} f^+ \,\mathrm{d}m \\ &= \int_E f^+ \,\mathrm{d}m < \infty\end{aligned}$$

και παρόμοια $\int_E g^- \,\mathrm{d}m = \int_E f^- \,\mathrm{d}m < \infty$. Επομένως, η g είναι ολοκληρώσιμη στο E και

$$\int_E g \,\mathrm{d}m = \int_E g^+ \,\mathrm{d}m - \int_E g^- \,\mathrm{d}m = \int_E f^+ \,\mathrm{d}m - \int_E f^- \,\mathrm{d}m = \int_E f \,\mathrm{d}m \,.$$

(γ΄) Αν $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x} \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = 2 \,.$$

Επομένως, από γνωστό θεώρημα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}m = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \,\mathrm{d}x = 2$. Επειδή $f = g$ $\sigma.\pi.$, από τη (β΄) η g είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}m = 2$.

■

Θ 2. (α΄) Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty]$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης να αποδειχθεί το λήμμα του Fatou, δηλαδή ότι

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) \, dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, dm \, .$$

(1 μον.)

(β΄) Αν (A_n) είναι ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, το $\liminf_{n\to\infty} A_n$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \\ &= \{x : x \in A_n \text{ για όλα εκτός από πεπερασμένα το πλήθος } n\} \, . \end{aligned}$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n} = \chi_{\liminf_{n\to\infty} A_n} \, .$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το λήμμα Fatou να αποδειχθεί ότι

$$m\left(\liminf_{n\to\infty} A_n \right) \leq \liminf_{n\to\infty} m(A_n) \, .$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [17].

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned} \chi_{\liminf_{n\to\infty} A_n}(x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x \in \liminf_{n\to\infty} A_n \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A_n \text{ για όλα εκτός από} \\ &\qquad \text{πεπερασμένα το πλήθος } n \\ &\Leftrightarrow \quad \chi_{A_n}(x) = 1 \text{ για όλα εκτός από} \\ &\qquad \text{πεπερασμένα το πλήθος } n \\ &\Leftrightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) = 1 \end{aligned}$$

και επομένως $\liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n} = \chi_{\liminf_{n\to\infty} A_n}$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Fatou με $f_n = \chi_{A_n}$ έχουμε

$$\begin{aligned} m\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{\liminf_{n\to\infty} A_n} \, \mathrm{d}m \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n}\right) \, \mathrm{d}m \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_n} \, \mathrm{d}m \qquad \text{(λήμμα Fatou)} \\ &= \liminf_{n\to\infty} m(A_n)\,. \end{aligned}$$

■

Θ 3. (α') Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$, δηλαδή η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, δείξτε ότι $|f(x)| < \infty$ $\sigma.\pi.$ (1 μον.)

(β') Αν $f \in L_1(0,1)$, δείξτε ότι $x^n f(x) \in L_1(0,1)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} x^n f(x) \, \mathrm{d}m(x) = 0\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α') Παραπέμπουμε στο [17].

(β') Επειδή $f \in L_1(0,1)$, από την (α') η f είναι πεπερασμένη $\sigma.\pi.$ Επομένως, επειδή για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, θα είναι $\lim_{n\to\infty} x^n f(x) = 0$ $\sigma.\pi.$ στο $(0,1)$. Επίσης είναι $|x^n f(x)| \leq |f(x)|$, για κάθε $x \in (0,1)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και η $f \in L_1(0,1)$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue η συνάρτηση $x^n f(x) \in L_1(0,1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} x^n f(x) \, \mathrm{d}m(x) = \int_{(0,1)} \left(\lim_{n\to\infty} x^n f(x)\right) \, \mathrm{d}m(x) = 0\,.$$

■

Θ 4. Αν $\alpha < 1$, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n)} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{\alpha x} \,\mathrm{d}m(x).$$

(1,5 μον.)

Λύση. Έστω $f_n(x) := (1 - x/n)^n \mathrm{e}^{\alpha x} \chi_{[0,n)}(x)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^{(\alpha-1)x}$, για κάθε $x \geq 0$. Επειδή $\mathrm{e}^{-x/n} \geq 1 - x/n$, για κάθε $x \leq n$ θα είναι $(1-x/n)^n \leq \mathrm{e}^{-x}$ οπότε και $(1-x/n)^n \mathrm{e}^{\alpha x} \leq \mathrm{e}^{(\alpha-1)x}$. Επομένως, $0 \leq f_n(x) \leq \mathrm{e}^{(\alpha-1)x}$, για κάθε $x \geq 0$. Όμως

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{(\alpha-1)x} \,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to\infty} \int_0^r \mathrm{e}^{(\alpha-1)x} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\alpha - 1} \lim_{r\to\infty} \left(\mathrm{e}^{(\alpha-1)r} - 1\right) = \frac{1}{1-\alpha}\,.\end{aligned}$$

Τότε από γνωστό θεώρημα η συνάρτηση $\mathrm{e}^{(\alpha-1)x}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,\infty)$ με

$$\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{(\alpha-1)x} \,\mathrm{d}m(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\alpha-1)x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}\,.$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n)} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{\alpha x} \,\mathrm{d}m(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{\alpha x} \chi_{[0,n)}(x) \,\mathrm{d}m(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{\alpha x} \chi_{[0,n)}(x)\right] \,\mathrm{d}m(x) \\ &= \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{(\alpha-1)x} \,\mathrm{d}m(x) = \frac{1}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

■

Θ 5. Έστω (f_n) ακολουθία πραγματικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, δηλαδή $f_n \in L_1(\mathbb{R})$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει $f \in L_1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \,\mathrm{d}m \leq \frac{1}{n^2}\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

(α΄) Δείξτε πρώτα ότι

$$\sum_{n=2}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n - f_{n-1}|\,\mathrm{d}m < \infty$$

και στη συνέχεια ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}(f_n(x) - f_{n-1}(x))$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ και το άθροισμά της είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(1 μον.)

(β΄) Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Από την υπόθεση, για κάθε $n \geq 2$ είναι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|f_n - f_{n-1}|\,\mathrm{d}m &\leq \int_{\mathbb{R}}|f_n - f|\,\mathrm{d}m + \int_{\mathbb{R}}|f_{n-1} - f|\,\mathrm{d}m\\ &\leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\,.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n - f_{n-1}|\,\mathrm{d}m &\leq \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\right)\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2} < \infty\,.\end{aligned}$$

Άρα, από το θεώρημα B. Levi η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}(f_n(x) - f_{n-1}(x))$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ και το άθροισμά της είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(β΄) Έστω $g(x) := f_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty}(f_k(x) - f_{k-1}(x))$. Από το (α΄) η $g \in L_1(\mathbb{R})$ και

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(f_1(x) + \sum_{k=2}^{n}(f_k(x) - f_{k-1}(x))\right) = g(x)$$

σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$. Τότε, από το λήμμα Fatou

$$\int_{\mathbb{R}} |g - f| \, \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} \Big(\lim_{n\to\infty} |f_n - f| \Big) \, \mathrm{d}m \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \, \mathrm{d}m = 0 \,.$$

Δηλαδή $\int_{\mathbb{R}} |g - f| \, \mathrm{d}m = 0$ και επομένως $f = g$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$. Άρα, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

■

Βιβλιογραφία

[1] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Problems in Real Analysis: A Workshop with Solutions (2nd edition)*, Academic Press, Inc., 1998.

[2] J. -P. Ansel, Y. Ducel, *Exercises corrigés en théorie de la mesure et de l'intégration*, ellipses, Paris, 1995.

[3] O. Arino, C. Delode et J. Genet, *Mesure Et Intégration - Exercices Et Problèmes Avec Solutions, Maîtrises De Mathématiques*, Librairie Vuibert, Paris, 1976.

[4] M. Béguin, *Théory de la mesure et de l'intégration pour les probabilités(Cours et exercises corrigés)*, ellipses, Paris, 2013.

[5] P. Biler, A. Witkowski, *Problems in Mathematical Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.

[6] M. Bouyssel, *Mesure Et Intégration- Intégrale De Lebesgue*, Editions Cépaduès, 1996.

[7] F. Burk, *A Garden of Integrals*, Mathematical Association of America, 2007.

[8] W. J. Caczor and M. T. Nowak , *Problems in Mathematical Analysis III: Integration* , Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2003.

[9] J. Gapaillard, *Intégration pour la licence : cours et exercices corrigés : 2e edition*, Dunod, Paris, 2002.

[10] B. R. Gelbaum, J. M. Olmsted, *Theorems and Counterexamples in Mathematics*, Springer–Verlag (Series: Problem Books in Mathematics), 1990.

[11] B. R. Gelbaum, *Problems in Real and Complex Analysis*, Springer–Verlag (Series: Problem Books in Mathematics), 1992.

[12] C. George, *Exercises in Integration* , Springer–Verlag, 1984.

[13] Khoan Vo Khac, *Théorie de la mesure(exercises et problèmes corrigés)*, Hermann, Paris, 1993.

[14] El-Haj Laamri, *Mesures, Intégration, Convolution Et Transformée De Fourier Des Fonctions - Rappels De Cours Et Exercices Corrigés* , Dunod, Paris, 2007.

[15] G. Letac, *Exercises and Solutions Manual for Integration and Probability: by Paul Malliavin*, Springer–Verlag, 1995.

[16] B. M. Makarov, M. G. Goluzina, A. A. Lodkin, A. N. Podkorytov, *Selected Problems in Real Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1998.

[17] Γ. Σαραντόπουλος, *Μια Εισαγωγή στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση*, Ε.Μ. Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2014.

[18] A. Torchinsky, *Problems in Real and Functional Analysis*, Amer. Math. Soc. (Graduate Studies in Mathematics, vol. 166), 2015.

[19] Li Ta-Tsien(Editor), *Problems and Solutions in Mathematics* (Series: Major American Universities PH.D. Qualifying Questions and Solutions–Mathematics), 2nd Edition, World Scientific, 2011.

[20] C. Wagschal, *Intégration. Exercises et problèmes corrigés*, Hermann, Paris, 1999.

[21] G. L. Wise, E. B. Hall, *Counterexamples in Probability and Real Analysis*, Oxford University Press, New York, 1993.

[22] J. Yeh, *Problems and Proofs in Real Analysis: Theory of Measure and Integration*, World Scientific Publishing Company, 2014.