ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μια Εισαγωγή στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

Γιάννης Σαραντόπουλος

Αθήνα

7 Μαρτίου 2018

Περιεχόμενα

1 Προκαταρτικά **1**

1.1 Αριθμήσιμα και μη Αριθμήσιμα Σύνολα– Πληθάριθμοι 1

1.2 Ταλάντωση(oscillation) συνάρτησης 8

1.3 Μονότονες και αντίστροφες συναρτήσεις 12

1.4 Σύνολα Cantor και η ιδιάζουσα συνάρτηση Cantor–Lebesgue 17

1.4.1 Κατασκευή του Τριαδικού Συνόλου Cantor 18

1.4.2 Η ιδιάζουσα συνάρτηση Cantor–Lebesgue. 24

1.4.3 Κατασκευή του Γενικευμένου Συνόλου Cantor C_a, $0 < a \leq 1$. 30

2 Χώροι Μέτρου–Μέτρο Lebesgue **33**

2.1 Η Έννοια της Μετρησιμότητας 33

2.2 Εφαρμογή–Τύπος γινομένου του Euler 42

2.3 Ανώτερο και Κατώτερο Όριο Ακολουθίας Συνόλων 45

2.4 Εξωτερικό Μέτρο Lebesgue 48

2.5 Μετρήσιμα Σύνολα και Μέτρο Lebesgue 61

2.6 Σύνολα που δεν είναι Lebesgue Μετρήσιμα 81

2.7 Ασκήσεις 89

3 Μετρήσιμες Συναρτήσεις **101**

3.1 Μετρήσιμες Συναρτήσεις 101

3.2 Ακολουθίες Μετρήσιμων Συναρτήσεων 115

3.3 Προσέγγιση των Μετρήσιμων Συναρτήσεων 118

3.4 Ασκήσεις 123

4 Ολοκλήρωμα Lebesgue **131**

4.1 Ολοκλήρωση μη Αρνητικών Συναρτήσεων 131

4.2 Ολοκλήρωση Πραγματικών Συναρτήσεων 154

4.3 Σύγκριση των Ολοκληρωμάτων Riemann και Lebesgue 189

4.4 Γενικευμένο Ολοκλήρωμα Cauchy–Riemann 200

4.5 Προσέγγιση Ολοκληρώσιμων Συναρτήσεων 210

4.6 Εφαρμογές στις Σειρές Fourier 210

4.7 Ασκήσεις 221

Βιβλιογραφία **241**

Ευρετήριο **245**

Κεφάλαιο 1

Προκαταρτικά

1.1 Αριθμήσιμα και μη Αριθμήσιμα Σύνολα– Πληθάριθμοι

Το **δυναμοσύνολο** ενός συνόλου X είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X και συμβολίζεται με $\mathcal{P}(X)$.

Ορισμός 1.1. *Δύο σύνολα A, B λέγονται* **ισοδύναμα**, *συμβολισμός $A \sim B$, αν υπάρχει μια $1-1$ και επί (δηλαδή αμφιμονοσήμαντη) απεικόνιση $f : A \to B$.*

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $A \sim A$, για κάθε σύνολο A.
2. Αν $A \sim B$, τότε $B \sim A$.
3. Αν $A \sim B$ και $B \sim \Gamma$, τότε $A \sim \Gamma$.

Η απόδειξη της επόμενης πρότασης είναι προφανής.

Πρόταση 1.2. *Έστω $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθίες συνόλων με $A_i \cap A_j = \emptyset$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$. Αν $A_n \sim B_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.*

Το σύνολο A λέγεται **αριθμήσιμο απειροσύνολο** αν $A \sim \mathbb{N}$. Το A θα λέγεται **αριθμήσιμο** αν είναι είτε πεπερασμένο σύνολο ή αριθμήσιμο απειροσύνολο.

Παρατήρηση 1.3. *Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ είναι μια ακολουθία αριθμήσιμων συνόλων, τότε η ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.*

Ορισμός 1.4. *Αν $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, τότε* **ο πληθάριθμος του** *A είναι το πλήθος των στοιχείων του A. Γενικά, λέμε ότι* **δύο σύνολα** *A* **και** *B* **έχουν τον ίδιο πληθάριθμο** *αν $A \sim B$. Ο πληθάριθμος του A συμβολίζεται με $\mathrm{card}A$ ή $|A|$. Ο πληθάριθμος του $\mathbb{N}$ συμβολίζεται με $\aleph_0$, ενώ ο πληθάριθμος του $\mathbb{R}$ συμβολίζεται με $\mathfrak{c}$ και λέγεται* **πληθάριθμος του συνεχούς (cardinal of the continuum)**.

Ένα σημαντικό αξίωμα στη θεωρία συνόλων είναι το αξίωμα της επιλογής.

Αξίωμα 1.5 (Αξίωμα Επιλογής). *Έστω $\mathcal{C}$ μια οικογένεια μη-κενών συνόλων. Τότε υπάρχει συνάρτηση f που ορίζεται στη $\mathcal{C}$ και είναι τέτοια ώστε για κάθε $A \in \mathcal{C}$, $f(A) \in A$.*

Η συνάρτηση f λέγεται και **συνάρτηση επιλογής**.

Πρόταση 1.6. *Κάθε απειροσύνολο X περιέχει ένα αριθμήσιμο απειροσύνολο.*

Απόδειξη. Από το αξίωμα της επιλογής υπάρχει συνάρτηση επιλογής $f : \mathcal{P}(X) \to X$, δηλαδή για κάθε μη κενό υποσύνολο A του X το $f(A) \in A$. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n), με

$$a_1 = f(X),\ a_2 = f\left(X \setminus \{a_1\}\right),\ a_3 = f\left(X \setminus \{a_1, a_2\}\right), \ldots,\ a_n = f\left(X \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}\right), \ldots.$$

Επειδή το X είναι απειροσύνολο, το σύνολο $X \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, δεν είναι το κενό σύνολο. Επίσης, για κάθε $i < j$ είναι $a_i \neq a_j$. Δηλαδή τα στοιχεία a_n είναι διάφορα ανά δύο και επομένως το $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, που είναι υποσύνολο του X, είναι ένα αριθμήσιμο απειροσύνολο. □

Αν A και B είναι δύο υποσύνολα του X, **η διαφορά** $B \setminus A$ είναι το σύνολο των στοιχείων του B που δεν ανήκουν στο A. Δηλαδή

$$B \setminus A = \{x : x \in B \text{ και } x \notin A\}.$$

Η συμμετρική διαφορά των συνόλων A και B, συμβολίζεται $A \triangle B$, ορίζεται ως εξής

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,.$$

Το συμπλήρωμα του A **ως προς το** X, συμβολίζεται A^c, είναι το σύνολο των στοιχείων του X που δεν ανήκουν στο A. Δηλαδή

$$A^c = \{x \in X : \, x \notin A\}\,.$$

Είναι προφανές ότι $B \setminus A = B \cap A^c$.

Πρόταση 1.7. *Έστω A και B δύο υποσύνολα ενός συνόλου X.*

(i) Αν το A είναι αριθμήσιμο σύνολο και το B απειροσύνολο, τότε

$$A \cup B \sim B.$$

(ii) Αν το B είναι απειροσύνολο μη-αριθμήσιμο και το A είναι αριθμήσιμο, τότε

$$B \setminus A \sim B.$$

Απόδειξη. (i) Από την Πρόταση 1.6 κάθε απειροσύνολο περιέχει ένα αριθμήσιμο απειροσύνολο. Έστω το $D \subseteq B$ είναι αριθμήσιμο απειροσύνολο. Επειδή $B = D \cup (B \setminus D)$, είναι $A \cup B = (A \cup D) \cup (B \setminus D)$. Όμως $B \setminus D \sim B \setminus D$ και $D \sim A \cup D$, με $D \cap (B \setminus D) = \emptyset$, οπότε και $B \sim A \cup B$.

(ii) Το $B \setminus A$ δεν είναι πεπερασμένο. Από την προηγούμενη περίπτωση έχουμε ότι $A \cup (B \setminus A) \sim B \setminus A$ και επομένως $B \sim B \setminus A$.

□

Για την απόδειξη της επόμενης πρότασης χρειαζόμαστε το παρακάτω γνωστό αποτέλεσμα. Παραλείπουμε την εύκολη απόδειξη.

Λήμμα 1.8 (Ιδιότητα κιβωτισμένων διαστημάτων). *Έστω (I_n) ακολουθία κλειστών και φραγμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}$ με*

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots ,$$

δηλαδή η ακολουθία (I_n) των διαστημάτων είναι **κιβωτισμένη**. *Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Επιπλέον, αν $\ell(I_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, όπου $\ell(I_n)$ είναι το μήκος του διαστήματος I_n, τότε η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο ξ, δηλαδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\xi\}$.*

Παρατήρηση 1.9. *(i) Αν τα κιβωτισμένα διαστήματα είναι φραγμένα και όχι κλειστά, το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να μην ισχύει. Πράγματι, τα διαστήματα $I_n = (0, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι κιβωτισμένα, ανοικτά και φραγμένα. Αν $0 < \xi < 1/n$, τότε $n < 1/\xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ που είναι άτοπο.*

(ii) Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικά δεν ισχύει και στη περίπτωση που τα κιβωτισμένα διαστήματα είναι κλειστά και μη φραγμένα. Πράγματι, τα διαστήματα $I_n = [n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι κιβωτισμένα, κλειστά και μη φραγμένα. Και πάλι δεν υπάρχει ξ τέτοιο ώστε $\xi \in I_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Πρόταση 1.10. *Το $I = [0, 1]$ δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το $I = [0, 1]$ είναι αριθμήσιμο, δηλαδή $I = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Τότε τουλάχιστον ένα από τα κλειστά υποδιαστήματα $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$ και $[2/3, 1]$ δεν περιέχει το x_1, έστω το $J_1 := [0, 1/3]$. Διαιρούμε τώρα το J_1 σε τρία κλειστά και ισομήκη υποδιαστήματα, τα $[0, 1/9]$, $[1/9, 2/9]$, $[2/9, 1/3]$. Παρόμοια, ένα τουλάχιστον απ' αυτά δεν περιέχει το x_2, έστω το $J_2 := [1/9, 2/9]$. Συνεχίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων (J_n) με $J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_n \supset \cdots$. Επειδή το μήκος του J_n είναι

$$\ell(J_n) = \frac{1}{3^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

υπάρχει μοναδικό ξ τέτοιο ώστε $\{\xi\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$. Το $\xi \in I = [0,1]$. Επειδή $x_n \notin J_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ και $\xi \in J_n$, έπεται ότι $\xi \neq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Δηλαδή το ξ δεν είναι σημείο του I, άτοπο. Άρα το $I = [0,1]$ δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο. □

Πρόταση 1.11. *Όλα τα διαστήματα της μορφής $[a,b], (a,b), [a,b), (a,b]$ είναι ισοδύναμα. Επίσης όλα αυτά τα διαστήματα έχουν τον πληθάριθμο του συνεχούς.*

Απόδειξη. Η $f(x) = a + (b-a)x$ είναι μια $1-1$ απεικόνιση του $[0,1]$ επί του $[a,b]$. Επίσης, αν από το σύνολο $[a,b]$ αφαιρέσουμε ένα ή δύο σημεία, τότε από την Πρόταση 1.7 (ii) και τα σύνολα που προκύπτουν είναι ισοδύναμα με το $[a,b]$. Τέλος, επειδή η συνάρτηση $f : (-\pi/2,\, \pi/2) \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \tan x$ είναι αμφιμονοσήμαντη, έχουμε $(-\pi/2,\, \pi/2) \sim \mathbb{R}$. Επομένως όλα τα παραπάνω διαστήματα έχουν τον πληθάριθμο του συνεχούς. □

Αν X είναι ένα σύνολο και χρησιμοποιήσουμε το 2 για το σύνολο $\{0,1\}$, τότε το $2^X = \{0,1\}^X$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων $f : X \to \{0,1\}$. Αν $A \subseteq X$, **η χαρακτηριστική συνάρτηση του** A, συμβολίζεται με χ_A, ορίζεται ως εξής: $\chi_A(x) = 1$ αν $x \in A$ και $\chi_A(x) = 0$ αν $x \notin A$. Επομένως το σύνολο 2^X αποτελείται από τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις όλων των υποσυνόλων του X. Προφανώς η αντιστοιχία $A \mapsto \chi_A$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το $\mathcal{P}(X)$ στο 2^X, δηλαδή $\mathcal{P}(X) \sim 2^X$. Γι' αυτό το λόγο ο πληθάριθμος του $\mathcal{P}(X)$ συμβολίζεται με $2^{|X|}$.

Θεώρημα 1.12 (Cantor). *Για κάθε σύνολο X είναι $|X| < 2^{|X|}$.*

Απόδειξη. Η απεικόνιση $g : X \to \mathcal{P}(X)$, με $g(x) = \{x\}$, είναι $1-1$. Επομένως $|X| \leq 2^{|X|}$. Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι τα σύνολα X και $\mathcal{P}(X)$ δεν είναι ισοδύναμα. Αν υποθέσουμε ότι είναι ισοδύναμα, τότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Έστω

$$B = \{x \in X : x \notin f(x)\}.$$

Το B είναι υποσύνολο του X, δηλαδή $B \in \mathcal{P}(X)$. Επειδή η f είναι επί, υπάρχει $b \in X$ τέτοιο ώστε $f(b) = B$. Αν $b \in B$, τότε από τον ορισμό του B το $b \notin f(b) = B$, άτοπο. Παρόμοια, αν $b \notin B$, τότε $b \in f(b) = B$ που είναι και πάλι άτοπο. □

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k/2^k\right)$, όπου $a_k = 0$ ή 1, συγκλίνει και το άθροισμά της $x \in [0,1]$. Χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό

$$x \underset{2}{=} 0, a_1 a_2 a_3 \cdots \quad \text{ή} \quad x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots \qquad \text{(βάση 2)} \tag{1.1}$$

όπου $a_k = 0$ ή 1. Αυτό είναι το **δυαδικό ανάπτυγμα** του $x \in [0,1]$. Κάθε αριθμός $x \in [0,1]$ γράφεται στην παραπάνω μορφή. Το δυαδικό ανάπτυγμα ειναι μοναδικό αν ο x δεν είναι της μορφής: $m/2^n$, όπου $m = 1, 3, \ldots, 2^n - 1$. Οι αριθμοί 0 και 1 γράφονται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$0 = 0,000\cdots, \quad 1 = 0,111\cdots. \qquad \text{(βάση 2)}$$

Αν $x = m/2^n$ $(m = 1, 3, \ldots, 2^n - 1)$, τότε ο x έχει δύο δυαδικά αναπτύγματα. Σ' αυτά τα αναπτύγματα τα $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ συμπίπτουν και το a_n ισούται με 1 στο πρώτο ανάπτυγμα και με 0 στο δεύτερο ανάπτυγμα. Όλα τα υπόλοιπα a_k είναι 0 στο πρώτο ανάπτυγμα και 1 στο δεύτερο ανάπτυγμα. Για παράδειγμα

$$\frac{5}{16} = \begin{cases} 0,0101000\cdots, \\ 0,0100111\cdots. \end{cases} \qquad \text{(βάση 2)}$$

Κάθε δυαδικό ανάπτυγμα (1.1) είναι ίσο με κάποιο $x \in [0,1]$. Αν στο ανάπτυγμα (1.1) από ένα σημείο και μετά όλα τα a_k είναι 0 ή όλα τα a_k είναι 1, τότε το x είναι της μορφής $m/2^n$ $(m = 1, 3, \ldots, 2^n - 1)$. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε δύο δυαδικά αναπτύγματα. Αν το ανάπτυγμα (1.1) δεν είναι τελικά ίσο με 0 ή 1, τότε το $x \neq m/2^n$ και το x έχει ένα και μοναδικό δυαδικό ανάπτυγμα. Συμφωνούμε να μη χρησιμοποιούμε αναπτύγματα (1.1) στα οποία από κάποιο σημείο και μετά όλα τα a_k είναι 1. Τότε, κάθε $x \in [0,1)$ έχει μοναδικό δυαδικό ανάπτυγμα

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots \qquad \text{(βάση 2)}$$

έτσι ώστε για κάθε $N \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει a_k, $k > N$, με $a_k = 0$.

Παρόμοια, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k/3^k\right)$, όπου $a_k \in \{0,1,2\}$, συγκλίνει και το άθροισμά της $x \in [0,1]$. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$x \underset{3}{=} 0, a_1 a_2 a_3 \cdots \quad \text{ή} \quad x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots, \qquad \text{(βάση 3)} \tag{1.2}$$

όπου $a_k = 0, 1$ ή 2 και αυτό είναι το **τριαδικό ανάπτυγμα** του $x \in [0,1]$.

Παρατηρήσεις 1.13. 1. *Στην πράξη, αν για παράδειγμα θέλουμε να γράψουμε το* $2/3 \in [0,1)$ *στο δυαδικό σύστημα εργαζόμαστε ως εξής : Υποδιαιρούμε το* $[0,1)$ *στα υποδιαστήματα* $[0,1/2),[1/2,1)$ *και χρησιμοποιούμε τα ψηφία* 0 *και* 1 *για να απαριθμήσουμε τα δύο αυτά διαστήματα. Ο αριθμός* $2/3$ *ανήκει στο* $[1/2,1)$, *στο οποίο κατά την παραπάνω αρίθμηση αντιστοιχεί το ψηφίο* 1. *Είναι λοιπόν* $2/3 = 0,1\cdots$. *Στη συνέχεια υποδιαιρούμε το διάστημα* $[1/2,1)$ *στα υποδιαστήματα* $[1/2,3/4)$, $[3/4,1)$ *και τα απαριθμούμε χρησιμοποιώντας και πάλι τα ψηφία* 0 *και* 1. *Τότε ο αριθμός* $2/3$ *ανήκει στο* $[1/2,3/4)$ *στο οποίο αντιστοιχεί το ψηφίο* 0. *Κατά συνέπεια* $2/3 = 0,10\cdots$. *Αν συνεχίσουμε κατά τον ίδιο τρόπο, έχουμε*

$$\frac{2}{3} = 0,10101\cdots. \qquad \text{(βάση 2)}$$

Με τον παραπάνω τρόπο, κάθε $x \in [0,1)$ *έχει ένα και μοναδικό δυαδικό ανάπτυγμα.*

2. *Το ανάπτυγμα του* $x \in [0,1)$ *στο τριαδικό σύστημα επιτυγχάνεται κατά παρόμοιο τρόπο. Το διάστημα* $[0,1)$ *υποδιαιρείται στα υποδιαστήματα* $[0,1/3)$, $[1/3,2/3)$, $[2/3,1)$ *και χρησιμοποιούμε τα ψηφία* 0, 1 *και* 2 *για να απαριθμήσουμε τα τρία αυτά διαστήματα. Στη συνέχεια το εκάστοτε υποδιάστημα υποδιαιρείται σε τρία ίσα υποδιαστήματα κλειστά από τα αριστερά και ανοικτά από τα δεξιά και χρησιμοποιούμε τα ψηφία* 0, 1 *και* 2 *για την απαρίθμηση των διαστημάτων αυτών. Για παράδειγμα, ο αριθμός* $1/4$ *γράφεται στη μορφή*

$$\frac{1}{4} = 0,020202\cdots. \qquad \text{(βάση 3)}$$

Με τον παραπάνω τρόπο, κάθε $x \in [0,1)$ *έχει ένα και μοναδικό τριαδικό ανάπτυγμα.*

Πρόταση 1.14. *Το σύνολο* S *των ακολουθιών* $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ *των οποίων οι όροι είναι* 0 *ή* 1 *έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς, δηλαδή* $|S| = \mathfrak{c}$.

Απόδειξη. Έστω $T \subset S$ είναι το σύνολο των ακολουθιών του S στις οποίες όλα τα x_k από ένα σημείο και μετά ισούνται με 1. Στο $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \in T$, αντιστοιχούμε τον αριθμό $0, x_1x_2\cdots$ (βάση 2). Αυτός ο αριθμός είναι είτε το 1 ή είναι της μορφής : $m/2^n$ $(m = 1, 3, \ldots, 2^n - 1)$. Άρα $|T| = \aleph_0$. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση $f : S \setminus T \to [0,1)$, με $f(\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}) := 0, x_1x_2\cdots$ (βάση 2). Η f είναι αμφιμονοσήμαντη και επομένως $|S \setminus T| = \mathfrak{c}$. Κατά συνέπεια, από την Πρόταση 1.7 (*ii*) θα είναι και $|S| = \mathfrak{c}$. $\square$

Πόρισμα 1.15. *Έστω C είναι το σύνολο των $x \in [0,1]$ για τα οποία το τριαδικό ανάπτυγμα $x = 0, a_1a_2a_3\cdots$ (βάση 3) είναι τέτοιο ώστε $a_k = 0$ ή 2. Τότε $|C| = \mathfrak{c}$.*

Απόδειξη. Αντιστοιχούμε σε κάθε $x = 0, a_1a_2a_3\cdots \in C$ την ακολουθία $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, με $x_k = 0$ ή 1 αν $a_k = 0$ ή 2 αντίστοιχα. Έχουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία και από την προηγούμενη πρόταση θα είναι $|A| = \mathfrak{c}$. □

Θεώρημα 1.16. *Είναι $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.*

Απόδειξη. Το σύνολο S όλων των ακολουθιών $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ των οποίων οι όροι είναι 0 ή 1 είναι ισοδύναμο με το σύνολο $2^{\mathbb{N}^*}$ του οποίου τα στοιχεία είναι οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Επομένως $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \sim 2^{\mathbb{N}^*} \sim S$ και από την Πρόταση 1.14 θα είναι $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. □

Παρατήρηση 1.17. *Από τα Θεωρήματα 1.12 και 1.16 προκύπτει ότι $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Η "Υπόθεση του Συνεχούς "(Continuum Hypothesis) είναι η εικασία ότι ο πληθάριθμος κάθε άπειρου υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ είναι είτε $\aleph_0$ ή $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.*

1.2 Ταλάντωση(oscillation) συνάρτησης

Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο των ασυνεχειών μιας πραγματικής συνάρτησης ορισμένης στο $\mathbb{R}$ είναι ειδικού τύπου. Αρχίζουμε με τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.18. *Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα F_σ* **σύνολο** *αν $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, όπου κάθε F_k είναι ένα κλειστό σύνολο.*

Παραδείγματα 1.19. *(i) Αν το F είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, το F είναι ένα F_σ σύνολο επειδή $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, όπου $F_1 = F$ και $F_2 = F_3 = \cdots = \emptyset$.*

(ii) *Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών στο $\mathbb{R}$ είναι ένα F_σ σύνολο. Πράγματι, αν $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ είναι μια αρίθμηση των ρητών, τότε κάθε $\{r_k\}$ είναι κλειστό σύνολο και $\mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{r_k\}$.*

(iii) *Κάθε ανοικτό και φραγμένο διάστημα (a, b) είναι ένα F_σ σύνολο. Πράγματι, αν ο φυσικός αριθμός m είναι τέτοιος ώστε $\frac{2}{m} < b - a$, τότε*

$$(a, b) = \bigcup_{k=m}^{\infty}\left[a + \frac{1}{k},\, b - \frac{1}{k}\right],$$

όπου τα $[a + 1/k,\, b - 1/k]$ είναι κλειστά σύνολα για κάθε k.

Ορισμός 1.20. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν I είναι ένα ανοικτό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$, η* **ταλάντωση(oscillation) στο** *I της συνάρτησης f, συμβολίζεται με $\omega(f, I)$, ορίζεται ως εξής*

$$\omega(f, I) := \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x)\,.$$

Από τον ορισμό εύκολα αποδεικνύεται(άσκηση) ότι

$$\omega(f, I) = \sup\{|f(x) - f(y)| : \, x, y \in I\} = \sup\{f(x) - f(y) : \, x, y \in I\}\,.$$

Επίσης $\omega(|f|, I) \leq \omega(f, I)$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Η **ταλάντωση(oscillation) στο** *x_0 της συνάρτησης f, συμβολίζεται με $\omega(f, x_0)$, ορίζεται ως εξής*

$$\omega(f, x_0) := \inf \omega(f, I)\,,$$

όπου το infimum το παίρνουμε πάνω σε όλα τα ανοικτά και φραγμένα διαστήματα I που περιέχουν το x_0.

Από τον ορισμό είναι προφανές ότι $\omega(f, I) \geq 0$ και $\omega(f, x_0) \geq 0$.

Δίνουμε τώρα ένα κριτήριο για τη συνέχεια μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0.

Πρόταση 1.21. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε $\omega(f, x_0) = 0$ αν και μόνο αν η f είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Αν $I = (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$, τότε για κάθε $x \in I$ είναι $f(x_0) - \varepsilon/2 < f(x) < f(x_0) + \varepsilon/2$. Επομένως

$$\omega(f, I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \leq (f(x_0) + \varepsilon/2) - ((f(x_0) - \varepsilon/2)) = \varepsilon$$

και κατά συνέπεια

$$\omega(f, x_0) = \inf \omega(f, I) \leq \varepsilon \,.$$

Επειδή για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι $0 \leq \omega(f, x_0) \leq \varepsilon$, έπεται ότι $\omega(f, x_0) = 0$.

Αντίστροφα, έστω $\omega(f, x_0) = 0$. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε σε κάθε ανοικτό και φραγμένο διάστημα που περιέχει το x_0, υπάρχει x για το οποίο είναι $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Δηλαδή

$$f(x) \geq f(x_0) + \varepsilon \quad \text{ή} \quad f(x) \leq f(x_0) - \varepsilon \,.$$

Επομένως, για κάθε ανοικτό και φραγμένο διάστημα I που περιέχει το x_0 είναι

$$\omega(f, I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \geq (f(x_0) + \varepsilon) - (f(x_0) - \varepsilon) = 2\varepsilon \,.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για κάποιο $\varepsilon > 0$ είναι

$$\omega(f, x_0) = \inf \omega(f, I) \geq 2\varepsilon \,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0. $\square$

Θεώρημα 1.22. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $F_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \omega(f, x) \geq \frac{1}{n}\right\}$. Συμβολίζουμε με A το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}$ στα οποία η f είναι ασυνεχής. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ το σύνολο F_n είναι κλειστό. Επιπλέον,*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \,.$$

Επομένως, το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}$ στα οποία η f είναι ασυνεχής είναι ένα F_σ σύνολο.

Απόδειξη. Έστω x $\sigma.\sigma$ του F_n. Αρκεί να δείξουμε ότι $x \in F_n$(γιατί;). Αν I είναι ένα ανοικτό και φραγμένο διάστημα που περιέχει το x, τότε το I θα περιέχει ένα σημείο $y \in F_n$. Επομένως

$$\omega(f, I) \geq \omega(f, y) \geq \frac{1}{n} \,.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε ανοικτό και φραγμένο διάστημα I που περιέχει το x, έπεται ότι $\omega(f,x) \geq 1/n$. Άρα $x \in F_n$.

Απομένει να δείξουμε ότι $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Έστω $x \in A$. Από την Πρόταση 1.21 έπεται ότι $\omega(f,x) > 0$. Επομένως υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $\omega(f,x) \geq 1/n$ και κατά συνέπεια $x \in F_n$. Έστω τώρα $x \in F_n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε και πάλι από την Πρόταση 1.21 το $x \in A$. □

Θεώρημα 1.23. *Το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ των άρρητων αριθμών δεν είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Επομένως,* **δεν υπάρχει πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ που να είναι συνεχής σε κάθε ρητό αριθμό και ασυνεχής σε κάθε άρρητο αριθμό**.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι
$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \,,$$
όπου τα F_n είναι κλειστά σύνολα. Αν $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ είναι μια αρίθμηση των ρητών αριθμών, τότε $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\}$ και κατά συνέπεια
$$\mathbb{R} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\} \right) .$$
Από το θεώρημα κατηγορίας του Baire, παραπέμπουμε στο [3], τουλάχιστον ένα από τα F_n θα πρέπει να περιέχει ένα διάστημα. Όμως κάθε διάστημα περιέχει ρητούς αριθμούς και $F_n \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, δηλαδή το σύνολο F_n αποτελείται από άρρητους αριθμούς, άτοπο. Επομένως το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ των άρρητων αριθμών δεν είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν από το Θεώρημα 1.22 ότι δεν υπάρχει πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ που να είναι ασυνεχής στους άρρητους αριθμούς και συνεχής στους ρητούς. □

Θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα πραγματικής συνάρτησης ορισμένης στο $\mathbb{R}$ που είναι συνεχής στους άρρητους αριθμούς και το 0 και ασυνεχής στο $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Παράδειγμα 1.24. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος ή } x = 0 \,, \\[2mm] \frac{1}{q} & \text{αν } x = \frac{p}{q} \,,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \text{ και } p, q \text{ πρώτοι μεταξύ τους} \,. \end{cases}$$
Η f είναι συνεχής στους άρρητους αριθμούς και το 0 και ασυνεχής στο $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Απόδειξη. (i) Έστω x_0 ρητός αριθμός, $x_0 \neq 0$. Υπάρχει ακολουθία (α_n) άρρητων αριθμών με $\alpha_n \to x_0$. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, από την αρχή μεταφοράς έχουμε $0 = f(\alpha_n) \to f(x_0)$ και επομένως $f(x_0) = 0$. Άτοπο, επειδή από τον ορισμό της f είναι $f(x_0) \neq 0$. Άρα η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

(ii) Έστω x_0 άρρητος αριθμός. Από την αρχή μεταφοράς αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) πραγματικών αριθμών με $x_n \to x_0$, η $f(x_n) \to f(x_0)$. Επειδή $f(x_n) = 0$ αν x_n άρρητος ή $x_n = 0$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η (x_n) **είναι ακολουθία ρητών αριθμών**, έστω $x_n = p_n/q_n$, με $p_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$ και $(p_n, q_n) = 1$.

Επειδή $f(x_0) = 0$ και $f(x_n) = f(p_n/q_n) = 1/q_n$, αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία (q_n) φυσικών αριθμών τείνει στο άπειρο, δηλαδή $\lim_{n\to} q_n = \infty$. Η απόδειξη θα γίνει με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι η (q_n) δεν τείνει στο άπειρο. Τότε υπάρχει υπακολουθία (q_{k_n}) φυσικών αριθμών με $q_{k_n} \leq A < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως πεπερασμένο το πλήθος όροι της (q_{k_n}) είναι διάφοροι μεταξύ τους. Επειδή $x_n \to x_0$, η υπακολουθία $(x_{k_n}) = (p_{k_n}/q_{k_n})$ τείνει στο x_0 και επομένως θα είναι φραγμένη, έστω $|x_{k_n}| \leq B < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε

$$|p_{k_n}| = q_{k_n}|x_{k_n}| \leq AB < \infty\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

και επομένως πεπερασμένο το πλήθος όροι της ακολουθίας (p_{k_n}) ακέραιων αριθμών είναι διάφοροι μεταξύ τους. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το σύνολο

$$E := \left\{ x_{k_n} = \frac{p_{k_n}}{q_{k_n}} \,:\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

των όρων της υπακολουθίας (x_{k_n}) είναι πεπερασμένο και κατά συνέπεια $x_{k_n} \to x_0 \in E$. Άτοπο, επειδή το x_0 είναι άρρητος αριθμός. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $q_n \not\to \infty$. Επομένως $q_n \to \infty$ οπότε

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0 = f(x_0)\,.$$

(iii) $x_0 = 0$. Από τον ορισμό της f είναι $|f(x)| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ και άρα η f είναι συνεχής στο 0. □

1.3 Μονότονες και αντίστροφες συναρτήσεις

Αν μία συνάρτηση f είναι αύξουσα ή φθίνουσα σ' ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η f είναι **μονότονη** στο A. Ας σημειωθεί ότι αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A, τότε η $g := -f$ είναι φθίνουσα στο A. Αντίστοιχα, αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα στο A, τότε η $g := -f$ είναι αύξουσα στο A.

Οι μονότονες συναρτήσεις δεν είναι κατανάγκη συνεχείς. Για παράδειγμα, αν

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 0]\ , \\ 1 & x \in (0, 1]\ , \end{cases}$$

τότε η f είναι αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$ και δεν είναι συνεχής για $x = 0$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. Δηλαδή $f(0-) = 0$ και $f(0+) = 1$. Στο παρακάτω θεώρημα αποδεικνύουμε ότι τα πλευρικά όρια μιας μονότονης συνάρτησης πάντοτε υπάρχουν στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της.

Θεώρημα 1.25. *Έστω η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη στο διάστημα I και έστω το $x_0 \in I$ δεν είναι άκρο του διαστήματος. Αν η f είναι* **αύξουσα**, *τότε τα πλευρικά όρια $f(x_0-)$, $f(x_0+)$ υπάρχουν και είναι*

(i) $f(x_0-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\, x < x_0\}$,

(ii) $f(x_0+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I,\, x > x_0\}$,

(iii) $f(x_0-) \leq f(x_0) \leq f(x_0+)$.

Επίσης αν τα σημεία $p, q \in I$ δεν είναι άκρα του διαστήματος, τότε

$$p < q \Rightarrow f(p+) \leq f(q-)\,.$$

Αν η f είναι **φθίνουσα**, *τότε τα πλευρικά όρια $f(x_0-)$, $f(x_0+)$ υπάρχουν και είναι*

(i') $f(x_0-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I,\, x < x_0\}$,

(ii') $f(x_0+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\, x > x_0\}$,

(iii') $f(x_0-) \geq f(x_0) \geq f(x_0+)$.

Επίσης αν τα σημεία $p, q \in I$ δεν είναι άκρα του διαστήματος, τότε

$$p < q \Rightarrow f(p+) \geq f(q-)\,.$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι αύξουσα στο διάστημα I.

(i) Αν $x \in I$ με $x < x_0$, τότε $f(x) \leq f(x_0)$ και κατά συνέπεια το σύνολο $\{f(x) : x \in I, x < x_0\}$ είναι άνω φραγμένο από το $f(x_0)$. Επομένως το

$$L := \sup\{f(x) : x \in I,\, x < x_0\} \text{ υπάρχει}\,.$$

Τότε, από τον ορισμό του *supremum* έπεται ότι

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } x_\varepsilon \in I \text{ με } x_\varepsilon < x_0, \text{ τέτοιο ώστε } L - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq L\,.$$

Στη συνέχεια παίρνουμε $\delta > 0$ με $\delta := x_0 - x_\varepsilon$. Για κάθε $x \in I$ με $x_0 - \delta < x < x_0$ έπεται ότι $x_\varepsilon < x < x_0$ και επειδή η f είναι αύξουσα έχουμε

$$L - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq L < L + \varepsilon\,.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in I$ με $x_0 - \delta < x < x_0$ είναι $|f(x) - L| < \varepsilon$. Άρα, $f(x_0-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια.

(iii) Επειδή $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x > x_0$, έχουμε

$$f(x_0-) = \sup_{x<x_0} f(x) \leq f(x_0) \leq \inf_{x>x_0} f(x) = f(x_0+)\,.$$

Αν τα σημεία $p, q \in I$ με $p < q$ δεν είναι άκρα του διαστήματος, παίρνουμε x_0 τέτοιο ώστε $p < x_0 < q$. Τότε

$$f(p+) = \inf_{x>p} f(x) \leq f(x_0) \leq \sup_{x<q} f(x) = f(q-)\,.$$

□

Παράδειγμα 1.26. *Έστω $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια αρίθμηση των ρητών αριθμών στο διάστημα $[0,1]$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \sum_{r_n<x} \frac{1}{2^n}\,.$$

Το άθροισμα το παίρνουμε για εκείνα τα n για τα οποία $r_n < x$. Θέτουμε $f(x) = 0$ αν δεν υπάρχουν σημεία r_n στα αριστερά του x.

Η συνάρτηση f είναι αύξουσα στο διάστημα $[0,1]$. Για κάθε $c \in (0,1]$ είναι

$$f(c-) = \lim_{h\to 0^+} f(c-h) = \lim_{h\to 0^+} \sum_{r_n<c-h} \frac{1}{2^n} = \sum_{r_n<c} \frac{1}{2^n} = f(c)\,,$$

δηλαδή η συνάρτηση f είναι από αριστερά συνεχής για κάθε $c \in (0,1]$. Για κάθε $c \in [0,1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(c+) &= \lim_{h\to 0^+} f(c+h) \\ &= \lim_{h\to 0^+} \sum_{r_n<c+h} \frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{r_n\le c} \frac{1}{2^n}\,. \end{aligned}$$

Επομένως

$$f(c+) = \sum_{r_n\le c} \frac{1}{2^n} = \sum_{r_n<c} \frac{1}{2^n} = f(c) \qquad \text{(αν } c \text{ άρρητος)}$$

και

$$f(c+) = \sum_{r_n\le c} \frac{1}{2^n} > \sum_{r_n<c} \frac{1}{2^n} = f(c)\,. \qquad \text{(αν } c \text{ ρητός)}$$

Αν $c \in (0,1)$ είναι άρρητος αρθμός, τότε $f(c-) = f(c+) = f(c)$ και κατά συνέπεια η συνάρτηση f είναι συνεχής στους άρρητους αριθμούς του διαστήματος $[0,1]$. Επειδή $f(c-) = f(c)$ και $f(c+) > f(c)$ για κάθε ρητό αριθμό $c \in [0,1]$, το όριο $\lim_{x\to c} f(x)$ δεν υπάρχει για κάθε ρητό αριθμό $c \in [0,1]$.

Η απόδειξη του επόμενου αποτελέσματος προκύπτει εύκολα από το Θεώρημα 1.25.

Πόρισμα 1.27. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι* **αύξουσα** *στο διάστημα I και ότι το $c \in I$ δεν είναι άκρο του διαστήματος. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

1. *Η f είναι συνεχής στο c.*
2. $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x\to c^+} f(x)$.
3. $\sup\{f(x) : x \in I, x < c\} = f(c) = \inf\{f(x) : x \in I, x > c\}$.

Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση που η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα στο διάστημα I.

Πρόταση 1.28. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη στο ανοικτό διάστημα I. Τότε, το σύνολο των σημείων του I στα οποία η f δεν είναι συνεχής είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αύξουσα. Έστω

$$D = \{p \in I : \text{η } f \text{ δεν είναι συνεχής στο } p\} \ .$$

Τότε, $p \in D \Leftrightarrow f(p-) < f(p+)$. Επειδή το σύνολο των ρητών είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, για κάθε $p \in D$ υπάρχει ρητός r_p με

$$f(p-) < r_p < f(p+) \, .$$

Έστω $p, q \in D$ με $p < q$. Από το Θεώρημα 1.25 είναι $f(p+) \leq f(q-)$. Επομένως υπάρχουν ρητοί αριθμοί r_p, r_q με

$$f(p-) < r_p < f(p+) \leq f(q-) < r_q < f(q+) \, .$$

Δηλαδή $p < q$ στο D συνεπάγεται $r_p < r_q$. Παρόμοια $p > q$ στο D συνεπάγεται $r_p > r_q$. Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι στα $p, q \in D$ με $p \neq q$ αντιστοιχούν ρητοί αριθμοί r_p, r_q με $r_p \neq r_q$. Επομένως η συνάρτηση

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ p & \longmapsto & r_p \end{array}$$

είναι ένα προς ένα. Κατά συνέπεια το σύνολο E είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο του $\mathbb{Q}$. Όμως το σύνολο των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Άρα και το σύνολο E θα είναι αριθμήσιμο.
Η απόδειξη είναι παρόμοια στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι φθίνουσα. □

Θεώρημα 1.29. *Έστω η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι γνήσια αύξουσα(αντ. φθίνουσα) και συνεχής στο διάστημα I. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f(I) \to I$ είναι γνήσια αύξουσα(αντ. φθίνουσα) και συνεχής στο διάστημα $f(I)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα(η απόδειξη είναι παρόμοια αν η f είναι γνήσια φθίνουσα). Επομένως η f είναι $1-1$.

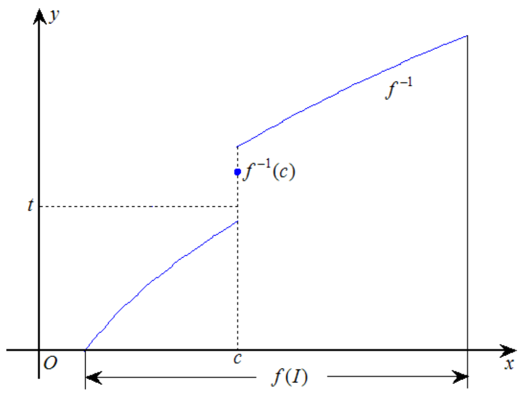
Επειδή η f είναι συνεχής, το $f(I)$ είναι ένα διάστημα. Θα αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι γνήσια αύξουσα. Έστω $y_1, y_2 \in f(I)$ με $y_1 < y_2$. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in I$ με $f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$. Είναι $x_1 < x_2$. Πράγματι, αν $x_1 \geq x_2$ τότε θα έχουμε

$$y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2 \,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$, δηλαδή η f^{-1} είναι γνήσια αύξουσα.

Απομένει να δείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο διάστημα $f(I)$. Η απόδειξη θα γίνει με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι η f^{-1} δεν είναι συνεχής σε κάποιο σημείο c του διαστήματος $f(I)$. Τότε από το Θεώρημα 1.25 τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to c^-} f^{-1}(x), \lim_{x\to c^+} f(x)$ υπάρχουν και είναι

$$\lim_{x\to c^-} f^{-1}(x) = f^{-1}(c-) < f^{-1}(c+) = \lim_{x\to c^+} f^{-1}(x)\,.$$



Αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε $t \neq f^{-1}(c)$ με $\lim_{x\to c^-} f^{-1}(x) < t < \lim_{x\to c^+} f(x)$, τότε $t \neq f^{-1}(s)$ για κάθε $s \in f(I)$(βλέπε το παραπάνω σχήμα). Επομένως $t \notin I$, άτοπο επειδή το I είναι διάστημα. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής στο διάστημα $f(I)$. □

1.4 Σύνολα Cantor και η ιδιάζουσα συνάρτηση Cantor–Lebesgue

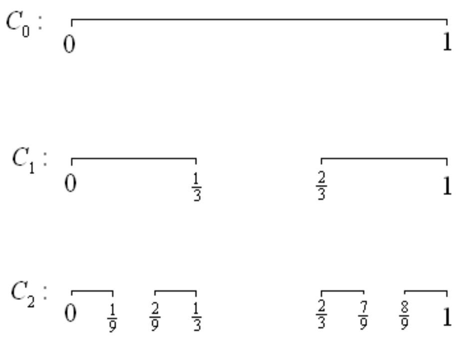
Ένα τέτοιο σύνολο και συγκεκριμένα το *τριαδικο σύνολο Cantor κατασκευάστηκε από τον Georg Cantor* $(1845-1918)$ *προκειμένου να λύσει ένα πρόβλημα στις τριγωνομετρικές σειρές.*

1.4.1 Κατασκευή του Τριαδικού Συνόλου Cantor

Το τριαδικό σύνολο Cantor είναι ένα υποσύνολο του $[0,1]$ που κατασκευάζεται ως εξής :

Πρώτο βήμα. *Έστω $C_0 = [0,1]$. Αφαιρώντας το ανοικτό διάστημα $I_{1,1} = (1/3, 2/3)$ παίρνουμε το σύνολο $C_1 = J_{1,1} \cup J_{1,2}$, όπου $J_{1,1} = [0, 1/3]$ και $J_{1,2} = [2/3, 1]$.*

Δεύτερο βήμα. *Στη συνέχεια αφαιρούμε από το σύνολο C_1 τα διαστήματα $I_{2,1} = (1/9, 2/9)$ και $I_{2,2} = (7/9, 8/9)$, οπότε προκύπτει το σύνολο $C_2 = J_{2,1} \cup J_{2,2} \cup J_{2,3} \cup J_{2,4}$, όπου $J_{2,1} = [0, 1/9]$, $J_{2,2} = [2/9, 1/3]$, $J_{2,3} = [2/3, 7/9]$ και $J_{2,4} = [8/9, 1]$.*



Εργαζόμαστε επαγωγικά.

n-οστό βήμα. *Υποθέτουμε ότι το σύνολο $C_{n-1} = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} J_{n-1,k}$ έχει κατασκευαστεί, όπου τα διαστήματα $J_{n-1,k}$ $(1 \le k \le 2^{n-1})$, μήκους $1/3^{n-1}$ το καθένα, είναι κλειστά και ξένα ανά δύο. Αν αφαιρέσουμε από το $J_{n-1,k}$ το ανοικτό διάστημα $I_{n,k}$ $(1 \le k \le 2^{n-1})$ που έχει μήκος $1/3^n$ και έχει το ίδιο μέσο με το κλειστό διάστημα $J_{n-1,k}$, προκύπτουν τα υποδιαστήματα $J_{n,2k-1}$ και $J_{n,2k}$. Το $J_{n,2k-1}$ έχει το ίδιο αριστερό άκρο με το $J_{n-1,k}$ και το $J_{n,2k}$ έχει το ίδιο δεξιό άκρο με το $J_{n-1,k}$. Επαγωγικά λοιπόν ορίζονται τα κλειστά και ξένα ανά δύο διαστήματα $(J_{n,k})_{k=1}^{2^n}$ μήκους $1/3^n$ το καθένα. Έτσι παίρνουμε το σύνολο*

$$C_n = J_{n,1} \cup J_{n,2} \cup \cdots \cup J_{n,2^n} .$$

Δηλαδή το C_n προκύπτει από το C_{n-1} αφαιρώντας από το μέσο των $J_{n-1,k}$ $(1 \le k \le 2^{n-1})$ τα ανοικτά διαστήματα $I_{n,k}$. Τα ανοικτά διαστήματα $I_{n,k}$ $\left(1 \le k \le 2^{n-1}\right)$ έχουν μήκος $1/3^n$ και προφανώς είναι ξένα ανά δύο. Επίσης είναι προφανές ότι

$$[0,1] = C_0 \supset C_1 \supset C_2 \cdots \supset C_n \supset \cdots$$

και

$$C_{n-1} \setminus C_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k} .$$

Ας σημειωθεί ότι τα ανοικτά και ξένα ανά δύο διαστήματα $I_{n,k}$ $(1 \le k \le 2^{n-1})$, που αφαιρούνται *από το σύνολο C_{n-1} για την κατασκευή του συνόλου C_n, έχουν συνολικό μήκος*

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \ell\left(I_{n,k}\right) = 2^{n-1}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n ,$$

ενώ τα κλειστά και ξένα ανά δύο διαστήματα $J_{n,k}$ $(1 \leq k \leq 2^n)$ που αποτελούν το σύνολο C_n έχουν συνολικό μήκος

$$\sum_{k=1}^{2^n} \ell\left(J_{n,k}\right) = 2^n\frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

Έχουμε λοιπόν κατασκευάσει μια φθίνουσα ακολουθία (C_n) κλειστών συνόλων. **Το τριαδικό σύνολο Cantor** *είναι το*

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n . \tag{1.3}$$

Συνολικά, για την κατασκευή του C, το άθροισμα των μηκών των διαστημάτων που αφαιρούνται είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 .$$

Επομένως $m(C) = 0$, δηλαδή το μέτρο Lebesgue του τριαδικού συνόλου Cantor C είναι μηδέν (παραπέμπουμε στο επόμενο κεφάλαιο).

Αναφέρουμε τώρα τις ιδιότητες του τριαδικού συνόλου Cantor.

(1) Από τον ορισμό του τριαδικού συνόλου Cantor, δηλαδή από την (1.3), προκύπτει ότι το C είναι κλειστό σύνολο. Επειδή το C είναι και φραγμένο, το C είναι ένα μη κενό συμπαγές σύνολο.

(2) Το τριαδικό σύνολο Cantor C περιέχει όλα τα άκρα των κλειστών διαστημάτων $(J_{n,k})$, $n = 1, 2, \dots , k = 1, 2, \dots, 2^n$.

(3) Κάθε σημείο του C είναι σημείο συσσώρευσης ($\sigma.\sigma$) του C.

Απόδειξη. Έστω $c \in C$ και έστω $\delta > 0$. Παίρνουμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/3^n < \delta$. Επειδή $c \in C_n$, $c \in J_{n,k}$ για κάποιο k, $1 \leq k \leq 2^n$. Όμως το $J_{n,k}$ είναι ένα κλειστό διάστημα της μορφής

$$J_{n,k} = \left[\frac{x_k}{3^n}, \frac{x_k+1}{3^n}\right] .$$

Επειδή $\ell(J_{n,k}) = 1/3^n < \delta$, $J_{n,k} \subset (c-\delta, c+\delta)$. Επομένως τα δύο άκρα του κλειστού διαστήματος $J_{n,k}$ ανήκουν στο $C \cap (c-\delta, c+\delta)$ και κατά συνέπεια τουλάχιστον ένα από αυτά θα είναι διαφορετικό από το c. Δηλαδή $(C \setminus \{c\}) \cap (c-\delta, c+\delta) \neq \emptyset$, για κάθε $\delta > 0$.

Σημείωση. Για την απόδειξη θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τον εξής χαρακτηρισμό ενός κλειστού συνόλου: Ένα σύνολο $F \subseteq \mathbb{R}$ είναι κλειστό αν και μόνο αν τα σημεία συσσώρευσης του F ανήκουν στο F. □

(4) Το C δεν περιέχει ανοικτό διάστημα.

Απόδειξη. Αν $(a,b) \subset C$, τότε $(a,b) \subset C_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Κατά συνέπεια $(a,b) \subset J_{n,k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ και για κάποιο k, $1 \leq k \leq 2^n$. Επομένως θα είναι $b - a \leq \ell(J_{n,k}) = 1/3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Άρα, $(a,b) = \emptyset$ (άτοπο). □

(5) Το C είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το C είναι αριθμήσιμο, έστω $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$.

Θέτουμε $F_1 = J_{1,1} = [0, 1/3]$(αντίστοιχα $F_1 = J_{1,2} = [2/3, 1]$) αν το $J_{1,1}$ δεν περιέχει το c_1(αντίστοιχα το $J_{1,2}$ δεν περιέχει το c_1).

Θέτουμε $F_2 = J_{2,1} = [0, 1/9]$ (αντίστοιχα $F_2 = J_{2,2} = [2/9, 1/3]$) αν το $J_{2,1}$ δεν περιέχει το c_2 (αντίστοιχα το $J_{2,2}$ δεν περιέχει το c_2).

Συνεχίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε ακολουθία (F_k) κλειστών διαστημάτων, τέτοια ώστε

$$F_{k+1} \subset F_k \text{ και } F_k \subset C_k \text{ με } c_k \notin F_k \,.$$

Επειδή

$$\lim_{k\to\infty} \ell(F_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3^k} = 0\,,$$

από την ιδιότητα των κιβωτισμένων διαστημάτων η τομή όλων των F_k περιέχει ένα ακριβώς στοιχείο, έστω $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \{x\}$. Όμως

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = C$$

και επομένως το $x \in C$, δηλαδή το x είναι στοιχείο του τριαδικού συνόλου Cantor C. Λόγω της υπόθεσης θα είναι $x = c_n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε,

$$c_n = x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \subset F_n \,.$$

Άτοπο, επειδή από την κατασκευή των διαστημάτων F_k το $c_n \notin F_n$. Άρα το C δεν είναι αριθμήσιμο. $\square$

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι το C αποτελείται απο εκείνα τα $x \in [0,1]$ που στο τριαδικό τους ανάπτυγμα υπάρχουν μόνο τα ψηφία 0 και 2. Επομένως, από το Πόρισμα 1.15 το σύνολο Cantor έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς.

Στο πρώτο βήμα της κατασκευής του τριαδικού συνόλου Cantor C έχουμε το σύνολο

$$C_1 = J_{1,1} \cup J_{1,2} \;\text{ με }\; J_{1,1} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \;\text{ και }\; J_{1,2} = \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Επειδή

$$\frac{1}{3} \underset{3}{=} 0,0222\cdots \,,$$

κάθε $x \in J_{1,1}$ έχει στο τριαδικό ανάπτυγμα πρώτο ψηφίο το 0. Επειδή

$$\frac{2}{3} \underset{3}{=} 0,2 \quad \text{και} \quad 1 \underset{3}{=} 0,222\cdots \,,$$

κάθε $x \in J_{1,2}$ έχει στο τριαδικό ανάπτυγμα πρώτο ψηφίο το 2.

Στο δεύτερο βήμα της κατασκευής του τριαδικού συνόλου Cantor C έχουμε το σύνολο

$$C_2 = J_{2,1} \cup J_{2,2} \cup J_{2,3} \cup J_{2,4} \text{ με } J_{2,1} = \left[0, \frac{1}{9}\right],\, J_{2,2} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right],\, J_{2,3} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \text{ και } J_{2,4} = \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Επειδή

$$\frac{1}{9} \underset{3}{=} 0,01 \underset{3}{=} 0,00222\cdots \,,$$

κάθε $x \in J_{2,1}$ έχει στο τριαδικό ανάπτυγμα δεύτερο ψηφίο το 0. Επειδή

$$\frac{2}{9} \underset{3}{=} 0,02 \quad \text{και} \quad \frac{1}{3} \underset{3}{=} 0,1 \underset{3}{=} 0,0222\cdots \,,$$

κάθε $x \in J_{2,2}$ έχει στο τριαδικό ανάπτυγμα δεύτερο ψηφίο το 2. Επειδή

$$\frac{2}{3} \underset{3}{=} 0,20 \quad \text{και} \quad \frac{7}{9} \underset{3}{=} 0,21 \underset{3}{=} 0,20222\cdots \,,$$

κάθε $x \in J_{2,3}$ έχει στο τριαδικό ανάπτυγμα δεύτερο ψηφίο το 0. Τέλος, επειδή

$$\frac{8}{9} \underset{3}{=} 0,22 \quad \text{και} \quad 1 \underset{3}{=} 0,222\cdots ,$$

κάθε $x \in J_{2,4}$ έχει στο τριαδικό ανάπτυγμα δεύτερο ψηφίο το 2.

Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία διαπιστώνεται ότι κάθε $x \in C_n$ έχει στο τριαδικό ανάπτυγμα n-οστό ψηφίο είτε το 0 ή το 2. Άρα, επειδή $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, κάθε $x \in C$ έχει στο τριαδικό ανάπτυγμα μόνο τα ψηφία 0 και 2.

Θα δώσουμε τώρα μια αναλυτική απόδειξη.

Πρόταση 1.30. *Έστω S το σύνολο των ακολουθιών $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}$, με $\varepsilon_j = 0$ ή 2.*

(α΄) *Για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, όπου $\varepsilon_j = 0$ ή 2, τα διαστήματα*

$$J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) := \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j}{3^j}, \quad \frac{1}{3^n} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j}{3^j} \right], \tag{1.4}$$

είναι ακριβώς τα κλειστά διαστήματα $J_{n,k}$ $(1 \le k \le 2^n)$ στην κατασκευή του συνόλου Cantor C.

(β΄) *Η απεικόνιση $f : S \to C$ με $f(\varepsilon) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_j}{3^j}$ είναι $1-1$ και επί. Δηλαδή τα στοιχεία του C είναι ακριβώς αυτά τα $x \in [0,1]$ τα οποία έχουν τριαδικό ανάπτυγμα με ψηφία 0 ή 2.*

Απόδειξη. (α΄) Επειδή $J(0) = [0, 1/3] = J_{1,1}$ και $J(2) = [2/3, 1] = J_{1,2}$, η (α΄) ισχύει για $n = 1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει η (α΄) για $n-1$, δηλαδή $J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) = J_{n-1,k}$ για μία και μοναδική ακολουθία $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$. Υπενθυμίζεται, από την κατασκευή του συνόλου C_n, ότι τα $J_{n,2k-1}$ και $J_{n,2k}$, με μήκος $1/3^n$, είναι το πρώτο και το τρίτο υποδιάστημα του $J_{n-1,k}$ αντίστοιχα. Όμως από την (1.4), τα $J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, 0)$ και $J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, 2)$ είναι ακριβώς τα υποδιαστήματα $J_{n,2k-1}$ και $J_{n,2k}$ του $J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) = J_{n-1,k}$. Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι η (α΄) ισχύει για κάθε n.

(β΄) Επειδή

$$f(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_j}{3^j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j}{3^j} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_j}{3^j} \le \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j}{3^j} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j}{3^j} + \frac{1}{3^n}, \tag{1.5}$$

από την (1.4) προκύπτει ότι η $f(\varepsilon) \in J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επίσης από την (α'), $\forall n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $k(\varepsilon, n)$ $(1 \leq k(\varepsilon, n) \leq 2^n)$, τέτοιο ώστε $J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = J_{n,k(\varepsilon,n)} \subset C_n$. Επομένως, $f(\varepsilon) \in C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Δηλαδή η f απεικονίζει το S στο C.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η f είναι $1-1$. Πράγματι, αν $\varepsilon \neq \varepsilon'$, τότε $\varepsilon_n \neq \varepsilon'_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$. Όμως από την (α') τα $f(\varepsilon)$ και $f(\varepsilon')$ βρίσκονται σε διαφορετικά από τα 2^n και ξένα ανά δύο $J_{n,k}$. Επομένως η f είναι $1-1$.

Τέλος αποδεικνύουμε ότι η f είναι επί. Έστω $x \in C$. Επειδή το $x \in C_1$, $x \in J(0)$ ή $x \in J(2)$. Παίρνουμε ε_1 τέτοιο ώστε $x \in J(\varepsilon_1)$. Έστω τα $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ έχουν επιλεγεί έτσι ώστε $x \in J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$. Επειδή

$$x \in C_n \cap J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) = J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, 0) \cup J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, 2) \ ,$$

παίρνουμε το ε_n έτσι ώστε το $x \in J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Επαγωγικά, έχουμε επιλέξει ακολουθία $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty} \in S$ τέτοια ώστε

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \ .$$

Όμως από την (1.4) και την (1.5) το $f(\varepsilon) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Επειδή

$$J(\varepsilon_1) \supset J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \supset \cdots \supset J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \supset \cdots$$

και το μήκος $\ell(J(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)) = \frac{1}{3^n} \longrightarrow 0$, καθώς το $n \to \infty$, θα πρέπει να είναι $f(\varepsilon) = x$.

□

Παρατήρηση 1.31. *Επειδή το σύνολο Cantor C έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς, το C περιέχει και άλλα άπειρα σημεία εκτός από τα σημεία*

$$0,\ 1,\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \ldots$$

τα οποία είναι τα άκρα των ανοικτών διαστημάτων που αφαιρούνται κατά τη διαδικασία κατασκευής του C και τα οποία προφανώς ανήκουν στο C. Για παράδειγμα, το $1/4$ δεν αποτελεί άκρο κανενός από τα διαστήματα που αφαιρούνται για την κατασκευή του C. 'Ομως

$$\frac{1}{4} \underset{3}{=} 0,020202\cdots$$

και επομένως το $1/4 \in C$.

Παράδειγμα 1.32. *Αν C είναι το τριαδικό σύνολο Cantor και $C - C \overset{\text{ορ.}}{=} \{x - y : x, y \in C\}$, να αποδειχθεί ότι $C - C = [-1, 1]$.*

Απόδειξη. Αν $x, y \in C$, τότε $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ και $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}$, με $x_n, y_n \in \{0, 2\}$. Επομένως

$$x - y = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_n - y_n)/2}{3^n}, \quad \text{με } (x_n - y_n)/2 \in \{-1, 0, 1\}.$$

Αν τώρα $a \in [-1, 1]$, είναι $a = 2t - 1$ για κάποιο $t \in [0, 1]$ και στο τριαδικό σύστημα $a = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n} - 1$, με $t_n \in \{0, 1, 2\}$. Είναι λοιπόν

$$a = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n} - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t_n - 1)}{3^n}, \quad \text{με } (t_n - 1) \in \{-1, 0, 1\}.$$

Άρα, $C - C = [-1, 1]$. □

1.4.2 Η ιδιάζουσα συνάρτηση Cantor–Lebesgue.

Με τον όρο "*ιδιάζουσα συνάρτηση*" *(singular function)* εννοούμε μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα $[a, b]$ και η οποία έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$.
- Υπάρχει ένα σύνολο $N \subset [a, b]$ μέτρου Lebesgue μηδέν (θα ορίσουμε το μέτρο Lebesgue στο επόμενο κεφάλαιο), τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [a, b] \setminus N$ η παράγωγος f' υπάρχει και ισούται με το μηδέν. Δηλαδή η παράγωγος της f μηδενίζεται σχεδόν παντού στο $[a, b]$ (παραπέμπουμε στο κεφάλαιο 3).
- Η f είναι αύξουσα στο διάστημα $[a, b]$.
- $f(a) < f(b)$.

Ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η *συνάρτηση Cantor-Lebesgue* $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ η οποία λέγεται και "**σκάλα του διαβόλου**"(devil's staircase). Η φ είναι χρήσιμη στην κατασκευή παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έστω G_n η ένωση όλων των $2^n - 1$ ανοικτών και ξένων ανά δύο διαστημάτων που αφαιρούνται στα πρώτα n βήματα της διαδικασίας για την κατασκευή του τριαδικού συνόλου Cantor C. Δηλαδή

$$G_n = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{j,k}.$$

Είναι $C_n = [0,1] \setminus G_n$. Αν $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, τότε

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} ([0,1] \setminus G_n) = [0,1] \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \right) = [0,1] \setminus G\,.$$

Παρότι $\varphi(1) > \varphi(0)$, θα αποδείξουμε ότι η φ είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό σύνολο G με $\varphi'(x) = 0$ για κάθε $x \in G$. Είναι $m(G) = 1$, δηλαδή το μέτρο Lebesgue του G είναι 1. Επειδή $m(C) = 1 - m(G) = 0$, δηλαδή το μέτρο Lebesgue του τριαδικού συνόλου Cantor είναι μηδέν, είναι $\varphi'(x) = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

Πρόταση 1.33 (Ιδιάζουσα συνάρτηση Cantor–Lebesgue). *Ορίζουμε τη συνάρτηση Cantor-Lebesgue $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ ως εξής :*

Αν $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, $a_n = 0$ ή $a_n = 2$, δηλαδή το x ανήκει στο τριαδικό σύνολο Cantor C, θέτουμε

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \right) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \frac{1}{2^n}\,. \tag{1.6}$$

Δηλαδή, αν a_n είναι το n-οστό ψηφίο στο τριαδικό ανάπτυγμα του x, τότε το n-οστό ψηφίο στο δυαδικό ανάπτυγμα της $\varphi(x)$ είναι $\frac{a_n}{2}$. Στη συνέχεια επεκτείνουμε τη συνάρτηση φ στο $[0,1]$ θέτοντας

$$\varphi(x) = \sup\left\{ \varphi(y) : y \in C,\, y < x \right\}\,. \tag{1.7}$$

Τότε, η συνάρτηση φ απεικονίζει το C επί του $[0,1]$. Επιπλέον, η φ είναι αύξουσα και συνεχής στο $[0,1]$ με $\varphi'(x) = 0$ για κάθε $x \in G = [0,1] \setminus C$.

Απόδειξη. 1. Η φ απεικονίζει το τριαδικό σύνολο Cantor C επί του $[0,1]$.

Πράγματι, έστω $y \in [0,1]$. Αν $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$ με $b_n = 0$ ή 1 είναι το δυαδικό ανάπτυγμα του y, τότε

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} = \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b_n}{3^n} \right) \quad \text{με } 2b_n = 0 \text{ ή } 2\,.$$

2. Η φ είναι αύξουσα στο $[0,1]$.

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η φ είναι αύξουσα στο τριαδικό σύνολο Cantor C. Έστω $x, y \in C$ με $x < y$. Τότε για κάποιο $N \in \mathbb{N}^*$

$$x \underset{3}{=} 0, a_1 a_2 \cdots a_{N-1} a_N a_{N+1} \cdots\,, \quad a_n = 0 \text{ ή } 2\,,$$

$$y \underset{3}{=} 0, b_1 b_2 \cdots b_{N-1} b_N b_{N+1} \cdots, \quad b_n = 0 \text{ ή } 2,$$

όπου $a_n = b_n$ για $n < N$ και $a_N = 0$, $b_N = 2$ (αν $N = 1$, τότε $a_1 = 0$, $b_1 = 2$). Δηλαδή

$$x \underset{3}{=} 0, a_1 a_2 \cdots a_{N-1} 0\, a_{N+1} \cdots, \quad a_n = 0 \text{ ή } 2,$$

$$y \underset{3}{=} 0, a_1 a_2 \cdots a_{N-1} 2\, b_{N+1} \cdots, \quad b_n = 0 \text{ ή } 2.$$

Από την (1.6) έχουμε

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{2^{n+1}} + \frac{0}{2^{N+1}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{2^{n+1}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{2^{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{2^{n+1}} + \frac{2}{2^{N+1}} \\
&= 0, \left(\frac{a_1}{2}\right)\left(\frac{a_2}{2}\right) \cdots \left(\frac{a_{N-1}}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{0}{2}\right) \cdots && (\text{βάση } 2) \\
&\leq 0, \left(\frac{a_1}{2}\right)\left(\frac{a_2}{2}\right) \cdots \left(\frac{a_{N-1}}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{b_{N+1}}{2}\right) \cdots && (\text{βάση } 2) \\
&= \varphi(y).
\end{aligned}$$

Επομένως η φ είναι αύξουσα στο τριαδικό σύνολο Cantor C. Τότε, από την (1.7) είναι προφανές ότι η φ είναι αύξουσα στο $[0,1]$.

3. Η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

   Επειδή η φ είναι αύξουσα, για κάθε $x_0 \in (0,1)$ έχουμε

   $$\varphi(x_0-) \leq \varphi(x_0) \leq \varphi(x_0+),$$

   όπου $\varphi(x_0-) = \lim_{x \to x_0^-} \varphi(x)$ και $\varphi(x_0+) = \lim_{x \to x_0^+} \varphi(x)$. Ως γνωστόν, Θεώρημα 1.25, είναι

   $$\varphi(x_0-) = \sup\{\varphi(x) : 0 \leq x < x_0\} \text{ και } \varphi(x_0+) = \inf\{\varphi(x) : x_0 < x \leq 1\}.$$

   Αν υποθέσουμε ότι $\varphi(x_0-) < \varphi(x_0)$, η φ δεν παίρνει τιμές στο διάστημα $(\varphi(x_0-), \varphi(x_0))$. Άτοπο επειδή $\varphi(C) = [0,1]$. Παρόμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $\varphi(x_0) < \varphi(x_0+)$. Επομένως $\varphi(x_0-) = \varphi(x_0) = \varphi(x_0+)$, δηλαδή η φ είναι συνεχής στο x_0.

   Παρόμοια αποδεικνύεται ότι η φ είναι συνεχής στο 0 και στο 1.

4. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $G = [0,1] \setminus C$ με $\varphi'(x) = 0$ για κάθε $x \in G$.

Παρατηρούμε ότι η φ είναι σταθερή σε κάθε ανοικτό διάστημα $I_{n,k}$, $n = 1,2,\dots$, $k = 1,2,\dots,2^{n-1}$ που αφαιρείται στη διαδικασία κατασκευής του τριαδικού συνόλου Cantor C. Πράγματι, λόγω της (1.6) έχουμε $\varphi(1/3) = \varphi(2/3) = 1/2$. Επειδή η φ είναι αύξουσα,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \quad \text{για } x \in I_{1,1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Παρόμοια, επειδή $\varphi(1/9) = \varphi(2/9) = 1/4$ και $\varphi(7/9) = \varphi(8/9) = 3/4$, είναι

$$\varphi(x) = \frac{1}{2^2} \text{ για } x \in I_{2,1} = \left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right) \text{ και } \varphi(x) = \frac{3}{2^2} \text{ για } x \in I_{2,2} = \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right).$$

Επαγωγικά, η συνάρτηση φ ισούται με

$$\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}$$

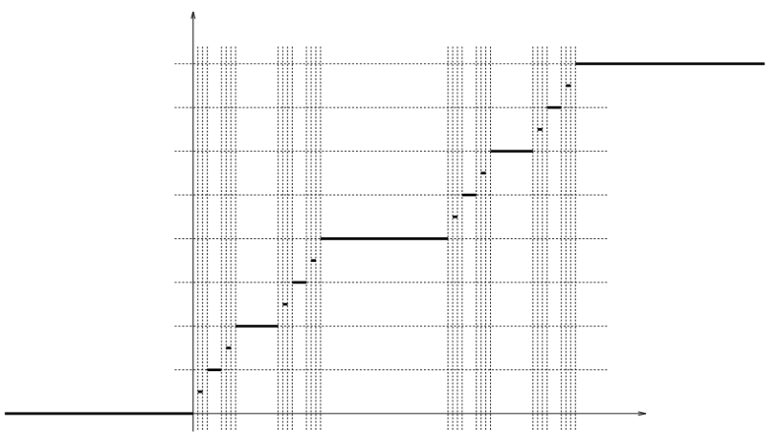
στα 2^{n-1} ανοικτά διαστήματα

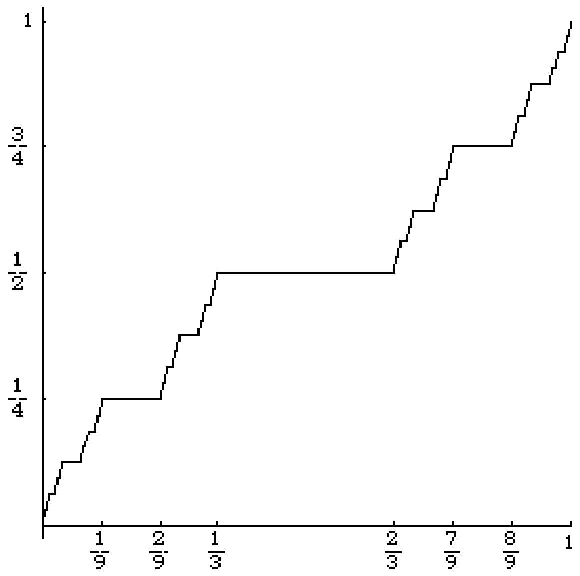
$$I_{n,1}, I_{n,2}, I_{n,3}, \dots, I_{n,2^{n-1}}$$

αντίστοιχα που αφαιρούνται στο n-οστό βήμα της διαδικασίας για την κατασκευή του τριαδικού συνόλου Cantor.

Όμως το G είναι η ένωση των ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων $I_{n,k}$, $n = 1,2,\dots$, $k = 1,2,\dots,2^{n-1}$ και επομένως $\varphi'(x) = 0$ για κάθε $x \in G$.

Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται η γραφική παράσταση της φ. Στο πρώτο σχήμα έχουμε επεκτείνει τη συνάρτηση φ σ' όλο το $\mathbb{R}$ θέτοντας $\varphi(x) = 0$ για $x < 0$ και $\varphi(x) = 1$ για $x > 1$. Η γραφική παράσταση της φ στο δεύτερο σχήμα έγινε με τη βοήθεια του λογισμικού "*Mathematica*".





□

Πόρισμα 1.34. *Επεκτείνουμε τη συνάρτηση Cantor-Lebesgue φ σ' όλο το $\mathbb{R}$ θέτοντας $\varphi(x) = 0$ για $x < 0$ και $\varphi(x) = 1$ για $x > 1$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$F(x) := x + \varphi(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Τότε η συνάρτηση F είναι γνήσια αύξουσα, συνεχής και απεικονίζει το $\mathbb{R}$ επί του $\mathbb{R}$.

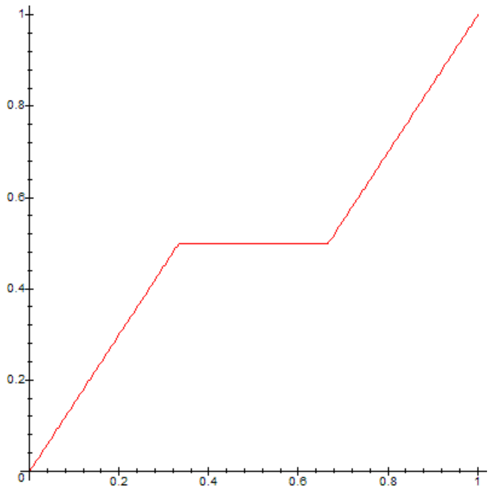
Εναλλακτικός ορισμός της ιδιάζουσας συνάρτησης Cantor–Lebesgue.

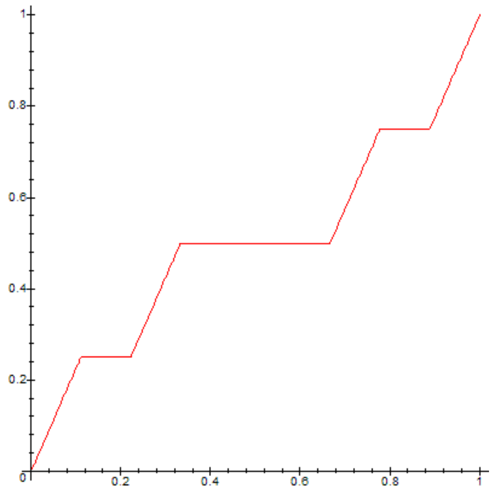
Θα ορίσουμε τώρα τη συνάρτηση Cantor–Lebesgue με ένα διαφορετικό αλλά ισοδύναμο τρόπο με αυτόν που δώσαμε στην Πρόταση 1.33.

Παραπέμπουμε και πάλι στην κατασκευή του τριαδικού συνόλου Cantor C. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ θεωρούμε τα ανοικτά και ξένα ανά δύο διαστήματα $I_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$, **με διάταξη από αριστερά προς τα δεξιά**, που αφαιρούνται στα πρώτα n βήματα της διαδικασίας για την κατασκευή του $C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}$. Είναι

$$I_{n,1} = \left(\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right), \, I_{n,2} = \left(\frac{3}{3^n}, \frac{6}{3^n}\right), \, \ldots, \, I_{n,2^n-1} = \left(\frac{3^n-2}{3^n}, \frac{3^n-1}{3^n}\right).$$

Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με $f_n(x) = k/2^n$ στο $I_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ και παίρνουμε την f_n να είναι γραμμική σε κάθε ένα από τα κλειστά διαστήματα του C_n. Θέτουμε $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$. Οι γραφικές παραστάσεις των f_1 και f_2 φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.





Κάθε συνάρτηση f_n είναι συνεχής και αύξουσα στο διάστημα $[0, 1]$. Επίσης είναι $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ για κάθε $x \in I_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ και

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n}, \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1]\,.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2^n) = 1$ συγκλίνει, από το κριτήριο Weierstrass η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n)$ θα συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$. Έστω

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) = f(x)\,.$$

Επειδή

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) + f_1(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) + f_1(x)\,,$$

αν $\varphi(x) := f(x) + f_1(x)$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στη φ στο $[0, 1]$. Τότε, η συνάρτηση φ είναι αύξουσα και συνεχής στο $[0, 1]$ με $\varphi(0) = 0$ και $\varphi(1) = 1$. Επίσης, η φ είναι σταθερή σε κάθε ανοικτό διάστημα που αφαιρείται για την κατασκευή του τριαδικού συνόλου Cantor. Η $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ είναι η *ιδιάζουσα συνάρτηση Cantor-Lebesgue*.

1.4.3 Κατασκευή του Γενικευμένου Συνόλου Cantor C_a, $0 < a \leq 1$.

Πρώτο βήμα. Έστω $K_0 = [0,1]$. Αφαιρώντας από το μέσο $1/2$ του $[0,1]$ ανοικτό διάστημα μήκους $a/3$, δηλαδή το διάστημα

$$G_1 = I_{1,1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2\cdot 3}\,,\ \frac{1}{2} + \frac{a}{2\cdot 3}\right)\,,$$

παίρνουμε το σύνολο $K_1 = J_{1,1} \cup J_{1,2}$, όπου

$$J_{1,1} = \left[0\,,\ \frac{1}{2} - \frac{a}{2\cdot 3}\right] \quad \text{και} \quad J_{1,2} = \left[\frac{1}{2} + \frac{a}{2\cdot 3}\,,\ 1\right].$$

Είναι

$$\ell\left(J_{1,1}\right) = \ell\left(J_{1,2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{3}\right) > \frac{a}{3^2}\,.$$

Δεύτερο βήμα. Στη συνέχεια αφαιρούμε από τα μέσα των $J_{1,1}$ και $J_{1,2}$ τα ανοικτά διαστήματα $I_{2,1}$ και $I_{2,2}$ αντίστοιχα μήκους $a/3^2$ το καθένα. Αν $G_2 = I_{2,1} \cup I_{2,2}$, τότε προκύπτει το σύνολο $K_2 = [0,1] \setminus (G_1 \cup G_2) = \bigcup_{i=1}^{2^2} J_{2,i} = J_{2,1} \cup J_{2,2} \cup J_{2,3} \cup J_{2,4}$ με

$$\ell\left(J_{2,i}\right) = \frac{1}{2^2}\left(1 - \frac{a}{3} - \frac{2a}{3^2}\right) = \frac{1}{2^2}\left[1 - \frac{a}{3}\left(1 + \frac{2}{3}\right)\right].$$

n-οστό βήμα. Υποθέτουμε ότι έχουμε κατασκευάσει το σύνολο

$$K_{n-1} = [0,1] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} J_{n-1,i}\,,$$

όπου τα κλειστά διαστήματα $J_{n-1,i}$, $i = 1, \ldots, 2^{n-1}$, είναι ξένα ανά δύο με μήκος

$$\ell\left(J_{n-1,i}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\left[1 - \frac{a}{3}\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}\right].$$

Για να αποδείξουμε ότι το μήκος $\ell\left(J_{n-1,i}\right) > a/3^n$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{a}{3}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} < 1\,.$$

Πράγματι, είναι

$$\frac{a}{3}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} < \frac{a}{3}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} = a \leq 1\,.$$

Επομένως, από το μέσο κάθε διαστήματος $J_{n-1,i}$ μπορούμε να αφαιρέσουμε ανοικτό διάστημα $I_{n,i}$ μήκους $a/3^n$. Αν $G_n = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} I_{n,i}$, τότε προκύπτει το σύνολο

$$K_n = [0,1] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right) = \bigcup_{i=1}^{2^n} J_{n,i}\,,$$

όπου τα κλειστά διαστήματα $J_{n,i}$, $i = 1, \ldots, 2^n$, είναι ξένα ανά δύο με μήκος

$$\ell\left(J_{n,i}\right) = \frac{1}{2^n}\left[1 - \frac{a}{3}\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}\right] - \frac{a}{2\cdot 3^n} = \frac{1}{2^n}\left[1 - \frac{a}{3}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}\right].$$

Ας σημειωθεί ότι

$$\ell\left(J_{n,i}\right) = (1-a)\,\frac{1}{2^n} + \frac{a}{3^n}\,, \quad i = 1, \ldots, 2^n$$

και

$$\sum_{i=1}^{2^n} \ell\left(J_{n,i}\right) = 1 - a + a\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Έχουμε λοιπόν κατασκευάσει ακολουθία (K_n) κλειστών και φραγμένων συνόλων, τέτοια ώστε $K_{n+1} \subset K_n$.

Το γενικευμένο σύνολο Cantor είναι το

$$C_a := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\,.$$

Το C_a είναι ένα συμπαγές σύνολο που δεν περιέχει ανοικτά διαστήματα. Επειδή τα ανοικτά και ξένα ανά δύο διαστήματα $I_{n,i}$ $\left(1 \le i \le 2^{n-1}\right)$, που αφαιρούνται από το σύνολο K_{n-1} για την κατασκευή του συνόλου K_n, έχουν συνολικό μήκος

$$\sum_{i=1}^{2^{n-1}} \ell\left(I_{n,i}\right) = 2^{n-1}\frac{a}{3^n} = \frac{a}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

το άθροισμα των μηκών όλων των ανοικτών διαστημάτων που αφαιρούνται για την κατασκευή του C_a είναι:

$$\frac{a}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = a\,.$$

Επομένως $m(C_a) = 1 - a$, δηλαδή το μέτρο Lebesgue του γενικευμένου συνόλου Cantor C_a ισούται με $1 - a$ (βλέπε Παράδειγμα 2.55 στο κεφάλαιο 2). Παρατηρούμε ότι αν $0 < a < 1$, τότε $m(C_a) > 0$.

Σημείωση. Για $a = 1$ παίρνουμε το τριαδικό σύνολο Cantor C, δηλαδή $C_1 \equiv C$.

Κεφάλαιο 2

Χώροι Μέτρου–Μέτρο Lebesgue

2.1 Η Έννοια της Μετρησιμότητας

Ορισμός 2.1. *Μια οικογένεια $\mathfrak{M}$ υποσυνόλων του συνόλου X είναι μια σ-**άλγεβρα**, αν η $\mathfrak{M}$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες :*

(1) $X \in \mathfrak{M}$.

(2) Αν $A \in \mathfrak{M}$, τότε $A^c \in \mathfrak{M}$ (A^c είναι το συμπλήρωμα του A ως προς το X).

(3) Αν $A_n \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{N}^*$, τότε και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

Παρατηρήσεις 2.2. *(i) Επειδή $\emptyset = X^c$, το $\emptyset \in \mathfrak{M}$.*

(ii) Αν πάρουμε $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$ στην (3), τότε έχουμε ότι $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{M}$ όταν $A_k \in \mathfrak{M}$, $1 \leq k \leq n$.

(iii) Αν $A_n \in \mathfrak{M}$, επειδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c$, το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

(iv) Αν $A, B \in \mathfrak{M}$, επειδή $A \setminus B = A \cap B^c$, το $A \setminus B \in \mathfrak{M}$.

Αν $\mathfrak{M}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του συνόλου X και υποθέσουμε ότι $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{M}$, για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $(A_k)_{k=1}^{n}$ συνόλων της $\mathfrak{M}$, τότε η $\mathfrak{M}$ μπορεί να μην είναι μια σ-άλγεβρα.

Παράδειγμα 2.3. *Έστω $\mathfrak{M}$ η οικογένεια η οποία αποτελείται από το κενό σύνολο και όλα τα υποσύνολα του $[0,1)$ τα οποία είναι ένωση πεπερασμένου το πλήθος υποσυνόλων του $[0,1)$ της μορφής $[a,b)$. Να αποδειχθεί ότι η $\mathfrak{M}$ δεν είναι σ-άλγεβρα.*

Απόδειξη. Προφανώς το $[0,1) \in \mathfrak{M}$. Αν $A_i = \bigcup_{k=1}^{m} [a_{i(k)}, b_{i(k)}) \in \mathfrak{M}$, $1 \le i \le n$, τότε

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{m} \left[a_{i(k)}, b_{i(k)}\right) \in \mathfrak{M} \text{ και } \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{m} \left[a_{i(k)}, b_{i(k)}\right) = \bigcup_{k=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{n} \left[a_{i(k)}, b_{i(k)}\right) \in \mathfrak{M}\,.$$

Αν $A = \bigcup_{k=1}^{m} [a_k, b_k)$, τότε

$$A^c = [0,1) \setminus A = \bigcap_{k=1}^{m} \left([0,1) \setminus [a_k, b_k)\right) = \bigcap_{k=1}^{m} \left([0, a_k) \cup [b_k, 1)\right) \in \mathfrak{M}\,.$$

Επειδή $\bigcup_{n=2}^{\infty} [1/n, 1) = (0,1) \notin \mathfrak{M}$, η $\mathfrak{M}$ δεν είναι μια σ-άλγεβρα. □

Ορισμός 2.4. *Αν $\mathfrak{M}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X, ο X λέγεται* **μετρήσιμος χώρος** *και τα στοιχεία του $\mathfrak{M}$ λέγονται* **μετρήσιμα σύνολα του** *X.*

Ορισμός 2.5. *Αν $\mathfrak{M}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X, η συνάρτηση $\mu : \mathfrak{M} \to [0,\infty]$ λέγεται* **σ-αθροιστικό (ή αριθμήσιμα αθροιστικό) θετικό μέτρο** *ή απλά* **θετικό μέτρο**, *αν η μ είναι σ-αθροιστική. Δηλαδή αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων, τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,. \tag{2.1}$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $A \in \mathfrak{M}$ τέτοιο ώστε $\mu(A) < \infty$.

*Συνήθως με τον όρο "***χώρος μέτρου***" εννοούμε τη διατεταγμένη τριάδα $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, ενώ με τον όρο "***μετρήσιμος χώρος***" εννοούμε το διατεταγμένο ζεύγος $(X, \mathfrak{M})$. Ειδικά, αν $\mu(X) = 1$ η διατεταγμένη τριάδα $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ λέγεται* **χώρος πιθανότητας** *και το θετικό μέτρο μ είναι ένα* **μέτρο πιθανότητας**.

Το μ λέγεται **πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο** *αν η (2.1) ισχύει για πεπερασμένα το πλήθος μετρήσιμα σύνολα $(A_k)_{k=1}^{n}$.*

*Θα λέμε ότι το μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq X$ έχει σ-***πεπερασμένο μέτρο**, *αν το E είναι αριθμήσιμη ένωση μετρήσιμων συνόλων που έχουν πεπερασμένο μέτρο. Δηλαδή αν*

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\,, \quad \text{με } \mu(E_n) < \infty \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Θεώρημα 2.6 (Ιδιότητες του μέτρου). *Έστω μ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}$ του συνόλου X. Τότε*

(α') $\mu(\emptyset) = 0$.

(β') *Το μ είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο, δηλαδή*

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_n)\,,$$

όπου τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα.

(γ') *Αν $A \subseteq B$, όπου $A, B \in \mathfrak{M}$ τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$. Δηλαδή η μ είναι μονότονη. Αν επιπλέον $\mu(A) < \infty$, τότε*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)\,.$$

(δ') *Αν*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots\,,$$

όπου $A_n \in \mathfrak{M}$, δηλαδή $A_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

(ε') *Έστω*

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots\,,$$

όπου $A_n \in \mathfrak{M}$, δηλαδή $A_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Αν $\mu(A_N) < \infty$ για κάποιο $N \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Απόδειξη. (α') Έστω $A_1 = A$, με $\mu(A) < \infty$ και $A_2 = A_3 = \cdots = \emptyset$. Από τη (2.1) έχουμε

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n) + \mu(A_1) = \sum_{n=2}^{\infty} \mu(\emptyset) + \mu(A).$$

Τότε όμως $\sum_{n=2}^{\infty} \mu(\emptyset) = 0$ που συνεπάγεται ότι $\mu(\emptyset) = 0$.

(β΄) Αν $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$, τότε

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\,.$$

(γ΄) Είναι $B = A \cup (B \setminus A)$ και $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Επομένως, από τη (β΄) έχουμε

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)\,.$$

Κατά συνέπεια $\mu(B) \geq \mu(A)$ και αν $\mu(A) < \infty$, τότε

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)\,.$$

(δ΄) Έστω $B_1 = A_1$ και $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$. Τα $B_n \in \mathfrak{M}$ είναι ξένα ανά δύο, $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Επομένως

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \text{ και } \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)\,.$$

Άρα

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\,.$$

(ε΄) Έστω $C_n := A_N \setminus A_n$ (για $n \leq N$ το $C_n = \emptyset$). Τότε $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots \subseteq C_n \subseteq \cdots$ και από τη (γ΄)

$$\mu(C_n) = \mu(A_N) - \mu(A_n)\,.$$

Αν $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$,

$$A_N \setminus A = A_N \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_N \setminus A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

και από τη (δ΄) έχουμε

$$\mu(A_N \setminus A) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \mu(A_N) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)\,.$$

Όμως $\mu(A_N) < \infty$, οπότε

$$\mu(A_N) - \mu(A) = \mu(A_N) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)\,.$$

Άρα, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

□

Παράδειγμα 2.7. *Αν $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου, τότε για κάθε $A, B \in \mathfrak{M}$ είναι*

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)\,. \tag{2.2}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)\ ,$$

όπου τα $A \setminus B$, $B \setminus A$ και $A \cap B$ είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα. Επομένως,

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) \\ &= [\mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)] + [\mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B)] \\ &= \mu(A) + \mu(B)\,. \end{aligned}$$

□

Η ταυτότητα (2.2) γενικεύεται για n το πλήθος μετρήσιμα σύνολα (άσκηση 1).

Παράδειγμα 2.8 (Το Αριθμητικό Μέτρο). *Έστω X είναι ένα σύνολο και $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$, το δυναμοσύνολο του X. Αν $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ με*

$$\mu(E) = \begin{cases} |E| & \text{αν το σύνολο } E \text{ είναι πεπερασμένο} \\ \infty & \text{αν το } E \text{ είναι απειροσύνολο}\ , \end{cases}$$

το μ λέγεται **αριθμητικό μέτρο**. *Εύκολα διαπιστώνεται ότι $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου. Ειδικά αν $X = \mathbb{N}^*$ και $A_n := \{n, n+1, \ldots\}$, τότε $A_n \supset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ και $\mu(A_n) = \infty$. Επειδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, είναι $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(\emptyset) = 0$. Επομένως*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 \neq \infty = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)\,.$$

Δηλαδή δεν ισχύει η ιδιότητα (ε') του προηγούμενου θεωρήματος. Η υπόθεση $\mu(A_N) < \infty$ για κάποιο $N \in \mathbb{N}^*$ είναι αναγκαία στην (ε'). Επειδή $\mu(A_n \setminus A_{n+1}) = \mu(\{n\}) = 1$, ενώ $\mu(A_n) - \mu(A_{n+1}) = \infty - \infty$, η υπόθεση $\mu(A) < \infty$ είναι αναγκαία στην ιδιότητα (γ') του προηγούμενου θεωρήματος.

Παράδειγμα 2.9 (Το Μέτρο Dirac). *Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{P}(X)$ το δυναμοσύνολο του X. Αν $x_0 \in X$, ορίζουμε το $\delta_{x_0} : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ με*

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{αν το } x_0 \in E, \\ 0 & \text{αν το } x_0 \notin E\,. \end{cases}$$

Δηλαδή $\delta_{x_0}(E) = \chi_E(x_0)$. Το δ_{x_0} λέγεται **μέτρο Dirac στο** *x_0. Εύκολα διαπιστώνεται ότι $(X, \mathcal{P}(X), \delta_{x_0})$ είναι ένας χώρος μέτρου.*

Παράδειγμα 2.10. *Έστω X αριθμήσιμο απειροσύνολο και $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$ το δυναμοσύνολο του X. Ορίζουμε το $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ με*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{αν το } A \text{ είναι πεπερασμένο,} \\ \infty & \text{αν το } A \text{ δεν είναι πεπερασμένο}\,. \end{cases}$$

Τότε το μ είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο, που όμως δεν είναι ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο.

Λύση. Έστω $A_1, \ldots, A_n$ ξένα ανά δύο υποσύνολα του X και $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Αν κάθε A_k είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε και το A είναι πεπερασμένο σύνολο οπότε $\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \mu(A) = 0$. Διαφορετικά, αν ένα τουλάχιστον από τα A_k είναι απειροσύνολο, τότε το A είναι απειροσύνολο και $\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \mu(A) = \infty$. Δηλαδή το μ είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο. Αν υποθέσουμε ότι $X = \mathbb{N}$, επειδή $\mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n\}$, τότε

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\{n\}) < \mu(\mathbb{N}) = \infty\,.$$

Επομένως το μ δεν είναι σ-αθροιστικό θετικό μέτρο. ■

Παράδειγμα 2.11. *Αν*

$$S := \Big\{ A \subseteq [0,1] : \text{ η χαρακτηριστική συνάρτηση } \chi_A \text{ είναι Riemann ολοκληρώσιμη} \Big\}\,,$$

τότε η S δεν είναι μια σ-άλγεβρα στο $[0,1]$. Πράγματι, αν $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ είναι μια αρίθμηση των ρητών αριθμών στο διάστημα $[0,1]$, η χ_{r_n} είναι Riemann ολοκληρώσιμη με

$$\int_0^1 \chi_{r_n}(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Επομένως $\{r_n\} \in S$, *για κάθε* $n \in \mathbb{N}^*$. *Όμως* $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ *και η* $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{r_n}$ *είναι η συνάρτηση Dirichlet*

$$D(x) := \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος}\,, \end{cases}$$

που ως γνωστόν δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Άρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\} \notin S$.

Αν για $A \in S$ *ορίσουμε*

$$\mu(A) := \int_0^1 \chi_A(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

τότε το μ *είναι πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο, δεν είναι όμως* σ*-αθροιστικό θετικό μέτρο.*

Παράδειγμα 2.12. *Έστω* X *είναι ένα απειροσύνολο και* (x_n) *ακολουθία σημείων του* X. *Αν* (p_n) *είναι ακολουθία μη αρνητικών αριθμών και* $A \in \mathcal{P}(X)$, *ορίζουμε*

$$\mu(A) := \sum_{i=1}^{\infty} p_i \chi_{A\cap\{x_i\}} = \sum_{\{i:\, x_i \in A\}} p_i\,.$$

Αν (A_k) *είναι ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του* X, *τότε*

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i \chi_{\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\cap\{x_i\}} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} p_i \chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\cap\{x_i\})} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} p_i \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k\cap\{x_i\}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p_i \chi_{A_k\cap\{x_i\}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\,.
\end{aligned}$$

Επειδή η $(A_k \cap \{x_i\})_{k\in\mathbb{N}^*}$ *είναι ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι*

$$\chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\cap\{x_i\})} = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k\cap\{x_i\}}\,.$$

Επομένως το μ *είναι ένα* σ*-αθροιστικό θετικό μέτρο στη* σ*-άλγεβρα* $\mathcal{P}(X)$ *του* X. *Αν* $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, *το* μ *λέγεται* **διακριτό μέτρο πιθανότητας**. *Ας σημειωθεί ότι*

$$\mu(\{x_i\}) = p_i\,,\ \forall i \in \mathbb{N}^* \ \text{ και } \mu(\{x\}) = 0 \ \text{ αν } x \neq x_i\,.$$

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι το μ ορίζεται σε όλα τα υποσύνολα του $Y \overset{\text{ορ.}}{=} \{x_n : n \geq 1\}$. Αναφέρουμε μερικές ειδικές περιπτώσεις :

(α') **Διωνυμικη Κατανομή**. $Y = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $0 < p < 1$ *και* $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$.

(β') **Κατανομή Poisson**. $Y = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$, $p_k = \lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}/k!$, $k = 0, 1, 2, \dots$, *όπου* $\lambda > 0$.

(γ') **Ομοιόμορφη Κατανομή**. $Y = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $p_k = 1/n$, $0 \leq k \leq n$.

Το μέτρο $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$, όπου $\mathfrak{M}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X, είναι σ- αθροιστικό. Τι μπορούμε να πούμε στην περίπτωση που η ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ και τα σύνολα A_n δεν είναι ξένα ανά δύο; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα χρειαζόμαστε την παρακάτω βοηθητική πρόταση.

Λήμμα 2.13. *Έστω (A_n) μια ακολουθία υποσυνόλων ενός συνόλου X. Ορίζουμε την ακολουθία συνόλων (B_n) ως εξής*

$$B_1 = A_1, \qquad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\,, \quad n \geq 2\,.$$

Τότε τα σύνολα B_n είναι ξένα ανά δύο με $B_n \subseteq A_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\,.$$

Απόδειξη. Αν $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, έστω n_0 ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε $x \in A_{n_0}$. Τότε το $x \notin A_n$, για $n = 1, 2, \dots, n_0 - 1$ και επομένως $x \in B_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ (αν $n_0 = 1$, τότε $x \in A_1 = B_1$). Δηλαδή $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Όμως $B_n \subseteq A_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, οπότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Άρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. □

Πρόταση 2.14. *Αν $(A_n) \subset \mathfrak{M}$, όπου $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου, τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

*Δηλαδή το μέτρο μ είναι σ-***υποαθροιστικό**.

Απόδειξη. Έστω (B_n) η ακολουθία συνόλων που ορίσαμε στο προηγούμενο λήμμα. Τα σύνολα $B_n \in \mathfrak{M}$ και είναι ξένα ανά δύο. Επειδή $B_n \subseteq A_n$, θα είναι $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

□

Ενώ, τις περισσότερες φορές, σχετικά εύκολα διαπιστώνεται αν το μ είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο, γενικά είναι πιο δύσκολο να αποδείξει κανείς ότι το μ είναι ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο. Γι' αυτό το λόγο το επόμενο αποτέλεσμα είναι χρήσιμο.

Θεώρημα 2.15. *Έστω μ είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}$.*

(α΄) Αν για κάθε ακολουθία $(A_k) \subset \mathfrak{M}$, $A_k \subseteq A_{k+1}$, είναι $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$, τότε το μ είναι ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο.

(β΄) Υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία $(A_k) \subset \mathfrak{M}$, $A_k \supseteq A_{k+1}$, με $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$ είναι $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$. Τότε το μ είναι ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο.

Απόδειξη. (α΄) Αν $(A_k) \subset \mathfrak{M}$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων και $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, τότε $B_n \subseteq B_{n+1}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Από την υπόθεση $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$. Επειδή το μ είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο, $\mu(B_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$. Επομένως

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k),$$

δηλαδή το μ είναι ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο.

(β΄) Αν $(A_k) \subset \mathfrak{M}$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων και $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Θέτουμε $C_n := \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \setminus B_n$, οπότε $C_n \supseteq C_{n+1}$ και

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \setminus B_n\right) = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \emptyset.$$

Από την υπόθεση $\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0$. Επειδή $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = C_n \cup B_n$, με $C_n \cap B_n = \emptyset$ και το μ είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο, θα είναι $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu(C_n) + \mu(B_n)$.

Επίσης $\mu(B_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$. Επομένως,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty}(\mu(C_n) + \mu(B_n)) = \lim_{n\to\infty}\mu(B_n) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$$

δηλαδή το μ είναι ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο.

□

Πρόταση 2.16. *Αν $\mathfrak{F}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X, τότε υπάρχει η μικρότερη σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}^*$ στο X με $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}^*$. Η $\mathfrak{M}^*$ λέμε ότι είναι η* σ-**άλγεβρα που παράγεται από την** $\mathfrak{F}$.

Απόδειξη. Έστω Ω είναι η οικογένεια όλων των σ-αλγεβρών $\mathfrak{M}$ στο X οι οποίες περιέχουν την $\mathfrak{F}$. Επειδή το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X, η οποία περιέχει την $\mathfrak{F}$, η οικογένεια Ω δεν είναι το κενό σύνολο. Έστω $\mathfrak{M}^*$ είναι η τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν την $\mathfrak{F}$. Προφανώς $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}^*$ και η $\mathfrak{M}^*$ περιέχεται σ' όλες τις σ-άλγεβρες του X που περιέχουν την $\mathfrak{F}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathfrak{M}^*$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X. Πράγματι, αν $A_n \in \mathfrak{M}^*$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ και αν $\mathfrak{M} \in \Omega$, τότε $A_n \in \mathfrak{M}$ και επομένως $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$ (επειδή η $\mathfrak{M}$ είναι μια σ-άλγεβρα). Επειδή $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$, για κάθε $\mathfrak{M} \in \Omega$, θα είναι και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}^*$. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι αν $A \in \mathfrak{M}^*$, τότε $A^c \in \mathfrak{M}^*$ και $X \in \mathfrak{M}^*$. □

2.2 Εφαρμογή–Τύπος γινομένου του Euler για τη συνάρτηση ζήτα του Riemann

Η **συνάρτηση ζήτα του Riemann** ορίζεται από τη σειρά του Dirichlet

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s \in (1,\infty) .$$

Η συνάρτηση ζ του Riemann παίζει κύριο ρόλο στην αναλυτική θεωρία αριθμών, στη θεωρία αριθμών και έχει εφαρμογές στη φυσική, στη θεωρία πιθανοτήτων και στην εφαρμοσμένη στατιστική. Η σύνδεση της συνάρτησης ζ με τους πρώτους αριθμούς ανακαλύφθηκε από τον Leonhard Euler ο οποίος απέδειξε την ταυτότητα

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}, \qquad s \in (1,\infty) , \tag{2.3}$$

όπου $\mathcal{P} = \{p :\ p$ είναι πρώτος αριθμός$\}$. Ο τύπος (2.3) λέγεται και **τύπος γινομένου του Euler**.

Σημείωση. Ο τύπος γινομένου του Euler γράφεται και στη μορφή

$$\zeta(s) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_j^{-s}} \right), \qquad s \in (1, \infty) ,$$

όπου (p_j) είναι η αύξουσα ακολουθία των πρώτων αριθμών, δηλαδή $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$.

Θα δώσουμε στη συνέχεια μια ενδιαφέρουσα πιθανοθεωρητική απόδειξη της (2.3). Με $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ συμβολίζουμε ένα χώρο πιθανότητας, τα σύνολα $A \in \mathcal{A}$ είναι τα *ενδεχόμενα* και $\mathbf{P}(A)$ είναι η πιθανότητα του A.

Ορισμός 2.17. *Έστω I ένα σύνολο δεικτών και έστω $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια ενδεχόμενων. Η οικογένεια $(A_i)_{i \in I}$ θα λέγεται* **ανεξάρτητη** *αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $J \subset I$ είναι*

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j) .$$

Αν τα $A, B \in \mathcal{A}$ είναι ανεξάρτητα, τότε και τα σύνολα(ενδεχόμενα) $A^c = \Omega \setminus A$, $B^c = \Omega \setminus B$ θα είναι ανεξάρτητα. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A^c \cap B^c) &= \mathbf{P}(B^c) - \mathbf{P}(A \cap B^c) \\ &= 1 - \mathbf{P}(B) - [\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)] \\ &= 1 - \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \qquad\qquad (\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)) \\ &= (1 - \mathbf{P}(A))\,(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A^c)\mathbf{P}(B^c) . \end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι και τα ενδεχόμενα $A^c = \Omega \setminus A$, B θα είναι ανεξάρτητα. Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι αν $(A_i)_{i \in I}$ είναι οικογένεια ανεξάρτητων ενδεχόμενων, τότε και τα ενδεχόμενα $(B_i)_{i \in I}$ θα είναι ανεξάρτητα, όπου κάθε B_i είναι ίσο είτε με το A_i ή με το A_i^c (άσκηση 2).

Πρόταση 2.18 (Τύπος Euler για τους πρώτους αριθμούς). *Έστω $\left(\mathbb{N}^*, 2^{\mathbb{N}}, \mathbf{P}\right)$ ο χώρος πιθανότητας με*

$$\mathbf{P}(\{n\}) := \zeta(s)^{-1} n^{-s} , \qquad n \in \mathbb{N}^* ,$$

όπου

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \qquad s \in (1, \infty),$$

είναι η συνάρτηση ζ *του Riemann. Αν* $p\mathbb{N}^* = \{pn : n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{N}^*$ *όπου* $p \in \mathcal{P}$*, δηλαδή* p *είναι πρώτος αριθμός, τότε τα ενδεχόμενα* $\{p\mathbb{N}^* : p \in \mathcal{P}\}$ *είναι ανεξάρτητα και ισχύει ο τύπος*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(p\mathbb{N}^*) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{pn\}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\{pn\}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(s)^{-1}(pn)^{-s} \\ &= \zeta(s)^{-1}p^{-s}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \\ &= \zeta(s)^{-1}p^{-s}\zeta(s) = p^{-s}. \end{aligned}$$

Επειδή $\bigcap_{i=1}^{k} p_i\mathbb{N}^* = (p_1 \cdots p_k)\,\mathbb{N}^*$, έχουμε

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} p_i\mathbb{N}^*\right) = \mathbf{P}\left((p_1 \cdots p_k)\,\mathbb{N}^*\right) = (p_1 \cdots p_k)^{-s} = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}(p_i\mathbb{N}^*),$$

δηλαδή τα ενδεχόμενα $\{p\mathbb{N}^* : p \in \mathcal{P}\}$ είναι ανεξάρτητα. Τότε και τα ενδεχόμενα $\{(p\mathbb{N}^*)^c : p \in \mathcal{P}\}$ θα είναι ανεξάρτητα. Αν $\mathcal{P}_n := \{p \in \mathcal{P} : p \leq n\}$ είναι το σύνολο των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του $n \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}_n} (p\mathbb{N}^*)^c \searrow \bigcap_{p \in \mathcal{P}} (p\mathbb{N}^*)^c$$

και επομένως από την ιδιότητα (ε΄) του μέτρου έχουμε

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{p \in \mathcal{P}} (p\mathbb{N}^*)^c\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{p \in \mathcal{P}_n} (p\mathbb{N}^*)^c\right).$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
\zeta(s)^{-1} &= \mathbf{P}(\{1\}) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} (p\mathbb{N}^*)^c\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}_n} (p\mathbb{N}^*)^c\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{p\in\mathcal{P}_n} \mathbf{P}\left((p\mathbb{N}^*)^c\right) \qquad (\{(p\mathbb{N}^*)^c : p\in\mathcal{P}\} \text{ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{p\in\mathcal{P}_n} \left(1-\mathbf{P}\left(p\mathbb{N}^*\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{p\in\mathcal{P}_n} \left(1-p^{-s}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1-p^{-s}\right) .
\end{aligned}
$$

□

2.3 Ανώτερο και Κατώτερο Όριο Ακολουθίας Συνόλων

Αν (a_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε ως γνωστόν το ανώτερο όριο $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ και το κατώτερο όριο $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ ορίζονται ως εξής

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \quad \text{και} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right) .$$

Δηλαδή, αν για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ ορίσουμε τις ακολουθίες

$$\overline{a}_n := \sup\{a_k : k\geq n\} = \sup_{k\geq n} a_k \quad \text{και} \quad \underline{a}_n := \inf\{a_k : k\geq n\} = \inf_{k\geq n} a_k ,$$

τότε η $(\overline{a}_n)$ είναι φθίνουσα, η $(\underline{a}_n)$ είναι αύξουσα και

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \overline{a}_n , \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \underline{a}_n .$$

Χρησιμοποιούμε και τους συμβολισμούς

$$\limsup a_n \text{ ή } \overline{\lim}\, a_n,\ \liminf a_n \text{ ή } \underline{\lim}\, a_n \text{ αντί για } \limsup_{n\to\infty} a_n,\ \liminf_{n\to\infty} a_n \text{ αντίστοιχα} .$$

Παρόμοια ορίζεται το ανώτερο και το κατώτερο όριο μιας ακολουθίας (A_n) υποσυνόλων ενός συνόλου X.

Ορισμός 2.19. *Το* **ανώτερο** *και το* **κατώτερο όριο** *ακολουθίας* (A_n) *υποσυνόλων ενός συνόλου* X *ορίζονται ως εξής*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \,,$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \,.$$

Η $\left(\bigcup_{k\geq n} A_k : n \in \mathbb{N}^*\right)$ είναι φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του συνόλου X και αυτό συνεπάγεται ότι το $\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$ υπάρχει. Παρόμοια η $\left(\bigcap_{k\geq n} A_k : n \in \mathbb{N}^*\right)$ είναι αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων του συνόλου X και κατά συνέπεια το $\lim_{n\to\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{k\geq n} A_k$ υπάρχει. Επομένως τα $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ και $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ πάντοτε υπάρχουν (μπορεί να είναι ίσα και με το κενό σύνολο).

Χρησιμοποιούμε και τους συμβολισμούς

$$\limsup A_n \text{ ή } \overline{\lim}\, A_n,\ \liminf A_n \text{ ή } \underline{\lim}\, A_n \text{ αντί για } \limsup_{n\to\infty} A_n,\ \liminf_{n\to\infty} A_n \text{ αντίστοιχα}\,.$$

Λήμμα 2.20. *Έστω* (A_n) *ακολουθία υποσυνόλων ενός συνόλου* X*. Τότε*

(1) $\limsup A_n = \{x \in X : x \in A_n$ *για άπειρα το πλήθος* $n \in \mathbb{N}^*\}$,

(2) $\liminf A_n = \{x \in X : x \in A_n$ *για όλα εκτός από πεπερασμένα το πλήθος* $n \in \mathbb{N}^*\}$,

(3) $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.

Απόδειξη. (1) Αν $x \in A_n$ για άπειρα το πλήθος $n \in \mathbb{N}^*$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε $x \in \bigcup_{k\geq n} A_k$ και επομένως

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\geq n} A_k = \limsup A_n\,.$$

Αντίστροφα, αν $x \in \limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\geq n} A_k$, τότε $x \in \bigcup_{k\geq n} A_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in A_k$ για κάποιο $k \geq n$. Άρα, $x \in A_n$ για άπειρα το πλήθος $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Έστω $x \in X$. Αν $x \in A_n$ για όλα εκτός από πεπερασμένα το πλήθος $n \in \mathbb{N}^*$, τότε υπάρχει n_0

τέτοιο ώστε $x \in A_k$ για κάθε $k \geq n_0$. Επομένως

$$x \in \bigcap_{k \geq n_0} A_k \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{k \geq n} A_k = \liminf A_n \,.$$

Αντίστροφα, αν $x \in \liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{k \geq n} A_k$, τότε $x \in \bigcap_{k \geq n_0} A_k$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}^*$ και επομένως $x \in A_k$ για κάθε $k \geq n_0$. Άρα, $x \in A_n$ για όλα εκτός από πεπερασμένα το πλήθος $n \in \mathbb{N}^*$.

(3) Η (1) και η (2) συνεπάγονται την (3).

□

Αν $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = A$, θα λέμε ότι *η ακολουθία* (A_n) *συγκλίνει* και γράφουμε $\lim A_n = A$. Αν χ_{A_n} είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου A_n, τότε

$$\underline{\lim}\, \chi_{A_n} = \chi_{\underline{\lim}\, A_n} \quad \text{και} \quad \overline{\lim}\, \chi_{A_n} = \chi_{\overline{\lim}\, A_n} \,.$$

Ειδικά αν η ακολουθία (χ_{A_n}) συγκλίνει, τότε $\lim \chi_{A_n} = \chi_{\lim A_n}$ (άσκηση 4).
Αν $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου με $\mu(X) < \infty$ και (A_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συνόλων, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι (άσκηση 7)

$$\mu(\underline{\lim}\, A_n) \leq \underline{\lim}\, \mu(A_n) \leq \overline{\lim}\, \mu(A_n) \leq \mu(\overline{\lim}\, A_n) \,.$$

Παράδειγμα 2.21 (Λήμμα Borel–Cantelli). *Έστω $\mathfrak{M}$ μια σ-άλγεβρα στο σύνολο X και έστω $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο. Αν (E_n) είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty$, τότε το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε άπειρα το πλήθος E_n, δηλαδή το $\limsup E_n$ (καθώς επίσης και το $\liminf E_n$), έχει μέτρο μηδέν.*

Απόδειξη. Είναι $\limsup E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, όπου $F_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$. Όμως $F_n \supseteq F_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\mu(F_1) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < +\infty$. Επειδή $\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k)$, από το Θεώρημα 2.6 (ε΄) έχουμε

$$\mu\left(\limsup E_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k).$$

Όμως $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)<+\infty$, συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mu(E_k)=0$. Άρα $\mu(\limsup E_n)=0$.

Σημείωση. Επειδή το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε άπειρα το πλήθος E_n έχει μέτρο μηδέν, μια ισοδύναμη διατύπωση του Λήμματος Borel– Cantelli είναι η εξής :

" Σχεδόν όλα τα $x\in X$ ανήκουν σε πεπερασμένα το πολύ E_n " (βλέπε και Παράδειγμα 4.22). □

2.4 Εξωτερικό Μέτρο Lebesgue

Αν E είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ορίζουμε **το εξωτερικό μέτρο Lebesgue του** E ως εξής :

$$m^*(E)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n):\ E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right\},$$

όπου το infimum το παίρνουμε πάνω σε όλα τα καλύμματα του E από αριθμήσιμες ενώσεις διαστημάτων (με $\ell(I_n)$ συμβολίζουμε το μήκος του I_n).

Πρόταση 2.22. *(α΄) Είναι $0\le m^*(E)\le\infty$, για κάθε $E\subseteq\mathbb{R}$.*

(β΄) Αν $E\subseteq F$, τότε $m^*(E)\le m^*(F)$.

(γ΄) Αν το E είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε $m^*(E)=0$.

(δ΄) Αν το E είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε $m^*(E)<\infty$.

(ε΄) $m^*(E)=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n):\ E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\}$, όπου το infimum το παίρνουμε πάνω σε όλα τα καλύμματα του E από αριθμήσιμες ενώσεις ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων.

Απόδειξη. (α΄) Είναι προφανές από τον ορισμό του $m^*(E)$.

(β΄) Αν $E\subseteq F\subseteq\mathbb{R}$ και (I_n) είναι ακολουθία διαστημάτων τέτοια ώστε $F\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$, τότε και $E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ που συνεπάγεται ότι $m^*(E)\le\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)$. Επομένως,

$$m^*(E)\le\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n):\ F\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right\}=m^*(F).$$

(γ΄) Αν $E=\{e_1,e_2,\dots,e_n,\dots\}$, τότε για κάθε $\varepsilon>0$ είναι $E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(e_n-\varepsilon/2^{n+1},\ e_n+\varepsilon/2^{n+1}\right)$ και επομένως

$$m^*(E)\le\sum_{n=1}^{\infty}\ell\left(e_n-\varepsilon/2^{n+1},\ e_n+\varepsilon/2^{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon/2^n=\varepsilon.$$

Άρα, $m^*(E) = 0$.

(δ΄) Επειδή το E είναι φραγμένο, $E \subseteq [a, b]$ για κάποια πεπερασμένα $a < b$. Τότε

$$m^*(E) \leq \ell([a, b]) = b - a < \infty\,.$$

(ε΄) Για κάθε ακολουθία ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων (I_n), $I_n = (a_n, b_n)$ με $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, από τον ορισμό του $m^*(E)$ έχουμε

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)\,. \tag{2.4}$$

Για να αποδείξουμε ότι $m^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) :\, E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right\}$, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m^*(E) < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του $m^*(E)$ υπάρχει ακολουθία φραγμένων διαστημάτων (I_n) με $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n) < m^*(E) + \varepsilon/2\,.$$

Όμως για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει ανοικτό και φραγμένο διάστημα J_n με $J_n \supseteq I_n$, τέτοιο ώστε

$$\ell(J_n) \leq \ell(I_n) + \varepsilon/2^{n+1}\,.$$

Επομένως, $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ και από τις δύο τελευταίες ανισότητες έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(J_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\ell(I_n) + \varepsilon/2^{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n) + \varepsilon/2 < m^*(E) + \varepsilon\,. \tag{2.5}$$

Η απόδειξη της (ε΄) προκύπτει από τις (2.4) και (2.5).

□

Πόρισμα 2.23. *Αν E είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε*

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\ell(J_n) :\, E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\},$$

όπου το infimum το παίρνουμε πάνω σε όλα τα καλύμματα του E από αριθμήσιμες ενώσεις φραγμένων διαστημάτων J_n που είναι κλειστά (ή αριστερά ανοικτά και δεξιά κλειστά, ή αριστερά κλειστά και δεξιά ανοικτά ή συνδυασμός από ανοικτά, ημιανοικτά και κλειστά διαστήματα).

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει για την περίπτωση που τα J_n είναι κλειστά και φραγμένα διαστήματα (η απόδειξη των άλλων περιπτώσεων είναι εντελώς παρόμοια). Για κάθε αριθμήσιμη οικογένεια κλειστών και φραγμένων διαστημάτων (J_n) με $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, από τον ορισμό του $m^*(E)$ έχουμε

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n)\,. \tag{2.6}$$

Για να αποδείξουμε ότι $m^*(E) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) :\, E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\}$, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m^*(E) < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την Πρόταση 2.22 (ε') υπάρχει ακολουθία ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων (I_n) με $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(E) + \varepsilon\,.$$

Έστω J_n', $n \in \mathbb{N}^*$, είναι το κλειστό και φραγμένο διάστημα που έχει τα ίδια άκρα με το I_n. Τότε $I_n \subset J_n'$ και $\ell(J_n') = \ell(I_n)$. Επομένως, $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n'$ και από την παραπάνω ανισότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n') = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(E) + \varepsilon\,. \tag{2.7}$$

Οι (2.6) και (2.7) αποδεικνύουν την πρόταση. □

Ορισμός 2.24. *Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$, το σύνολο*

$$E + c := \{x + c :\, x \in E\}$$

λέμε ότι είναι μια **μεταφορά** *του E. Επίσης, το σύνολο*

$$cE := \{cx :\, x \in E\}$$

λέμε ότι είναι μια **ομοιοθεσία(dilation)** *του E.*

Οι μεταφορές των υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ αφήνουν αναλλοίωτο το εξωτερικό μέτρο Lebesgue.

Πρόταση 2.25. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ και έστω c πραγματικός αριθμός. Τότε,*

(α') $m^*(E + c) = m^*(E)$

και

(β') $m^*(cE) = |c| \cdot m^*(E)$.

Απόδειξη. (α΄) Για κάθε ανοικτό και φραγμένο διάστημα $I = (a, b)$ είναι $I + c = (a + c, b + c)$ και $\ell(I+c) = \ell(I)$. Αν (I_n), $I_n = (a_n, b_n)$, είναι ακολουθία ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων με $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, τότε $E + c \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(I_n + c)$ που συνεπάγεται ότι

$$m^*(E + c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n + c) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)\,.$$

Επομένως, από την Πρόταση 2.22(ε΄)

$$m^*(E + c) \leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) :\ E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} = m^*(E)\,.$$

Από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε ότι : $m^*(E) = m^*\left((E + c) + (-c)\right) \leq m^*(E + c)$. Άρα, $m^*(E + c) = m^*(E)$.

(β΄) <u>*1η περίπτωση*</u>: $c = 0$. Τότε $cE = \{0\}$, $m^*(cE) = 0$ και $|c| \cdot m^*(E) = 0$, ακόμη και αν $m^*(E) = \infty$ (ορίζουμε $0 \cdot \infty = 0$).

<u>*2η περίπτωση*</u>: $c > 0$. Για κάθε ανοικτό και φραγμένο διάστημα $I = (a, b)$ είναι $cI = (ca, cb)$ και $\ell(cI) = c \cdot \ell(I)$. Αν (I_n), $I_n = (a_n, b_n)$, είναι ακολουθία ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων με $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, τότε $cE \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} cI_n$ που συνεπάγεται ότι

$$m^*(cE) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(cI_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$$

και ισοδύναμα $(1/c)m^*(cE) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$. Επομένως, από την Πρόταση 2.22(ε΄)

$$\frac{1}{c}m^*(cE) \leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) :\ E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} = m^*(E) \text{ και ισοδύναμα } m^*(cE) \leq c \cdot m^*(E).$$

Από την τελευταία ανισότητα έχουμε ότι

$$m^*(E) = m^*\left((1/c)(cE)\right) \leq (1/c)m^*(cE) \text{ και ισοδύναμα } c \cdot m^*(E) \leq m^*(cE).$$

Άρα, $m^*(cE) = c \cdot m^*(E)$.

<u>*3η περίπτωση*</u>: $c = -1$. Τότε $cE = -E = \{-x : x \in E\}$. Για κάθε ανοικτό και φραγμένο διάστημα $I = (a, b)$ είναι $\ell(-I) = \ell(I)$ και εύκολα αποδεικνύεται, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, ότι $m^*(-E) = m^*(E)$.

<u>*4η περίπτωση*</u>: $c < 0$. Επειδή $cE = -\left[(-c)E\right]$ και $-c > 0$, από την 3η και τη 2η περίπτωση έχουμε

$$m^*(cE) = m^*\left((-c)E\right) = (-c)m^*(E) = |c| \cdot m^*(E)\,.$$

□

Παραδείγματα 2.26. *(1) Το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ έχει εξωτερικό μέτρο 0.*

(2) Υπάρχουν και μη αριθμήσιμα σύνολα με εξωτερικό μέτρο Lebesgue μηδέν. Υπενθυμίζεται από το κεφάλαιο 1 η κατασκευή του τριαδικού συνόλου Cantor $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Είναι

$$C \subset C_n = J_{n,1} \cup J_{n,2} \cup \cdots \cup J_{n,2^n} ,$$

όπου τα κλειστά και ξένα ανά δύο διαστήματα $J_{n,k}$ $(1 \leq k \leq 2^n)$ έχουν συνολικό μήκος

$$\sum_{k=1}^{2^n} \ell\left(J_{n,k}\right) = 2^n \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

Επομένως, $m^*\left(C\right) \leq (2/3)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, δηλαδή $m^*\left(C\right) = 0$.

Παρατηρήσεις 2.27. *Τα σύνολα μηδενικού μέτρου παίζουν σημαντικό ρόλο στην Ανάλυση. Από τα δύο προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι :*

(1) Από την πλευρά της θεωρίας μέτρου, τα $\mathbb{Q}$ και C είναι "μικρά σύνολα".

(2) Ως προς τον πληθάριθμο, το $\mathbb{Q}$ είναι "μικρό σύνολο" (αριθμήσιμο) ενώ το C είναι "μεγάλο σύνολο" (έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς).

(3) Τέλος, ως προς την τοπολογία, το $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ είναι "μεγάλο σύνολο" (είναι πυκνό στο $[0,1]$), ενώ το C είναι "μικρό σύνολο" (το C δεν είναι πυκνό στο $[0,1]$). Ας σημειωθεί ότι το C δεν περιέχει ανοικτά διαστήματα.

Πρόταση 2.28. *Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue ενός διαστήματος ισούται με το μήκος του διαστήματος. Επομένως, το εξωτερικό μέτρο είναι επέκταση του μήκους.*

Απόδειξη. *1η περίπτωση.* Το $I = [a,b]$. Προφανώς $m^*\left([a,b]\right) \leq \ell\left([a,b]\right) = b - a$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$m^*\left([a,b]\right) \geq b - a\,.$$

Αν για κάθε ακολουθία (I_k) ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων με $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq [a,b]$ αποδείξουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) > b-a\,,$$

τότε από την Πρόταση 2.22 (ε') έπεται ότι $m^*([a,b]) \geq b-a$.

Επειδή το (I_k) είναι ένα αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμα του $I=[a,b]$ που είναι ένα συμπαγές σύνολο, από το θεώρημα Heine-Borel υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του I, έστω το $(I_k)_{k=1}^n$. Επειδή $\sum_{k=1}^n \ell(I_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) > b-a\,.$$

Καθώς το $a \in [a,b]$, υπάρχει διάστημα $J_1=(a_1,b_1)$ στην πεπερασμένη ακολουθία $(I_k)_{k=1}^n$ τέτοιο ώστε

$$a_1 < a < b_1\,.$$

Στην περίπτωση που είναι $b<b_1$, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geq \ell(J_1) = b_1 - a_1 > b-a\,.$$

Διαφορετικά, $b_1 \leq b$. Τότε υπάρχει διάστημα $J_2=(a_2,b_2)$ στην πεπερασμένη ακολουθία $(I_k)_{k=1}^n$ τέτοιο ώστε

$$a_2 < b_1 < b_2\,.$$

Είναι $J_2 \neq J_1$. Στην περίπτωση που είναι $b<b_2$, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geq \ell(J_1)+\ell(J_2) = (b_1-a_1)+(b_2-a_2) = (b_2-a_1)+(b_1-a_2) > b_2-a_1 > b-a\,.$$

Διαφορετικά, $b_2 \leq b$. Τότε υπάρχει διάστημα $J_3=(a_3,b_3)$ στην πεπερασμένη ακολουθία $(I_k)_{k=1}^n$ τέτοιο ώστε $a_3<b_2<b_3$. Είναι $J_3 \neq J_2$ και $J_3 \neq J_1$. Αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί το πολύ n-φορές. Υπάρχει λοιπόν $m \leq n$ και διαστήματα $J_i=(a_i,b_i) \in (I_k)_{k=1}^n$ $(1 \leq i \leq m)$, τέτοια ώστε

$$a_1 < a, \quad a_i < b_{i-1} < b_i, \quad b < b_m, \quad i=2,\ldots,m\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geq \sum_{i=1}^{m} \ell(J_i) &= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_{m-1} - a_{m-1}) + +(b_m - a_m) \\ &= (b_m - a_1) + (b_1 - a_2) + (b_2 - a_3) + \cdots + (b_{m-1} - a_m) \\ &> b_m - a_1 \\ &> b - a.\end{aligned}$$

Άρα, $m^*([a,b]) \geq b - a$.

<u>*2η περίπτωση*</u>. Το I δεν είναι φραγμένο διάστημα. Σ' αυτή την περίπτωση το I περιέχει συμπαγή (κλειστά και φραγμένα) διαστήματα μήκους n. Από την Πρόταση 2.22 (β') έχουμε $m^*(I) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Άρα,

$$m^*(I) = \infty = \ell(I)\,.$$

<u>*3η περίπτωση*</u>. Το I είναι ένα φραγμένο και μη κλειστό διάστημα. Έστω a, b, $a < b$, τα άκρα του I. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < b - a$, είναι $[a + \varepsilon/2,\ b - \varepsilon/2] \subset I \subset [a,b]$. Επομένως $b - a - \varepsilon \leq m^*(I) \leq b - a$, για κάθε $\varepsilon > 0$. Άρα,

$$m^*(I) = b - a = \ell(I)\,.$$

□

Πρόταση 2.29. *Αν $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι μια οποιαδήποτε αριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τότε*

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)\,.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $m^*(E_n) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Σε διαφορετική περίπτωση η απόδειξη είναι προφανής. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ επιλέγουμε διαστήματα $(I_{n,i})_{i=1}^{\infty}$, τέτοια ώστε

$$E_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n,i} \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_{n,i}) < m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\,.$$

Τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n,i}$ και επομένως

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_{n,i}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left[m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \varepsilon\,,$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Άρα,

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)\,.$$

□

Πόρισμα 2.30. *Αν $m^*(E_n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$.*

Παράδειγμα 2.31. *Αν $E \subseteq \mathbb{R}$, ως γνωστόν* **η διάμετρος του συνόλου** *E ορίζεται ως εξής*

$$d(E) := \sup\left\{|x-y| : x, y \in E\right\}\,.$$

Είναι $m^*(E) \leq d(E)$.

Λύση. Αρκεί να υποθέσουμε ότι $d(E) < \infty$, δηλαδή ότι το σύνολο E είναι φραγμένο. Αν $\sup E = M$ και $\inf E = m$, τότε $E \subseteq [m, M]$ και εύκολα διαπιστώνεται ότι $d(E) = M - m$. Επομένως, από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου Lebesgue του E είναι $m^*(E) \leq \ell\left([m, M]\right) = M - m = d(E)$.
■

Παράδειγμα 2.32. *Έστω $\alpha \in (0,1)$. Αν το $E \subset \mathbb{R}$ είναι τέτοιο ώστε*

$$m^*(E \cap I) < \alpha \cdot m^*(I)\,, \quad \text{για κάθε ανοικτό διάστημα } I \text{ του } \mathbb{R}\,, \tag{2.8}$$

τότε $m^*(E) = 0$.

Ισοδύναμα, έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $m^*(E) > 0$. Τότε για κάθε $\alpha \in (0,1)$ υπάρχει ανοικτό διάστημα I του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\alpha \cdot m^*(I) \leq m^*(E \cap I) \leq m^*(I)\,. \tag{2.9}$$

Λύση. *(i)* *Υποθέτουμε ότι $m^*(E) < \infty$.* Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του $m^*(E)$ υπάρχει ακολουθία ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων (I_n) με $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) < m^*(E) + (1-\alpha)\varepsilon\,.$$

Τότε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) - (1-\alpha)\varepsilon < m^*(E)& \\ &= m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E\cap I_n\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E\cap I_n) \\ &< \alpha\cdot \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n). \qquad \text{(από υπόθεση (2.8))}\end{aligned}$$

Δηλαδή $(1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) < (1-\alpha)\varepsilon$ και ισοδύναμα $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) < \varepsilon$. Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι

$$m^*(E) < \alpha\cdot\sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) < \alpha\cdot\varepsilon$$

και άρα $m^*(E) = 0$.

(ii) *Γενική περίπτωση*. Υποθέτουμε ότι E είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί την υπόθεση (2.8). Αν $n \in \mathbb{N}^*$, τότε $m^*\left(E\cap(-n,n)\right) < \infty$ με

$$m^*\left(E\cap(-n,n)\cap I\right) \leq m^*(E\cap I) < \alpha\cdot m^*(I)\,, \quad \text{για κάθε ανοικτό διάστημα } I \text{ του } \mathbb{R}\,.$$

Επομένως από την προηγούμενη περίπτωση έχουμε $m^*\left(E\cap(-n,n)\right) = 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ και αυτό συνεπάγεται ότι

$$m^*(E) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E\cap(-n,n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*\left(E\cap(-n,n)\right) = 0\,.$$

■

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί μια **συνθήκη Lipschitz** στο $[a,b]$, ή ότι είναι μια **συνάρτηση Lipschitz** στο $[a,b]$, αν υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|\,, \quad \text{για κάθε } x,y\in[a,b].$$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι κάθε συνάρτηση Lipschitz είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αν μια συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $[a,b]$, τότε (από το θεώρημα μέσης τιμής) η f ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο $[a,b]$. Ένα άλλο παράδειγμα συνάρτησης Lipschitz είναι και η απόσταση σημείων του $\mathbb{R}$ από κάποιο σύνολο. Αν $A\subset\mathbb{R}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **η απόσταση του** x **από**

το A είναι ο μη αρνητικός αριθμός

$$d(x,A) := \inf\{|x-y| : y \in A\} .$$

Δεν είναι δύσκολο να αποδείξει κανείς ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq |x-y| ,$$

δηλαδή η $f(x) := d(x,A)$ είναι συνάρτηση Lipschitz.
Αποδεικνύουμε τώρα ότι μια συνάρτηση Lipschitz στο $[a,b]$ απεικονίζει υποσύνολα του $[a,b]$ μέτρου μηδέν σε σύνολα μέτρου μηδέν.

Πρόταση 2.33. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz στο $[a,b]$, δηλαδή υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y| , \quad \text{για κάθε } x, y \in [a,b].$$

Αν N είναι ένα υποσύνολο του $[a,b]$ και $f(N) = \{y : y = f(x),\, x \in N\}$, τότε

$$m^*(f(N)) \leq C \cdot m^*(N).$$

Ειδικά αν $m^*(N) = 0$, τότε $m^*(f(N)) = 0$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου Lebesgue του N, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία (I_k) διαστημάτων τέτοια ώστε $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < m^*(N) + \varepsilon$. Από την υπόθεση, για κάθε $x, y \in N \cap I_k$ είναι $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$. Αν $d(f(N \cap I_k))$ και $d(N \cap I_k)$ είναι η διάμετρος των συνόλων $f(N \cap I_k)$ και $N \cap I_k$ αντίστοιχα, τότε προφανώς

$$d(f(N \cap I_k)) \leq C \cdot d(N \cap I_k) \leq C \cdot d(I_k) = C \cdot \ell(I_k).$$

Επομένως, από το Παράδειγμα 2.31 έχουμε

$$m^*(f(N \cap I_k)) \leq d(f(N \cap I_k)) \leq C \cdot \ell(I_k) , \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}^*.$$

Όμως $N = N \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} N \cap I_k$, οπότε

$$\begin{aligned} m^*\left(f(N)\right) &= m^*\left(f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} N \cap I_k\right)\right) \\ &= m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(N \cap I_k)\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*\left(f(N \cap I_k)\right) \\ &\leq C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < C\left(m^*(N) + \varepsilon\right), \end{aligned}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Άρα, $m^*\left(f(N)\right) \leq C \cdot m^*(N)$. □

Πρόταση 2.34. *Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει ανοικτό σύνολο $G_\varepsilon \supseteq E$ τέτοιο ώστε*

$$m^*(G_\varepsilon) \leq m^*(E) + \varepsilon\,.$$

Επομένως

$$m^*(E) = \inf\left\{m^*(G) :\ G \supseteq E,\ G \text{ είναι ανοικτό σύνολο}\right\}\,.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την Πρόταση 2.22 (ε') υπάρχει ακολουθία ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων (I_n) τέτοια ώστε $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supseteq E$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq m^*(E) + \varepsilon\,.$$

Αν $G_\varepsilon := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, το G_ε είναι ανοικτό σύνολο με $G_\varepsilon \supseteq E$. Επομένως

$$m^*(G_\varepsilon) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq m^*(E) + \varepsilon\,.$$

Επειδή για $G \supseteq E$ είναι $m^*(G) \geq m^*(E)$, έχουμε αποδείξει το δεύτερο μέρος της πρότασης. □

Για να αποδείξουμε ότι το εξωτερικό μέτρο της ένωσης αριθμήσιμης οικογένειας ξένων ανά δύο ανοικτών συνόλων ισούται με το άθροισμα των εξωτερικών μέτρων των συνόλων, χρειαζόμαστε δύο βοηθητικές προτάσεις.

Λήμμα 2.35. *Έστω (I_n) και (J_k) ακολουθίες φραγμένων διαστημάτων με*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \,.$$

Αν τα διαστήματα I_n είναι ξένα ανά δύο, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k) \,.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) > \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k)$. Τότε για κάποιο $N \in \mathbb{N}^*$ θα είναι

$$\sum_{n=1}^{N} \ell(I_n) > \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k) \,.$$

Επομένως υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\sum_{n=1}^{N} \ell(I_n) > \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k) + \varepsilon$. Παίρνουμε τώρα κλειστά διαστήματα $I'_n \subseteq I_n$ ($1 \leq n \leq N$) με $\ell(I'_n) > \ell(I_n) - \frac{\varepsilon}{2N}$ και ανοικτά διαστήματα $J'_k \supseteq J_k$($k \in \mathbb{N}^*$) τέτοια ώστε $\ell(J_k) > \ell(J'_k) - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Τότε

$$\sum_{n=1}^{N} \ell(I'_n) > \sum_{n=1}^{N} \ell(I_n) - \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J'_k) \,.$$

Κατά συνέπεια $\sum_{n=1}^{N} \ell(I'_n) > \sum_{k=1}^{m} \ell(J'_k)$, για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$. Επίσης έχουμε $\bigcup_{n=1}^{N} I'_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J'_k$, δηλαδή το $(J'_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ένα αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς συνόλου $\bigcup_{n=1}^{N} I'_n$. Επομένως υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\bigcup_{k=1}^{m} J'_k$ του συμπαγούς συνόλου $\bigcup_{n=1}^{N} I'_n$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}^*$. Επειδή τα διαστήματα $(I'_n)_{n=1}^{N}$ είναι ξένα ανά δύο, θα είναι

$$\sum_{n=1}^{N} \ell(I'_n) \leq \sum_{k=1}^{m} \ell(J'_k) \,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k) \,.$$

□

Λήμμα 2.36. *Αν* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ *είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων, τότε*

$$m^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)\,.$$

Απόδειξη. Αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση $m^*(E) < \infty$. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του $m^*(E)$ και του Λήμματος 2.35 (άσκηση). □

Πρόταση 2.37. *Αν* (G_n) *είναι αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο ανοικτών συνόλων, τότε*

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(G_n)\,.$$

Απόδειξη. Κάθε ανοικτό σύνολο G_n είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων $(I_{n,i})_{i=1}^{\infty}$, δηλαδή $G_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n,i}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως, απο το Λήμμα 2.36 είναι

$$m^*(G_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_{n,i})\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

και κατά συνέπεια

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^*(G_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_{n,i})\,.$$

Όμως είναι $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n,i}$ και τα $(I_{n,i})$, $i, n = 1, 2, \ldots$, είναι ξένα ανά δύο ανοικτά διαστήματα. Και πάλι από το το Λήμμα 2.36 έχουμε

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_{n,i})\,.$$

Άρα, $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(G_n)$. □

Ανακεφαλαιώνοντας, έχουμε ορίσει μια συνάρτηση $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ τέτοια ώστε

1. Το m^* επεκτείνει την έννοια του μήκους. Αν το I είναι ένα διάστημα, τότε το $m^*(I)$ ισούται με το μήκος του I.

2. Το m^* είναι αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές, δηλαδή

$$m^*(E+c) = m^*(E) \text{ για όλα τα } E \subseteq \mathbb{R} \text{ και όλα τα } c \in \mathbb{R}.$$

Επίσης,

$$m^*(cE) = |c| \cdot m^*(E) \text{ για όλα τα } E \subseteq \mathbb{R} \text{ και όλα τα } c \in \mathbb{R}.$$

3. $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$, για κάθε αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων (E_n).

4. Αν (G_n) είναι αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο ανοικτών συνόλων, τότε

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(G_n).$$

5. Το m^* καθορίζεται πλήρως από τις τιμές του πάνω στα ανοικτά σύνολα. Δηλαδή,

$$m^*(E) = \inf\{m^*(G) : G \text{ ανοικτό σύνολο}, G \supseteq E\}.$$

Στην παράγραφο 2.6 θα αποδείξουμε ότι γενικά το εξωτερικό μέτρο Lebesgue δεν είναι σ-αθροιστικό. Όμως υπάρχει μια μεγάλη οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ στην οποία το m^* είναι σ-αθροιστικό. Υπό κάποια έννοια, τα σύνολα αυτής της οικογένειας είναι "περίπου ανοικτά σύνολα".

2.5 Μετρήσιμα Σύνολα και Μέτρο Lebesgue

Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue ορίζεται για όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Στην παράγραφο 2.6 και πιο συγκεκριμένα στο Θεώρημα 2.77 αποδεικνύεται η ύπαρξη αριθμήσιμης οικογένειας (E_n) ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ για την οποία δεν ισχύει $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$ (παραπέμπουμε και στο Παράδειγμα 2.78). Όμως το m^* είναι σ-αθροιστικό αν επιλέξουμε κατάλληλη οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ο Lebesgue όρισε ένα σύνολο $E \subset \mathbb{R}$ να είναι "μετρήσιμο", αν

$$m^*([a,b]) = m^*([a,b] \cap E) + m^*([a,b] \cap E^c),$$

για κάθε φραγμένο διάστημα $[a,b]$. Δηλαδή τα σύνολα E και E^c θα πρέπει να χωρίζουν κάθε διάστημα $[a,b]$ σε δύο υποσύνολα, τέτοια ώστε το άθροισμα των εξωτερικών μέτρων τους να ισούται με το εξωτερικό μέτρο του $[a,b]$, δηλαδή με $b-a$.

Η ιδέα του Κ. Καραθεοδωρή ήταν να αντικαταστήσει τα διαστήματα με οποιαδήποτε υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 2.38 (Κ. Καραθεοδωρή). *Ένα σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται* **μετρήσιμο (Lebesgue μετρήσιμο)**, *αν για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)\,.$$

Παρατηρήσεις 2.39. *(i) Ένα σύνολο που είναι μετρήσιμο σύμφωνα με τον ορισμό του Κ. Καραθεοδωρή, προφανώς είναι και μετρήσιμο σύμφωνα με τον ορισμό του Lebesgue. Όμως εύκολα αποδεικνύεται ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι, βλέπε άσκηση 30. Ας σημειωθεί ότι το εξωτερικό μέτρο Lebesgue καθορίζεται πλήρως από τις τιμές του στα διαστήματα.*

(ii) Επειδή $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$, από την Πρόταση 2.29 είναι

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)\,.$$

Επομένως, για να είναι το E μετρήσιμο σύνολο, αρκεί να ισχύει η ανισότητα

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \text{ για κάθε } A \subseteq \mathbb{R}\,.$$

Επίσης, αρκεί να ισχύει η παραπάνω ανισότητα για κάθε σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ με $m^*(A) < \infty$. Είναι προφανές ότι η ανισότητα ισχύει στην περίπτωση που είναι $m^*(A) = \infty$.

Θα αποδείξουμε ότι η οικογένεια των μετρήσιμων συνόλων είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε τις παρακάτω βοηθητικές προτάσεις.

Λήμμα 2.40. *Αν $m^*(E) = 0$, τότε το E είναι μετρήσιμο.*

Απόδειξη. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε είναι $A \cap E \subseteq E$ οπότε $m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0$. Επομένως, $m^*(A \cap E) = 0$. Επειδή $A \cap E^c \subseteq A$, έχουμε

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap E)\,.$$

□

Λήμμα 2.41. *Αν τα $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμα σύνολα, τότε και η ένωσή τους $E_1 \cup E_2$ είναι μετρήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη. Επειδή το E_1 είναι μετρήσιμο, για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ έχουμε

$$m^*(A) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c)\,. \tag{2.10}$$

Επειδή και το E_2 είναι μετρήσιμο, αν χρησιμοποιήσουμε το $A \cap E_1^c$ στη θέση του A έχουμε

$$m^*(A \cap E_1^c) = m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)\,. \tag{2.11}$$

Αντικαθιστώντας τη (2.11) στη (2.10) παίρνουμε

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \\ &= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap E_1^c) + m^*\left(A \cap (E_1 \cup E_2)^c\right)\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Όμως $A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2 \cap E_1^c)$, οπότε

$$m^*\left(A \cap (E_1 \cup E_2)\right) \leq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap E_1^c)\,.$$

Επομένως, από τη (2.12) έχουμε

$$m^*(A) \geq m^*\left(A \cap (E_1 \cup E_2)\right) + m^*\left(A \cap (E_1 \cup E_2)^c\right)\,.$$

Δηλαδή το σύνολο $E_1 \cup E_2$ είναι μετρήσιμο. □

Πόρισμα 2.42. *Αν τα σύνολα $E_1, \ldots, E_n$ είναι μετρήσιμα, τότε και η ένωσή τους $E_1 \cup \cdots \cup E_n$ είναι μετρήσιμο σύνολο.*

Λήμμα 2.43. *Αν τα $E_1, \ldots, E_n$ είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα, τότε για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι*

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k)\,. \tag{2.13}$$

Ειδικά αν $A = \mathbb{R}$, τότε $m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*(E_k)$.

Απόδειξη. Η (2.13) ισχύει για $n = 1$ και υποθέτουμε ότι ισχύει για τα $n-1$ σύνολα $(E_k)_{k=1}^{n-1}$. Από την υπόθεση, τα σύνολα $E_1, \dots, E_n$ είναι ξένα ανά δύο οπότε

$$A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right) \cap E_n = A \cap E_n \quad \text{και} \quad A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right) \cap E_n^c = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \right).$$

Επειδή το E_n είναι μετρήσιμο σύνολο, θα είναι

$$\begin{aligned} m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right) \right) &= m^*\left[\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right) \right) \cap E_n \right] + m^*\left[\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right) \right) \cap E_n^c \right] \\ &= m^*\left(A \cap E_n\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \right) \right) \\ &= m^*\left(A \cap E_n\right) + \sum_{k=1}^{n-1} m^*\left(A \cap E_k\right) \qquad \text{(χρησιμοποιώντας την επαγωγή)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k). \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 2.44. *Η οικογένεια $\mathcal{M}$ των μετρήσιμων συνόλων είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$. Επομένως, τα σύνολα $\emptyset, \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμα, η ένωση και η τομή αριθμήσιμου το πλήθος μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο. Το συμπλήρωμα μετρήσιμου συνόλου είναι μετρήσιμο σύνολο και η διαφορά μετρήσιμων συνόλων είναι επίσης μετρήσιμο σύνολο. Επιπλέον, κάθε σύνολο με εξωτερικό μέτρο μηδέν είναι μετρήσιμο.*

Απόδειξη. Αν το $E \in \mathcal{M}$, δηλαδή

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \quad \forall\, A \subseteq \mathbb{R},$$

τότε συνεπάγεται ότι και το $E^c \in \mathcal{M}$. Επειδή $m^*(\emptyset) = 0$, το $\emptyset \in \mathcal{M}$. Επομένως και το $\mathbb{R} = \emptyset^c \in \mathcal{M}$. Αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$. Επειδή το $A^c \in \mathcal{M}$, από το Λήμμα 2.41 το $A \setminus B \in \mathcal{M}$.

Έστω τώρα (E_j) ακολουθία μετρήσιμων συνόλων. Αν

$$F_1 = E_1 \quad \text{και} \quad F_k = E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j,$$

από το Λήμμα 2.13 η (F_k) είναι ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων με $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Από το Πόρισμα 2.42 τα F_k είναι μετρήσιμα σύνολα και επομένως $\bigcup_{k=1}^{n} F_k \in \mathcal{M}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)^c \supset \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right)^c = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^c,$$

για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)^c\right) \\ &\geq m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^c\right). \end{aligned}$$

Όμως από το Λήμμα 2.43 είναι

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap F_k).$$

Επομένως,

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap F_k) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^c\right), \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap F_k) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^c\right) \\ &\geq m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right)\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^c\right) \\ &\qquad \left(m^*\left(A \cap \left(\textstyle\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right)\right) = m^*\left(\textstyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A \cap F_k\right) \leq \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} m^*\left(A \cap F_k\right)\right) \\ &= m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^c\right). \end{aligned}$$

Άρα, $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{M}$. □

Πρόταση 2.45. *Κάθε διάστημα I του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω $I = (a, \infty)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$m^*(A) \geq m^*\left(A \cap (a, \infty)\right) + m^*\left(A \cap (-\infty, a]\right), \quad \text{για κάθε } A \subseteq \mathbb{R}.$$

Αν $m^*(A) = \infty$, η απόδειξη είναι προφανής. Έστω $m^*(A) < \infty$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων (I_n) με $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Έστω $I_n' = I_n \cap (a, \infty)$ και $I_n'' = I_n \cap (-\infty, a]$. Τα I_n' και I_n'' είναι διαστήματα (ή το κενό σύνολο) ξένα ανά δύο, με $I_n = I_n' \cup I_n''$. Επομένως

$$\ell(I_n) = \ell(I_n') + \ell(I_n'').$$

Επειδή $A \cap (a, \infty) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n'$ και $A \cap (-\infty, a] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n''$, θα είναι

$$m^*\left(A \cap (a, \infty)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n') \quad \text{και} \quad m^*\left(A \cap (-\infty, a]\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n'').$$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι

$$m^*\left(A \cap (a, \infty)\right) + m^*\left(A \cap (-\infty, a]\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ell(I_n') + \ell(I_n'')\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Άρα, $m^*(A) \geq m^*\left(A \cap (a, \infty)\right) + m^*\left(A \cap (-\infty, a]\right)$. Δηλαδή το $I = (a, \infty)$ είναι μετρήσιμο. Τότε και το $(-\infty, a] = \mathbb{R} \setminus (a, \infty)$ είναι μετρήσιμο. Επειδή

$$(-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, \, a - \frac{1}{n}\right],$$

το διάστημα $(-\infty, a)$ είναι μετρήσιμο. Κατά συνέπεια τα διαστήματα $[a, \infty)$ και

$$(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty), \quad a < b,$$

είναι μετρήσιμα. Τέλος και το διάστημα $[a, b] = (-\infty, b] \cap [a, \infty)$, $a < b$, θα είναι μετρήσιμο. □

Παρατήρηση 2.46. *Από την προηγούμενη πρόταση και από το γεγονός ότι κάθε ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}$ είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων, κάθε ανοικτό σύνολο είναι μετρήσιμο. Επομένως και κάθε κλειστό σύνολο είναι μετρήσιμο.*

Ορισμός 2.47. Το μέτρο Lebesgue m *ορίζεται να είναι ο περιορισμός του εξωτερικού μέτρου Lebesgue* m^* *στη* σ*-άλγεβρα* $\mathcal{M}$. *Αν το* $E \subseteq \mathbb{R}$ *είναι (Lebesgue) μετρήσιμο, τότε γράφουμε* $m(E)$ *αντί για* $m^*(E)$ *και λέμε ότι* $m(E)$ **είναι το μέτρο (Lebesgue) του** E.

Θεώρημα 2.48. *(α΄) Για κάθε αριθμήσιμη οικογένεια* (F_i) *μετρήσιμων συνόλων είναι*

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(F_i)\,.$$

(β΄) Αν τα σύνολα (E_i) *είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο, τότε*

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)\,.$$

Δηλαδή το μέτρο Lebesgue $m : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ *είναι ένα* σ*-αθροιστικό θετικό μέτρο.*

Απόδειξη. (α΄) Είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.29.

(β΄) Από το Λήμμα 2.43 για $A = \mathbb{R}$ έχουμε $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_1^n m(E_i)$. Επειδή $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, θα είναι $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Άρα $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$. Όμως από την (α΄) είναι $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$, οπότε $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$.

$\square$

Παρατήρηση 2.49. *Αν* $\mathcal{P}(X)$ *είναι το δυναμοσύνολο ενός συνόλου* X, *το* $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ *λέγεται* **εξωτερικό μέτρο** *αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες :*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

(3) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, *για κάθε αριθμήσιμη οικογένεια* (A_n) *υποσυνόλων του* X.

Αν $X = \mathbb{R}$, το εξωτερικό μέτρο Lebesgue ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες. Ο Κ. Καραθεοδωρή όρισε το υποσύνολο E του X να λέγεται **μετρήσιμο (ή μ- μετρήσιμο)**, *αν για κάθε $A \subseteq X$ είναι*

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)\,.$$

Όπως και προηγουμένως, αποδεικνύεται ότι η οικογένεια $\mathfrak{M}$ των μ- μετρήσιμων συνόλων είναι μια σ-άλγεβρα στο X. Τότε $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου, δηλαδή το μ είναι ένα σ-αθροιστικό και θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}$.

Παράδειγμα 2.50. *Αν $\mathcal{C}$ είναι το σύνολο όλων των μετρήσιμων και ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ που έχουν θετικό μέτρο, τότε το $\mathcal{C}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο απειροσύνολο.*

Απόδειξη. Έστω

$$\mathcal{C}_n \overset{\text{ορ.}}{=} \left\{ C \in \mathcal{C} :\, m(C \cap [-n, n]) \geq \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Είναι $\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$. Επειδή προφανώς $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{C}$, αρκεί να αποδειχθεί ότι $\mathcal{C} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$. Αν $C \in \mathcal{C}$ και υποθέσουμε ότι $C \notin \mathcal{C}_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$m(C \cap [-n, n]) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Όμως $C \cap [-n, n] \nearrow C$ και αυτό συνεπάγεται ότι

$$m(C) = \lim_{n\to\infty} m(C \cap [-n, n]) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,,$$

δηλαδή $m(C) = 0$ που είναι άτοπο. Επομένως $C \in \mathcal{C}_n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$ και κατά συνέπεια $C \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$.

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι κάθε $\mathcal{C}_n$ έχει το πολύ $2n^2$ στοιχεία. Πράγματι, έστω $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{C}_n$ με $k > 2n^2$. Τότε, επειδή τα σύνολα $C_1 \cap [-n, n], \ldots, C_k \cap [-n, n]$ είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{k}{n} &\leq \sum_{i=1}^{k} m\left(C_i \cap [-n,n]\right) \\ &= m\left(\bigcup_{i=1}^{k} \left(C_i \cap [-n,n]\right)\right) \\ &= m\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right) \cap [-n,n]\right) \\ &\leq m([-n,n]) = 2n\,, \end{aligned}$$

δηλαδή $k \leq 2n^2$ που είναι άτοπο. Επομένως κάθε $\mathcal{C}_n$ είναι πεπερασμένο σύνολο και το $\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ θα είναι το πολύ αριθμήσιμο απειροσύνολο. □

Παράδειγμα 2.51. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(1) = f(0) = 0$. Τότε το σύνολο*

$$S = \{h \in [0,1] : f(x+h) = f(x),\ \textit{για κάποιο}\ x \in [0,1]\}$$

είναι Lebesgue μετρήσιμο με $m(S) \geq \frac{1}{2}$.

Απόδειξη. Επειδή η f είναι συνεχής, το σύνολο S είναι κλειστό (γιατί;) και επομένως Lebesgue μετρήσιμο. Αν $S' = 1 - S = \{1 - h \in [0,1] : h \in S\}$, τότε το S' είναι Lebesgue μετρήσιμο και έχει το ίδιο μέτρο με το S, δηλαδή $m(S) = m(S')$. Επομένως αν αποδείξουμε ότι $S \cup S' = [0,1]$, τότε θα είναι

$$1 = m([0,1]) \leq m(S) + m(S') = 2m(S),$$

οπότε $m(S) \geq \frac{1}{2}$. Έστω $h \in [0,1]$. Υποθέτουμε ότι η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο $a \in [0,1]$ και τη μέγιστη τιμή της στο $b \in [0,1]$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} f(x+h) - f(x) & \text{αν } x + h \leq 1, \\ f(x+h-1) - f(x) & \text{αν } x + h > 1\,. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι για $x + h = 1$ είναι $g(x) = f(1) - f(x) = f(0) - f(x) = -f(x)$. Η g είναι συνεχής, $g(a) \geq 0$ και $g(b) \leq 0$. Από το θεώρημα Bolzano(ή ενδιάμεσης τιμής) υπάρχει $c \in [0,1]$, τέτοιο ώστε $g(c) = 0$. Αν $c + h \leq 1$, τότε $f(c+h) = f(c)$ και επομένως $h \in S$. Αν όμως $c + h > 1$, τότε $f(c + h - 1) = f(c)$. Ισοδύναμα,

$$f(c - (1-h)) = f\left[(c - (1-h)) + 1 - h\right]$$

και επειδή το $c-(1-h)\in[0,1]$, το $(1-h)\in S$. Αυτό συνεπάγεται ότι $1-(1-h)=h\in S'$. Άρα, κάθε $h\in[0,1]$ ανήκει στο $S\cup S'$. □

Ορισμός 2.52. *Η διατεταγμένη τριάδα $(\mathbb{R},\mathcal{M},m)$, όπου $\mathcal{M}$ είναι η σ-άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και m είναι το μέτρο Lebesgue, λέγεται* **χώρος Lebesgue**.

Επειδή το μέτρο Lebesgue m είναι ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο, το Θεώρημα 2.6 ισχύει και για το μέτρο Lebesgue.

Θεώρημα 2.53 (Ιδιότητες του μέτρου Lebesgue). *Έστω το μέτρο Lebesgue $m:\mathcal{M}\to[0,\infty]$, όπου $\mathcal{M}$ είναι η σ-άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Τότε*

(α') $m(\emptyset)=0$.

(β') *Το m είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο, δηλαδή*

$$m(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=m(A_1)+m(A_2)+\cdots+m(A_n)\,,$$

όπου τα $A_1,A_2,\ldots,A_n$ είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα.

(γ') *Αν $A\subseteq B$, όπου $A,B\in\mathcal{M}$, τότε $m(A)\le m(B)$. Δηλαδή η m είναι μονότονη. Αν επιπλέον $m(A)<\infty$, τότε*

$$m(B\setminus A)=m(B)-m(A)\,.$$

(δ') *Αν*

$$A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots\,,$$

όπου $A_n\in\mathcal{M}$, δηλαδή $A_n\nearrow\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, τότε

$$\lim_{n\to\infty}m(A_n)=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\,.$$

(ε') *Έστω*

$$A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_n\supseteq\cdots\,,$$

όπου $A_n\in\mathcal{M}$, δηλαδή $A_n\searrow\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$. Αν $m(A_N)<\infty$ για κάποιο $N\in\mathbb{N}^*$, τότε

$$\lim_{n\to\infty}m(A_n)=m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)\,.$$

Παρατήρηση 2.54. *Η υπόθεση $m(A_N) < \infty$ για κάποιο $N \in \mathbb{N}^*$ είναι αναγκαία στην ιδιότητα (ε΄). Πράγματι, έστω $A_n = [n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε $A_n \supset A_{n+1}$ με $m(A_n) = \infty$. Επειδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, είναι $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$. Όμως $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = \infty$ και η (ε΄) δεν ισχύει. Επίσης $A_n \setminus A_{n+1} = [n, n+1)$, οπότε $m(A_n \setminus A_{n+1}) = \ell([n, n+1)) = 1$. Όμως $m(A_n) - m(A_{n+1}) = \infty - \infty$. Επομένως, η υπόθεση $m(A) < \infty$ στην ιδιότητα (γ΄) είναι αναγκαία.*

Παράδειγμα 2.55. *Έστω $C_a = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, $0 < a \leq 1$, το γενικευμένο σύνολο Cantor (παραπέμπουμε στο κεφάλαιο 1 για την κατασκευή του C_a). Είναι*

$$C_a \subset K_n = J_{n,1} \cup J_{n,2} \cup \cdots \cup J_{n,2^n} ,$$

όπου τα κλειστά και ξένα ανά δύο διαστήματα $J_{n,i}$ $(1 \leq i \leq 2^n)$ έχουν συνολικό μήκος

$$\sum_{i=1}^{2^n} \ell(J_{n,i}) = 1 - a + a\left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

Επομένως,

$$m(K_n) = 1 - a + a\left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

Επειδή $K_n \supset K_{n+1}$ και $\lim_{n\to\infty} m(K_n) = 1 - a$, θα είναι $m(C_a) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) = 1 - a$. Άρα, το γενικευμένο σύνολο Cantor C_a είναι μετρήσιμο και έχει θετικό μέτρο για $0 < a < 1$.

Παράδειγμα 2.56. *Έστω $E \in \mathcal{M}$, με $0 < m(E) < \infty$ και έστω η συνάρτηση f με*

$$f(x) := m(E \cap (-\infty, x]) , \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Τότε $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) Αν $c \in (0,\, m(E))$, τότε υπάρχει $A \in \mathcal{M}$ με $A \subset E$ τέτοιο ώστε $m(A) = c$.

Λύση.

(i) Αν $y > x$, είναι $E \cap (-\infty, y] \supseteq E \cap (-\infty, x]$ και από το Θεώρημα 2.53 (γ΄) έπεται ότι

$$f(y) = m(E \cap (-\infty, y]) \geq m(E \cap (-\infty, x]) = f(x) ,$$

δηλαδή η f είναι αύξουσα. Επειδή

$$E \cap (-\infty, y] \setminus E \cap (-\infty, x] = E \cap (x, y] \quad \text{και} \quad m(E \cap (-\infty, y]) < \infty\,,$$

από το Θεώρημα 2.53 (γ') έχουμε

$$0 \leq f(y) - f(x) = m(E \cap (-\infty, y]) - m(E \cap (-\infty, x]) = m(E \cap (x, y]) \leq m((x, y]) = y - x\,.$$

Αν $y < x$, παρόμοια έχουμε $0 \leq f(x) - f(y) \leq x - y$. Επομένως,

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|\,,$$

δηλαδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ii) Επειδή η f είναι αύξουσα, τα όρια $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to\infty} f(x)$ υπάρχουν. Έστω φθίνουσα ακολουθία (x_n), με $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Τότε

$$E \cap (-\infty,\, x_1] \supseteq E \cap (-\infty,\, x_2] \supseteq \cdots \supseteq E \cap (-\infty,\, x_n] \supseteq \cdots$$

και $m(E \cap (-\infty,\, x_1]) < \infty$. Επειδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} (E \cap (-\infty,\, x_n]) = \emptyset$, από το Θεώρημα 2.53 (ε') έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} m(E \cap (-\infty,\, x_n]) = m(\emptyset) = 0\,.$$

Άρα $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Αν τώρα η ακολουθία (y_n) είναι αύξουσα, με $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, τότε

$$E \cap (-\infty,\, y_1] \subseteq E \cap (-\infty,\, y_2] \subseteq \cdots \subseteq E \cap (-\infty,\, y_n] \subseteq \cdots\,.$$

Επειδή $\bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap (-\infty,\, y_n]) = E$, από το Θεώρημα 2.53 (δ') έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} m(E \cap (-\infty,\, y_n]) = m(E)\,.$$

Δηλαδή $\lim_{y\to\infty} f(y) = m(E)$. Άρα, το πεδίο τιμών της f είναι το ανοικτό διάστημα $(0,\, m(E))$. Αν $c \in (0,\, m(E))$, επειδή η f είναι συνεχής, από το θεώρημα Bolzano(ή ενδιάμεσης τιμής) υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = c$. Ισοδύναμα, $m(E \cap (-\infty, x_0]) = c$. Αν $A := E \cap (-\infty, x_0] \subset E$, το A είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του E με $m(A) = c$.

Σημείωση. Η (ii) αποδεικνύεται και στην περίπτωση που είναι $0 < m(E) \leq \infty$. Πρώτα υποθέτουμε ότι το μετρήσιμο σύνολο E είναι φραγμένο, έστω $E \subset [a, b]$. Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) := m(E \cap [a,\, x])$, $x \in [a, b]$. Η συνάρτηση f είναι αύξουσα και συνεχής στο $[a, b]$ και η απόδειξη της (ii) είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος Bolzano. Στην περίπτωση που το E δεν είναι φραγμένο, ορίζουμε την ακολουθία των φραγμένων και μετρήσιμων συνόλων $E_n := E \cap [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή $E_n \subseteq E_{n+1}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$, είναι $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(E)$. Επομένως, για $0 < c < m(E)$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $0 < c < m(E_N)$, όπου το μετρήσιμο σύνολο E_N είναι φραγμένο. Τότε, από την προηγούμενη περίπτωση υπάρχει $A \in \mathcal{M}$, με $A \subset E_N \subset E$, τέτοιο ώστε $m(A) = c$ (βλέπε άσκηση 42). ■

Το μέτρο Lebesgue m επεκτείνει το μήκος ℓ, που ορίζεται μόνο για διαστήματα, σε μια μεγαλύτερη οικογένεια συνόλων που είναι η οικογένεια των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων $\mathcal{M}$. Υπάρχει άλλο σ-αθροιστικό θετικό μέτρο μ στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$, τέτοιο ώστε $\mu(I) = \ell(I)$ για κάθε διάστημα I; Θα αποδείξουμε τώρα ότι η απάντηση είναι αρνητική.

Θεώρημα 2.57. *Έστω μ ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$, τέτοιο ώστε $\mu(I) = \ell(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα I. Τότε, $\mu = m$.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδειχθεί ότι $\mu(E) = m(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{M}$.

1η περίπτωση. Υποθέτουμε ότι $E \in \mathcal{M}$ με $E \subseteq I$, όπου I ανοικτό και φραγμένο διάστημα. Έστω (J_k) ακολουθία ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων με $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$. Επειδή $\mu(J_k) = \ell(J_k)$, έχουμε

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(J_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k)\,.$$

Τότε από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου Lebesgue έπεται ότι

$$\mu(E) \leq m^*(E) = m(E)\,, \text{ για κάθε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο } E \subseteq I\,.$$

Επειδή τα μ, m είναι σ-αθροιστικά θετικά μέτρα στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$, είναι

$$\mu(E) + \mu(I \setminus E) = \mu(I) = m(I) = m(E) + m(I \setminus E)\,.$$

Στις παραπάνω ισότητες όλοι οι όροι είναι πεπερασμένοι και έχουμε αποδείξει ότι $\mu(E) \leq m(E)$,

$\mu(I \setminus E) \leq m(I \setminus E)$. Άρα, θα πρέπει να είναι

$$\mu(E) = m(E)\,, \quad \text{για κάθε } E \in \mathcal{M} \text{ με } E \subseteq I\,.$$

2η περίπτωση. Έστω τώρα το E είναι ένα οποιοδήποτε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Αν $I_n := (-n, n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, ορίζουμε την αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων (E_n) με

$$E_1 := E \cap I_1 \quad \text{και} \quad E_n := E \cap (I_n \setminus I_{n-1})\,, \quad \text{για κάθε } n > 1\,.$$

Τα σύνολα E_n είναι Lebesgue μετρήσιμα και ξένα ανά δύο. Επίσης εύκολα διαπιστώνεται ότι $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Επειδή $E_n \subseteq I_n$, από την προηγούμενη περίπτωση είναι $\mu(E_n) = m(E_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως,

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = m(E)\,.$$

Άρα, το μέτρο μ ταυτίζεται με το μέτρο Lebesgue m στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$. □

Ορισμός 2.58. *Αν $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, με $\sigma(\mathcal{E})$ συμβολίζουμε τη μοναδική μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει το $\mathcal{E}$. Η $\sigma(\mathcal{E})$ λέμε ότι είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{E}$ (βλέπε Πρόταση 2.16). Η* **Borel σ-άλγεβρα** *είναι αυτή που παράγεται από τα ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}$ και συμβολίζεται με $\mathfrak{B}$. Τα στοιχεία της $\mathfrak{B}$ λέγονται* **σύνολα Borel**.

Παρατηρήσεις 2.59.

1. *Αν $\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$, τότε $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$.*

2. *Με $\mathbf{F}_\sigma$ παριστάνουμε τα σύνολα που είναι ενώσεις αριθμήσιμου το πλήθος κλειστών συνόλων και με $\mathbf{G}_\delta$ παριστάνουμε τα σύνολα που είναι τομές αριθμήσιμου το πλήθος ανοικτών συνόλων. Προφανώς το συμπλήρωμα ενός F_σ συνόλου είναι ένα G_δ σύνολο και αντίστροφα. Τα F_σ, G_δ είναι σύνολα Borel. Επίσης μπορούμε να θεωρήσουμε σύνολα $F_{\sigma\delta}, G_{\delta\sigma}, F_{\sigma\delta\sigma}$ κ.ο.κ. Ένα σύνολο $F_{\sigma\delta}$ είναι η τομή αριθμήσιμου το πλήθος συνόλων F_σ.*

Πρόταση 2.60. *Η Borel σ-άλγεβρα $\mathfrak{B}$ παράγεται από :*

(α) Τα ανοικτά και φραγμένα διαστήματα $\mathcal{E}_1 = \{(a, b) : a < b\}$.

(β) Τα κλειστά και φραγμένα διαστήματα $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] : a < b\}$.

(γ) Τα ημιάνοικτα και φραγμένα διαστήματα $\mathcal{E}_3 = \{(a, b] : a < b\}$ *ή* $\mathcal{E}_4 = \{[a, b) : a < b\}$.

(δ) Τα διαστήματα $\mathcal{E}_5 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ *ή* $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

(ε) Τα διαστήματα $\mathcal{E}_7 = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ *ή* $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

Απόδειξη. Τα στοιχεία των $\mathcal{E}_j, j \neq 3, 4$, είναι ανοικτά ή κλειστά σύνολα και τα στοιχεία των $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4$ είναι σύνολα G_δ. Για παράδειγμα, $(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a,\, b + 1/n)$. Επομένως

$$\sigma(\mathcal{E}_j) \subseteq \mathfrak{B},\ j = 1, 2, \ldots, 8\,.$$

Επειδή κάθε ανοικτό σύνολο είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων, τα ανοικτά σύνολα ανήκουν στη σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{E}_1)$ και επομένως $\mathfrak{B} \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$. Άρα, $\mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{E}_1)$.

Για να αποδείξουμε τώρα ότι $\mathfrak{B} \subseteq \sigma(\mathcal{E}_j), j \geq 2$, αρκεί να δείξουμε ότι τα ανοικτά και φραγμένα διαστήματα ανήκουν στις $\sigma(\mathcal{E}_j), j \geq 2$. Το $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a + 1/n,\, b - 1/n] \in \sigma(\mathcal{E}_2)$ και παρόμοια αποδεικνύεται ότι $(a, b) \in \sigma(\mathcal{E}_j), j = 3, \ldots, 8$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα μας λέει ότι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο διαφέρει από ένα σύνολο Borel κατά ένα σύνολο μέτρου μηδέν.

Θεώρημα 2.61. *Για κάθε σύνολο* $E \subseteq \mathbb{R}$ *οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :*

(i) Το E *είναι μετρήσιμο.*

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$*, υπάρχει ανοικτό σύνολο* $G \supseteq E$ *τέτοιο ώστε*

$$m^*(G \setminus E) < \varepsilon.$$

(iii) Για κάθε $\varepsilon > 0$*, υπάρχει κλειστό σύνολο* $F \subseteq E$ *τέτοιο ώστε*

$$m^*(E \setminus F) < \varepsilon.$$

(iv) Είναι $E = G \setminus N$, όπου G είναι ένα G_δ σύνολο και $N = G \setminus E$ με $m^*(N) = 0$.

(v) Είναι $E = F \cup N$, όπου F είναι ένα F_σ σύνολο και $N = E \setminus F$ με $m^*(N) = 0$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τις εξής συνεπαγωγές:

$$(i) \Rightarrow \quad (ii) \Rightarrow \quad (iv) \Rightarrow \quad (i)$$

και

$$(i) \Rightarrow \quad (iii) \Rightarrow \quad (v) \Rightarrow \quad (i)$$

$(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω $m(E) < \infty$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ από την Πρόταση 2.34 υπάρχει ανοικτό σύνολο $G \supseteq E$ τέτοιο ώστε $m(G) < m(E) + \varepsilon$. Επειδή $G = (G \setminus E) \cup E$, είναι $m(G) = m(G \setminus E) + m(E)$. Επομένως $m(G \setminus E) = m(G) - m(E)$, αφού $m(E) < \infty$. Άρα,

$$m(G \setminus E) < \varepsilon\,.$$

Έστω τώρα $m(E) = \infty$. Αν $E_n = E \cap [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}^*$, τότε $m(E_n) < \infty$. Από την προηγούμενη περίπτωση, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο G_n με $G_n \supseteq E_n$ τέτοιο ώστε $m(G_n \setminus E_n) < \varepsilon/2^{n+1}$. Επειδή $G_n \setminus E \subseteq G_n \setminus E_n$, είναι

$$m(G_n \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Αν $G := \bigcup_{n=1}^\infty G_n$, το G είναι ανοικτό σύνολο με $G \supseteq \bigcup_{n=1}^\infty (E \cap [-n, n]) = E$ και $G \setminus E = \bigcup_{n=1}^\infty (G_n \setminus E)$. Επομένως,

$$m(G \setminus E) = m\left(\bigcup_{n=1}^\infty (G_n \setminus E)\right) \le \sum_{n=1}^\infty m(G_n \setminus E) \le \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.$$

$(i) \Rightarrow (iii)$ Το E είναι μετρήσιμο οπότε και το E^c θα είναι μετρήσιμο. Επειδή $(i) \Rightarrow (ii)$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο $G \supseteq E^c$ τέτοιο ώστε $m^*(G \setminus E^c) < \varepsilon$. Θέτουμε $F := G^c$. Τότε το $F \subseteq E$ είναι κλειστό σύνολο και επειδή $E \setminus F = G \setminus E^c$, θα είναι $m^*(E \setminus F) = m^*(G \setminus E^c) < \varepsilon$. Επομένως η (iii) ισχύει.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει ανοικτό σύνολο G_n με $G_n \supseteq E$, τέτοιο ώστε $m^*(G_n \setminus E) < 1/n$. Αν $G := \bigcap_{n=1}^\infty G_n$, τότε το G είναι ένα G_δ σύνολο τέτοιο ώστε $G \subseteq G_n$ και $G \setminus E \subseteq G_n \setminus E$. Επομένως,

$$m^*(G \setminus E) \le m^*(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Άρα $m^*(G \setminus E) = 0$. Επειδή $G \supseteq E$, θα είναι $E = G \setminus (G \setminus E)$, όπου G είναι ένα σύνολο G_δ και $m^*(G \setminus E) = 0$.

$\underline{(iii) \Rightarrow (v)}$ Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει κλειστό σύνολο F_n με $F_n \subseteq E$, τέτοιο ώστε $m^*(E \setminus F_n) < 1/n$. Αν $F := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, τότε το F είναι ένα F_σ σύνολο τέτοιο ώστε $F_n \subseteq F$ και $E \setminus F \subseteq E \setminus F_n$. Επομένως,

$$m^*(E \setminus F) \leq m^*(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Άρα $m^*(E \setminus F) = 0$. Επειδή $F \subseteq E$, θα είναι $E = F \cup (E \setminus F)$, όπου F είναι ένα F_σ σύνολο και $m^*(E \setminus F) = 0$.

Τέλος, $(iv) \Rightarrow (i)$ και $(v) \Rightarrow (i)$ επειδή τα σύνολα F_σ και G_δ είναι Borel και επομένως μετρήσιμα. Επίσης το N με $m^*(N) = 0$ είναι μετρήσιμο. □

Πόρισμα 2.62. *Αν $m(E) = 0$, τότε το E είναι υποσύνολο ενός συνόλου Borel G με $m(G) = 0$.*

Απόδειξη. Αν $m(E) = 0$, τότε το E είναι μετρήσιμο σύνολο. Από το Θεώρημα 2.61 (iv) το $E = G \setminus N$, όπου το G είναι σύνολο Borel και $m(N) = 0$. Επομένως $E \subset G$ και

$$m(G) = m\left((G \setminus N) \cup N\right) = m(G \setminus N) + m(N) = 0\,.$$

□

Πόρισμα 2.63. *Αν το E είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο, τότε υπάρχουν σύνολα Borel F και G τέτοια ώστε*

$$F \subseteq E \subseteq G \quad \textit{και} \quad m(G \setminus F) = 0.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.61 (iv) και (v) υπάρχουν σύνολα Borel G και F τέτοια ώστε $E \subseteq G$ και $F \subseteq E$, με $m(G \setminus E) = m(E \setminus F) = 0$. Επομένως $F \subseteq E \subseteq G$ και επειδή $G \setminus F = (G \setminus E) \cup (E \setminus F)$, είναι $m(G \setminus F) = m(G \setminus E) + m(E \setminus F) = 0$. □

Πόρισμα 2.64. *Αν μ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ και $\mu(B) = m(B)$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}$, τότε*

$$\mu = m \text{ στη } \sigma\text{-άλγεβρα } \mathcal{M}\,.^{1}$$

Απόδειξη. Έστω $E \in \mathcal{M}$. Από την υπόθεση και το προηγούμενο πόρισμα είναι $\mu(F) = m(F)$, $\mu(G) = m(G)$ και $\mu(G \setminus F) = m(G \setminus F) = 0$. Επειδή $F \subseteq E \subseteq G = F \cup (G \setminus F)$, έχουμε

$$\mu(F) \leq \mu(E) \leq \mu(G) = \mu\left(F \cup (G \setminus F)\right) = \mu(F) + \mu(G \setminus F) = \mu(F).$$

Επομένως $\mu(F) = \mu(G) = \mu(E)$ και παρόμοια $m(F) = m(G) = m(E)$. Άρα $\mu(E) = m(E)$, για κάθε $E \in \mathcal{M}$. □

Παρατήρηση 2.65. *Από το Θεώρημα 2.61 προκύπτει ότι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο είναι ένα σύνολο Borel συν (ή πλην) ένα υποσύνολο ενός συνόλου Borel με μέτρο μηδέν. Ο Lebesgue μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ λέγεται* **πλήρης** *επειδή κάθε υποσύνολο ενός συνόλου E, με $m(E) = 0$, είναι Lebesgue μετρήσιμο. 'Ομως δεν είναι δυνατόν όλα τα σύνολα που έχουν μέτρο μηδέν να είναι σύνολα Borel, δηλαδή ο $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, m)$ δεν είναι πλήρης χώρος. Πράγματι, αν κάθε σύνολο με μέτρο μηδέν είναι σύνολο Borel, από το Θεώρημα 2.61 (iv) ή (v) κάθε $E \in \mathcal{M}$ θα είναι σύνολο Borel, δηλαδή $E \in \mathfrak{B}$. 'Αρα $\mathcal{M} = \mathfrak{B}$. Αυτό όμως είναι άτοπο επειδή υπάρχουν Lebesgue μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι σύνολα Borel. Για την απόδειξη θεωρούμε το τριαδικό σύνολο Cantor C, για το οποίο είναι $m(C) = 0$ και $|C| = \mathfrak{c}$. Επειδή κάθε υποσύνολο του C έχει μέτρο μηδέν, $\mathcal{P}(C) \subset \mathcal{M}$. Επομένως, $|\mathcal{M}| \geq |\mathcal{P}(C)| = 2^{\mathfrak{c}}$. 'Ομως $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, οπότε $|\mathcal{M}| \leq 2^{\mathfrak{c}}$. 'Αρα $|\mathcal{M}| = 2^{\mathfrak{c}}$.*
Θεωρούμε τώρα όλα τα ανοικτά διαστήματα στο $\mathbb{R}$ των οποίων τα άκρα είναι ρητοί αριθμοί. Αυτά είναι αριθμήσιμο το πλήθος και εύκολα αποδεικνύεται ότι παράγουν τη Borel σ-άλγεβρα $\mathfrak{B}$. Τότε όμως μπορεί να αποδειχθεί ότι $|\mathfrak{B}| = \mathfrak{c}$. Δηλαδή

$$|\mathfrak{B}| = \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} = |\mathcal{M}|$$

[1] Πιο γενικά, αποδείχτηκε στο Θεώρημα 2.57 ότι αν $\mu(I) = m(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα I, τότε $\mu = m$ στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$.

και επομένως το $\mathfrak{B}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathcal{M}$.

Στην Πρόταση 2.80 δίνουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα Lebesgue μετρήσιμου συνόλου που δεν είναι σύνολο Borel.

Πόρισμα 2.66. *(α΄) Για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι*

$$m^*(E) = \inf\{m(G) : E \subseteq G \text{ και το } G \text{ είναι ανοικτό}\} .$$

(β΄) Αν το $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο, τότε

$$m(E) = \sup\{m(F) : F \subseteq E \text{ και το } F \text{ είναι κλειστό}\} .$$

(γ΄) Αν το $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο, τότε

$$m(E) = \sup\{m(K) : K \subseteq E \text{ και το } K \text{ είναι συμπαγές}\} .$$

Απόδειξη. (α΄) Είναι η Πρόταση 2.34.

(β΄) Αν το $E \in \mathcal{M}$ και το F είναι κλειστό, με $F \subseteq E$, τότε $m(F) \leq m(E)$. Από το Θεώρημα 2.61 (iii), για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq E$ τέτοιο ώστε $m(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Επομένως

$$m(E) = m(F_\varepsilon) + m(E \setminus F_\varepsilon) < m(F_\varepsilon) + \varepsilon .$$

(γ΄) Από το Θεώρημα 2.61 (iii) για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει κλειστό σύνολο $K_n \subseteq E \cap [-n, n]$, τέτοιο ώστε $m(E \cap [-n, n] \setminus K_n) < 1/n$. Το K_n είναι συμπαγές. Επειδή $m(E \cap [-n, n]) < \infty$, έχουμε

$$m(E \cap [-n, n]) - m(K_n) < \frac{1}{n} \quad \text{και ισοδύναμα } m(K_n) > m(E \cap [-n, n]) - \frac{1}{n} .$$

Επίσης $E \cap [-n, n] \subseteq E \cap [-(n+1), n+1]$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} m(E \cap [-n, n]) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap [-n, n]\right) = m(E) .$$

Επειδή για κάθε συμπαγές σύνολο K με $K \subseteq E$ είναι $m(K) \leq m(E)$, έχουμε

$$\begin{aligned} m(E) &\geq \sup\{m(K) : K \subseteq E\,,\ K \text{ συμπαγές}\} \\ &\geq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} m(K_n) \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} m(K_n) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} m(E\cap[-n,n]) = m(E)\,. \end{aligned}$$

Άρα, $m(E) = \sup\{m(K) : K \subseteq E\,,\ K \text{ συμπαγές}\}$.

□

Πρόταση 2.67. *Για κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο G με $A \subseteq G$ και $m^*(A) = m(G)$. Μάλιστα το $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, όπου (G_n) είναι αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών συνόλων με $G_n \supseteq A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Δηλαδή το G είναι ένα G_δ σύνολο.*

Απόδειξη. Αν $m^*(A) = \infty$, παίρνουμε το $G = \mathbb{R}$.
Έστω $m^*(A) < \infty$. Από το Πόρισμα 2.66 (α'), για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει ανοικτό σύνολο G_n με $G_n \supseteq A$ και $m(G_n) < m^*(A) + 1/n$. Το σύνολο $G := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι ένα G_δ σύνολο και επομένως μετρήσιμο. Επειδή $A \subseteq G \subseteq G_n$, είναι

$$m^*(A) \leq m(G) \leq m(G_n) < m^*(A) + \frac{1}{n}\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Άρα, $m^*(A) = m(G)$. □

Έχουμε αποδείξει ότι αν το σύνολο $E \subset \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε το μέτρο από τα κάτω με συμπαγή σύνολα. Αν $E \subset \mathbb{R}$ με $m^*(E) < \infty$, τότε το αντίστροφο ισχύει. Ας σημειωθεί ότι τα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ έχουν πεπερασμένο μέτρο Lebesgue.

Θεώρημα 2.68. *Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $m^*(E) < +\infty$. Το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές σύνολο K με $K \subseteq E$, τέτοιο ώστε*

$$m^*(E \setminus K) < \varepsilon\,.$$

Απόδειξη. Αν το σύνολο E είναι Lebesgue μετρήσιμο, από το Πόρισμα 2.66 (γ') για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές σύνολο $K_\varepsilon \subseteq E$ τέτοιο ώστε $m(E) < m(K_\varepsilon) + \varepsilon$. Ισοδύναμα, $m(E \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει συμπαγές σύνολο $K_n \subseteq E$ τέτοιο ώστε $m^*(E \setminus K_n) < 1/n$. Αν $K := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, τότε το K είναι μετρήσιμο υποσύνολο του E με $E \setminus K \subseteq E \setminus K_n$. Κατά συνέπεια $m^*(E \setminus K) < 1/n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως $m^*(E \setminus K) = 0$ που συνεπάγεται ότι το σύνολο $Z := E \setminus K$ είναι μετρήσιμο. Άρα, το σύνολο $E = K \cup Z$ είναι μετρήσιμο. □

2.6 Σύνολα που δεν είναι Lebesgue Μετρήσιμα

Προκειμένου να κατασκευάσουμε ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, θα χρειαστούμε το αξίωμα της επιλογής στην παρακάτω μορφή.

Αξίωμα 2.69 (Αξίωμα Zermelo). *Έστω $\{E_a : a \in A\}$ οικογένεια ξένων ανά δύο μη κενών συνόλων. Τότε υπάρχει σύνολο με ένα ακριβώς στοιχείο από κάθε E_a, $a \in A$.*

Αν $E \subseteq \mathbb{R}$, η διαφορά $E - E$ ορίζεται ως εξής

$$E - E := \{x - y : x, y \in E\} .$$

Είναι προφανές ότι αν $E \subseteq F$, τότε $E - E \subseteq F - F$. Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ένα θεώρημα του H. Steinhaus που μας λέει ότι αν το E είναι Lebesgue μετρήσιμο με $m(E) > 0$, τότε η διαφορά $E - E$ περιέχει μια περιοχή $(-\delta, \delta)$ του μηδενός. Επομένως, ακόμη και αν το εσωτερικό ενός μετρήσιμου συνόλου E θετικού μέτρου είναι το κενό (όπως π.χ. συμβαίνει με το γενικευμένο σύνολο του Cantor C_a, $0 < a < 1$), το εσωτερικό της διαφοράς $E - E$ είναι μη κενό σύνολο. Πρώτα θα αποδείξουμε αυτό το αποτέλεσμα για συμπαγή σύνολα. Αν τα A, B είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, υπενθυμίζεται ότι η απόσταση $d(A, B)$ των A και B ορίζεται ως εξής

$$d(A, B) := \inf \{|x - y| : x \in A, \, y \in B\} .$$

Αν ένα τουλάχιστον από τα μη κενά κλειστά σύνολα F_1, F_2 είναι συμπαγές, τότε αποδεικνύεται (βλέπε άσκηση 46) ότι υπάρχει $x^* \in F_1$ και $y^* \in F_2$ τέτοια ώστε

$$d(F_1, F_2) = |x^* - y^*| = \inf \{|x - y| : x \in F_1, \, y \in F_2\} .$$

Ειδικά αν τα σύνολα F_1, F_2 είναι ξένα, τότε $d(F_1, F_2) > 0$.

Λήμμα 2.70. *Έστω το $K \subset \mathbb{R}$ είναι συμπαγές σύνολο με $m(K) > 0$. Τότε το σύνολο $K - K$ περιέχει μια περιοχή $(-\delta,\, \delta)$ του μηδενός.*

Απόδειξη. Επειδή $0 < m(K) < \infty$, για $\varepsilon = m(K) > 0$ από το Πόρισμα 2.66 (α') υπάρχει ανοικτό σύνολο G με $G \supset K$, τέτοιο ώστε $m(G) < m(K) + \varepsilon = 2m(K)$. Επειδή το K είναι συμπαγές και το $G^c = \mathbb{R} \setminus G$ είναι κλειστό με $K \cap G^c = \emptyset$, η απόσταση $\delta = d(K, G^c) := \inf\{|k - g'| : k \in K,\, g' \in G^c\} > 0$. Θα αποδείξουμε ότι το διάστημα $(-\delta,\, \delta)$ περιέχεται στο $K - K$.

Παρατηρούμε ότι αν $x \in (-\delta,\, \delta)$, δηλαδή $|x| < \delta$, τότε $x + K \subseteq G$. Πράγματι, αν το $x + k = g' \in G^c$, για κάποιο $k \in K$, θα είναι $x = g' - k$. Όμως $|x| = |k - g'| \geq \delta$, που είναι άτοπο.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι για κάθε $x \in (-\delta,\, \delta)$ είναι $K \cap (x + K) \neq \emptyset$. Ας υποθέσουμε ότι $K \cap (x + K) = \emptyset$. Επειδή $K \cup (x + K) \subseteq G$, έχουμε

$$2m(K) = m(K) + m(x + K) = m\left(K \cup (x + K)\right) \leq m(G) < 2m(K)$$

που είναι άτοπο. Άρα, για κάθε $x \in (-\delta,\, \delta)$ είναι $K \cap (x + K) \neq \emptyset$. Τότε όμως υπάρχουν $k_1, k_2 \in K$, τέτοια ώστε $x + k_1 = k_2$ και ισοδύναμα $x = k_1 - k_2 \in K - K$. Δηλαδή, αν $x \in (-\delta,\, \delta)$ τότε $x \in K - K$ και αυτό αποδεικνύει ότι το $K - K$ περιέχει την περιοχή $(-\delta,\, \delta)$ του μηδενός. □

Θεώρημα 2.71 (H. Steinhaus [63]). *Αν το $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E) > 0$, τότε η διαφορά $E - E$ περιέχει μια περιοχή $(-\delta,\, \delta)$ του μηδενός.*

Απόδειξη. Έστω $E_n := E \cap (-n, n) = \{x \in E : |x| < n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Είναι $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και $E_n \subseteq E_{n+1}$, οπότε $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(E) > 0$. Επομένως υπαρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε $m(E_n) > 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Κατά συνέπεια $0 < m(E_{n_0}) < \infty$. Τότε όμως για $\varepsilon = \frac{1}{2} m(E_{n_0}) > 0$ από το Πόρισμα 2.66 (γ') υπάρχει συμπαγές σύνολο K με $K \subseteq E_{n_0} \subseteq E$, τέτοιο ώστε

$$0 < m(E_{n_0}) < m(K) + \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2} m(E_{n_0}) < m(K)\,.$$

Δηλαδή $m(K) > 0$.

2ος τρόπος. Επειδή $m(E) > 0$ και

$$m(E) = \sup\{m(K) : K \subseteq E \,\text{και το}\, K \,\text{είναι συμπαγές}\}\ ,$$

είναι προφανές ότι για ένα τουλάχιστον συμπαγές υποσύνολο K του E θα είναι $m(K) > 0$. Επειδή $K \subseteq E$, θα είναι $K - K \subseteq E - E$ και από το προηγούμενο λήμμα το $E - E$ περιέχει ανοικτό διάστημα της μορφής $(-\delta,\, \delta)$. □

Μια άλλη απόδειξη του θεωρήματος του Steinhaus υποδεικνύεται στην άσκηση 53 του κεφαλαίου 4.

Πόρισμα 2.72. *Αν $E \subset \mathbb{R}$ και η διαφορά $E - E$ δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα της μορφής $(-\delta,\, \delta)$, τότε είτε το E δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο ή $m^*(E) = 0$.*

Ορίζουμε τώρα μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}$ ως εξής

$$x \sim y \text{ αν και μόνο αν } x - y \in \mathbb{Q}\,.$$

Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}$. Είναι προφανές ότι $x \sim x$ και $x \sim y \Rightarrow y \sim x$. Επίσης $x \sim y$ και $y \sim z$ συνεπάγεται $x \sim z$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι της μορφής $[x]_\sim = \{x + r\ :\ r \in \mathbb{Q}\}$. Αν $[x]_\sim$ και $[y]_\sim$ είναι δύο κλάσεις ισοδυναμίας, τότε είτε $[x]_\sim = [y]_\sim$ ή $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$. Συγκεκριμένα, αν $x - y \in \mathbb{Q}$ τότε $[x]_\sim = [y]_\sim$, ενώ αν $x - y$ είναι άρρητος τότε $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$. Η οικογένεια $\{[x]_\sim\ :\ x \in \mathbb{R}\}$ αποτελεί μία διαμέριση του $\mathbb{R}$. Από όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας, μία αποτελείται από όλους τους ρητούς ενώ οι άλλες κλάσεις αποτελούνται από άρρητους αριθμούς και είναι σύνολα ξένα ανά δύο. Όλες οι διαφορετικές μεταξύ τους κλάσεις ισοδυναμίας δεν είναι αριθμήσιμες το πλήθος. Πράγματι, κάθε κλάση ισοδυναμίας είναι αριθμήσιμο σύνολο, η ένωση όμως όλων των κλάσεων είναι το $\mathbb{R}$.

Από το αξίωμα του Zermelo, έστω E το σύνολο με ένα ακριβώς στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Ένα τέτοιο σύνολο E λέγεται και **σύνολο Vitali**.

- Το σύνολο $E - E = \{x - y : x, y \in E\}$ δεν περιέχει κανένα διάστημα. Πράγματι, αν το σύνολο $E - E$ περιέχει ένα διάστημα, τότε στο διάστημα αυτό υπάρχει ρητός αριθμός r, $r \neq 0$. Επομένως, υπάρχουν $x_1, x_2 \in E$ τέτοια ώστε $r = x_1 - x_2$. Όμως τότε $x_1 \sim x_2$ και από τον ορισμό του E θα πρέπει να είναι $x_1 = x_2$, δηλαδή $r = 0$ που είναι άτοπο.

- Από το Πόρισμα 2.72 προκύπτει ότι είτε το E δεν είναι μετρήσιμο ή $m(E) = 0$.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι το E δεν είναι μετρήσιμο. Έστω $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση των ρητών αριθμών στο $\mathbb{R}$. Αν

$$E_n := E + r_n = \{x + r_n : x \in E\} \ ,$$

αναφέρουμε δύο ιδιότητες της αριθμήσιμης οικογένειας συνόλων (E_n).

Λήμμα 2.73. *(α΄) Αν $m \neq n$, τότε $E_m \cap E_n = \emptyset$.*

(β΄) Είναι $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Απόδειξη. (α΄) Αν $x \in E_m \cap E_n$, τότε $x = \xi + r_m = \eta + r_n$, όπου $\xi, \eta \in E$. Επομένως $\xi - \eta \in \mathbb{Q}$, οπότε $[\xi]_\sim = [\eta]_\sim$. Κατά συνέπεια $\{\xi\} = E \cap [\xi]_\sim = E \cap [\eta]_\sim = \{\eta\}$, δηλαδή $\xi = \eta$. Όμως τότε $r_m = r_n$, άτοπο.

(β΄) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν $y \in [x]_\sim$, με $y \in E$, τότε $x - y = r_n \in \mathbb{Q}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$. Δηλαδή $x = y + r_n \in E_n$ και επομένως $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Άρα $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

□

Θεώρημα 2.74 (Vitali). *Το σύνολο του Vitali δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του συνόλου E του Vitali, είτε το E δεν είναι μετρήσιμο ή $m(E) = 0$. Έστω $m(E) = 0$. Επειδή $m^*(E_n) = m^*(E)$, θα είναι και $m(E_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Όμως $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, όπου τα σύνολα E_n είναι ξένα ανά δύο. Τότε, επειδή το μέτρο Lebesgue m είναι σ-αθροιστικό θα είναι

$$m(\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = 0 \,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα, το E δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο. □

Πόρισμα 2.75 (Vitali). *Κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $m^*(A) > 0$ περιέχει ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο.*

Απόδειξη. Έστω E το σύνολο του Vitali και έστω (E_n) η αριθμήσιμη οικογένεια με $E_n = E + r_n$, όπου $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αρίθμηση των ρητών αριθμών στο $\mathbb{R}$. Από το προηγούμενο θεώρημα τα E_n δεν είναι μετρήσιμα σύνολα, όμως κάποια από τα σύνολα $A \cap E_n$ είναι δυνατόν να είναι μετρήσιμα.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι τα σύνολα $A \cap E_n$ που είναι μετρήσιμα πρέπει να έχουν μέτρο μηδέν. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι το μετρήσιμο σύνολο $A \cap E_n$ έχει θετικό μέτρο. Τότε, από το Θεώρημα 2.71 η διαφορά $A \cap E_n - A \cap E_n$ θα περιέχει μια περιοχή του μηδενός. Επειδή $A \cap E_n \subseteq E_n$, τότε και η διαφορά $E_n - E_n = E - E$ θα περιέχει μια περιοχή του μηδενός, άτοπο. Άρα, τα σύνολα $A \cap E_n$ που είναι μετρήσιμα θα πρέπει να έχουν μέτρο μηδέν.

Επειδή $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, είναι $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap E_n)$ και $m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \cap E_n)$. Αν όλα τα σύνολα $A \cap E_n$ είναι μετρήσιμα, τότε $m^*(A \cap E_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και αυτό συνεπάγεται ότι $m^*(A) = 0$, άτοπο. Επομένως για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$ το σύνολο $A \cap E_n \subset A$ δεν είναι μετρήσιμο. □

Ισοδύναμα, το Πόρισμα 2.75 διατυπώνεται και ως εξής :

Πόρισμα 2.76. *Αν $A \subset \mathbb{R}$ και κάθε υποσύνολο του A είναι Lebesgue μετρήσιμο, τότε $m(A) = 0$.*

Θεώρημα 2.77. *Υπάρχουν ξένα μεταξύ τους σύνολα πραγματικών αριθμών A και B για τα οποία*

$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B).$$

Επομένως αν $E_1 = A$, $E_2 = B$ και $E_n = \emptyset$ για κάθε $n \geq 3$, η (E_n) είναι αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)\,,$$

για κάθε ζεύγος A, B ξένων μεταξύ τους υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Αν E είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο πραγματικών αριθμών, τότε για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ έχουμε

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^*\left((A \cap E) \cup (A \cap E^c)\right) = m^*(A)\,.$$

Δηλαδή το E ικανοποιεί τον ορισμό της μετρησιμότητας συνόλου(Ορισμός 2.38). Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με το Πόρισμα 2.75. □

Στο επόμενο παράδειγμα κατασκευάζουμε αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο μη μετρήσιμων υποσυνόλων (E_n) του $\mathbb{R}$ με

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)\,.$$

Παράδειγμα 2.78. *Αν $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αρίθμηση των ρητών αριθμών στο $(-1,1)$, κατασκευάζουμε στο $I = (0,1)$ το σύνολο E του Vitali με τον ίδιο τρόπο που έγινε η κατασκευή αυτού του συνόλου στο $\mathbb{R}$. Τότε τα σύνολα $E_n = E + r_n$ είναι ξένα ανά δύο. Επειδή $E_n \subset (-1,2)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, είναι $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset (-1,2)$. Θα αποδείξουμε ότι $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Αν $x \in I$, έστω $\xi \in [x]_\sim$, με $\xi \in E$. Τότε $|x - \xi| < 1$ και το $x - \xi = r_n \in \mathbb{Q}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή το $r_n \in (-1,1)$, το $x = \xi + r_n \in E_n$ και επομένως $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Άρα, $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.*

Από τον ορισμό του συνόλου E του Vitali, είτε το E δεν είναι μετρήσιμο ή $m(E) = 0$. Αν υποθέσουμε ότι $m(E) = 0$, επειδή $m(E_n) = m(E)$, θα είναι και $m(E_n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως, επειδή $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και το μέτρο Lebesgue m είναι σ-αθροιστικό, θα είναι

$$1 = m(I) \le m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = 0\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα, το E δεν είναι μετρήσιμο. Τότε όμως και τα ξένα ανά δύο σύνολα E_n δεν είναι μετρήσιμα. Επειδή $m^*(E_n) = m^*(E) > 0$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset (-1,2)$, είναι

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le 3 < +\infty = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)\,.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχουν σύνολα E_n στο $\mathbb{R}$ που είναι ξένα ανά δύο, δεν είναι μετρήσιμα και τέτοια ώστε

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)\,.$$

Πρόταση 2.79. *Θεωρούμε την ιδιάζουσα συνάρτηση Cantor-Lebesgue φ που ορίστηκε στην Πρόταση 1.33. Επεκτείνουμε τη φ σ' όλο το $\mathbb{R}$ θέτοντας $\varphi(x) = 0$ για $x < 0$ και $\varphi(x) = 1$ για $x > 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Πόρισμα 1.34) με*

$$F(x) := x + \varphi(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

η οποία είναι γνήσια αύξουσα, συνεχής και απεικονίζει το $[0,1]$ επί του $[0,2]$.

(i) Η F απεικονίζει το τριαδικό σύνολο Cantor C μέτρου μηδέν στο $F(C)$ που είναι ένα μετρήσιμο σύνολο θετικού μέτρου.

(ii) Η F απεικονίζει ένα μετρήσιμο σύνολο A, ένα υποσύνολο του τριαδικού συνόλου Cantor C, στο $F(A)$ που δεν είναι μετρήσιμο σύνολο.

Απόδειξη. (i) Επειδή η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής, η F απεικονίζει σύνολα Borel σε σύνολα Borel (βλέπε άσκηση 45). Το τριαδικό σύνολο Cantor C είναι κλειστό, δηλαδή σύνολο Borel, με $m(C) = 0$. Επομένως το $F(C)$ είναι σύνολο Borel και κατά συνέπεια Lebesgue μετρήσιμο. Μάλιστα το $F(C)$ είναι κλειστό σύνολο. Πράγματι, επειδή η F είναι είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής στο $[0,1]$, η F^{-1} είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής στο $[0,2]$. Επομένως το $F(C)$ είναι κλειστό σύνολο.

Από την κατασκευή του τριαδικού συνόλου Cantor (παράγραφος 1.2.1)

$$C = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)\,,$$

όπου $((a_n, b_n))$ είναι η ακολουθία των ανοικτών και ξένων ανά δύο διαστημάτων που αφαιρούνται κατά τη διαδικασία κατασκευής του C. Είναι $\sum_{n=1}^{\infty} m\left((a_n, b_n)\right) = 1$. Θα αποδείξουμε ότι $m(F(C)) = 1$.

Παρατηρούμε ότι $[0,1] \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ και $F\left((a_n, b_n)\right) = (a_n + \varphi(a_n), b_n + \varphi(b_n))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Στην Πρόταση 1.33 αποδείξαμε ότι η συνάρτηση φ είναι σταθερή σε κάθε ανοικτό διάστημα που αφαιρείται για την κατασκευή του τριαδικού συνόλου Cantor, δηλαδή $\varphi(a_n) = \varphi(b_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Τα ανοικτά διαστήματα $F((a_n, b_n))$ είναι ξένα ανά δύο και επομένως

$$\begin{aligned} m(F([0,1] \setminus C)) &= m\left(F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right)\right) \\ &= m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F((a_n, b_n))\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m(F((a_n, b_n))) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n + \varphi(a_n), b_n + \varphi(b_n))) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n)) = 1\,. \end{aligned}$$

Επειδή η F είναι $1-1$ με $F([0,1]) = [0,2]$, έχουμε

$$F([0,1] \setminus C) = F([0,1]) \setminus F(C) = [0,2] \setminus F(C)$$

και κατά συνέπεια

$$2 = m([0,2]) = m(F(C)) + m(F([0,1] \setminus C)) = m(F(C)) + 1\,.$$

Άρα $m(F(C)) = 1$.

(ii) Επειδή $m(F(C)) > 0$, από το Πόρισμα 2.75 υπάρχει ένα μη μετρήσιμο σύνολο $V \subset F(C)$. Αν $A := F^{-1}(V)$, τότε $A = F^{-1}(V) \subset C$ και επομένως $m(A) = 0$. Άρα το A είναι μετρήσιμο υποσύνολο του τριαδικού συνόλου Cantor C. Επειδή η συνάρτηση F είναι επί, έχουμε

$$F(A) = F\left(F^{-1}(V)\right) = V$$

και το $F(A) = V$ δεν είναι μετρήσιμο σύνολο.

□

Πρόταση 2.80. *Υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο, ένα υποσύνολο του τριαδικού συνόλου Cantor C, που δεν είναι ένα σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Το σύνολο $A = F^{-1}(V) \subset C$ που κατασκευάστηκε στην απόδειξη της Πρότασης 2.79 (ii) είναι ένα παράδειγμα Lebesgue μετρήσιμου συνόλου που δεν είναι Borel. Πράγματι, αν το A είναι σύνολο Borel, τότε και το σύνολο $F(A) = V$ θα είναι Borel(άσκηση 45). Άτοπο, επειδή το σύνολο V δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο. $\square$

2.7 Ασκήσεις

1. Έστω $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Αν $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{M}$, τότε
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \sum_{i_1<i_2} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots + (-1)^k \sum_{i_1<\cdots<i_k} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\ &\quad + \cdots + (-1)^n \mu(A_1 \cap \cdots \cap A_n)\,.\end{aligned}$$
Ο προηγούμενος τύπος μπορεί να γραφεί και ως εξής
$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1,\dots,i_k\} \subseteq \{1,\dots,n\}} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$
και
$$\mu(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1,\dots,i_k\} \subseteq \{1,\dots,n\}} \mu(A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k})\,.$$
Το άθροισμα είναι πάνω σε όλα τα υποσύνολα του $\{1, \dots, n\}$ με k στοιχεία.

2. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ένας χώρος πιθανότητας και έστω $(A_i)_{i \in I}$, $A_i \in \mathcal{A}$, μια οικογένεια ενδεχόμενων (μετρήσιμων συνόλων). Αν $B_i^0 = A_i$ και $B_i^1 = A_i^c = \Omega \setminus A_i$ για κάθε $i \in I$, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

   (α΄) Η οικογένεια $(A_i)_{i \in I}$ είναι ανεξάρτητη.

   (β΄) Για κάθε $\alpha \in \{0, 1\}^I$, η οικογένεια $(B_i^{\alpha_i})_{i \in I}$ είναι ανεξάρτητη.

3. Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων ενός συνόλου X. Αν
$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \text{ και } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \quad \text{ή} \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \text{ και } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A,$$

δείξτε ότι $\limsup A_n = \liminf A_n = A$, δηλαδή $\lim A_n = A$.

4. Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων ενός συνόλου X. Αν χ_{A_n} είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου A_n, δείξτε ότι

$$\underline{\lim}\, \chi_{A_n} = \chi_{\underline{\lim}\, A_n} \quad \text{και} \quad \overline{\lim}\, \chi_{A_n} = \chi_{\overline{\lim}\, A_n}\,.$$

Αν η ακολουθία (χ_{A_n}) συγκλίνει, τότε $\lim \chi_{A_n} = \chi_{\lim A_n}$.

5. Αν $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^m\right) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)\,.$$

6. Έστω (a_n) πραγματική ακολουθία και έστω $A_n := (-\infty, a_n)$.

   (α΄) Να αποδειχθεί ότι

$$(i) \quad (-\infty, \underline{\lim}\, a_n) \subseteq \underline{\lim}\, A_n \subseteq (-\infty, \underline{\lim}\, a_n]$$

   και

$$(ii) \quad (-\infty, \overline{\lim}\, a_n) \subseteq \overline{\lim}\, A_n \subseteq (-\infty, \overline{\lim}\, a_n]\,.$$

   (β΄) Αν $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$, να αποδειχθεί ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} a_n$ υπάρχει(μπορεί να ισούται και με $\pm\infty$). Να αποδειχθεί ότι γενικά το αντίστροφο δεν ισχύει.

7. Έστω $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων συνόλων.

   (α΄) Δείξτε ότι $\mu(\underline{\lim}\, A_n) \leq \underline{\lim}\, \mu(A_n)$.

   (β΄) Αν $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) < \infty$, τότε $\mu(\overline{\lim}\, A_n) \geq \overline{\lim}\, \mu(A_n)$.

   (γ΄) Αν $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) < \infty$, τότε $\lim \mu(A_n) = \mu(\lim A_n)$.

   (δ΄) Αν η ακολουθία (A_n) συγκλίνει, δηλαδή $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n$ και $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) < \infty$, τότε

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)\,.$$

8. Έστω $\mathfrak{M}$ μια σ-άλγεβρα στο X και $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο. Υποθέτουμε ότι (A_n) είναι μια αριθμήσιμη οικογένεια μετρήσιμων συνόλων με $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$ και $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mu(A_n) = \alpha \geq 0$. Δείξτε ότι το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε άπειρο το πλήθος A_n, δηλαδή το $\limsup A_n$, είναι μετρήσιμο και ότι $\mu(\limsup A_n) \geq \alpha$.

9. Έστω (a_n) ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Αν

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ \sum_{n\in A} a_n & A \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N}^*\right),\, A \neq \emptyset\,, \end{cases}$$

να αποδειχθεί ότι το $\mu : \mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right) \to [0,\infty]$ είναι ένα θετικό μέτρο.

10. Έστω (μ_n) μία αύξουσα ακολουθία θετικών μέτρων στη σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}$ του συνόλου X, δηλαδή $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ για κάθε $A \in \mathfrak{M}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Αν $\mu : \mathfrak{M} \to [0,\infty]$ με $\mu(A) := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \{\mu_n(A)\}$, να αποδειχθεί ότι το μ είναι ένα θετικό μέτρο.

11. Έστω X είναι ένα μη-αριθμήσιμο απειροσύνολο και

$$\mathfrak{M} = \{E \subseteq X :\ \text{το } E \text{ ή το } E^c \text{ είναι αριθμήσιμο}\}\ .$$

Ορίζουμε το $\mu : \mathfrak{M} \to [0,\infty]$ με

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{αν το } E \text{ είναι αριθμήσιμο} \\ 1 & \text{αν το } E^c \text{ είναι αριθμήσιμο}\ . \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου.

12. Έστω $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ χώρος μέτρου, έστω $E \in \mathfrak{M}$ με $\mu(E) < \infty$ και έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ορίζουμε

$$\mathcal{C}_n = \left\{A \in \mathcal{A} :\ \mu\left(A \cap E\right) \geq \frac{\mu(E)}{n}\right\}\ .$$

Αποδείξτε ότι το $\mathcal{C}_n$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Αν

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A} :\ \mu\left(A \cap E\right) \neq 0\}\ ,$$

αποδείξτε ότι το $\mathcal{C}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο απειροσύνολο.

13. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και έστω $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ συνάρτηση με $\mu(A) < +\infty$ για κάποιο $A \in \mathcal{A}$. Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ με $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Δηλαδή το μ είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο.

(ii) $\mu(\emptyset) = 0$ και $\forall A, B \in \mathcal{A}$: $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(iii) $\forall A, B \in \mathcal{A} : \mu(A \triangle B) + \mu(A \cap B) = \mu(A \cup B)$.

Αν το μ είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο, τότε για κάθε αριθμήσιμη οικογένεια (A_n) ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων είναι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

14. Έστω ο χώρος μέτρου $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mu)$, όπου μ είναι το *αριθμητικό μέτρο*. Δηλαδή

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{αν το } A \text{ είναι πεπερασμένο σύνολο} \\ \infty & \text{αν το } A \text{ είναι απειροσύνολο ,} \end{cases}$$

όπου $|A|$ είναι ο πληθάριθμος του A. Έστω $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \to [0, \infty]$ με

$$\nu(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mu\left(A \cap \{1, \ldots, n\}\right)$$

και έστω $\mathcal{A}$ η οικογένεια όλων των υποσυνόλων A του $\mathbb{N}^*$ για τα οποία το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mu\left(A \cap \{1, \ldots, n\}\right) \text{ υπάρχει.}$$

(α΄) Αν το A είναι πεπερασμένο σύνολο να αποδειχθεί ότι $\nu(A) = 0$.

(β΄) Να αποδειχθεί ότι το ν είναι πεπερασμένα αθροιστικό στην οικογένεια $\mathcal{A}$. Είναι το ν σ-αθροιστικό στην οικογένεια $\mathcal{A}$;

15. Έστω (μ_n) ακολουθία θετικών μέτρων στη σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}$ του συνόλου X και έστω (p_n) ακολουθία θετικών αριθμών.

(α΄) Αν $\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} p_n\mu_n(A)$, για κάθε $A \in \mathfrak{M}$, να αποδειχθεί ότι το $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} p_n\mu_n$ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}$.

(β΄) Αν τα (μ_n) είναι μέτρα πιθανότητας (δηλαδή $\mu_n(X) = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$) και $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$, να αποδειχθεί ότι το $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} p_n\mu_n$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στη σ-άλγεβρα $\mathfrak{M}$.

(γ΄) *Εφαρμογή*. Έστω τα θετικά μέτρα

$$\mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k\,, \quad \mu_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k\delta_k \quad \text{και} \quad \mu_3 = m\,,$$

όπου δ_k το μέτρο Dirac στο k και m το μέτρο Lebesgue. Θεωρούμε τα Lebesgue μετρήσιμα σύνολα

$$A_n = \left[n,\, n+1+\frac{1}{n^2}\right],\, n \in \mathbb{N}^*,\, B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \text{ και } B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Να υπολογιστούν τα μέτρα $\mu_i\left(A_n\right)$, $\mu_i\left(B_n\right)$ και $\mu_i\left(B\right)$, $i=1,2,3$.

16. Έστω $(X,\mathfrak{M},\mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $E_1 \triangle E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$ η συμμετρική διαφορά δύο μετρήσιμων συνόλων E_1 και E_2. Αν $\mu\left(E_1 \triangle E_2\right) = 0$, τότε ταυτίζουμε τα σύνολα E_1 και E_2. Να αποδειχθεί ότι ο (X,d) είναι ένας μετρικός χώρος με απόσταση την $d\left(E_1,E_2\right) = \mu\left(E_1 \triangle E_2\right)$.

17. Να κατασκευάσετε ένα υποσύνολο A του $[0,1]$, με τον ίδιο τρόπο που κατασκευάζεται το τριαδικό σύνολο Cantor, αφαιρώντας όμως από κάθε διάστημα που απομένει ένα ανοικτό υποδιάστημα που έχει το ίδιο μέσο με το διάστημα και του οποίου το μήκος είναι θ-φορές το μήκος του διαστήματος, $0<\theta<1$. Να αποδειχθεί ότι $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, όπου $m(A_k) = (1-\theta)^k$ και να συμπεράνετε ότι $m(A)=0$.

18. Να κατασκευαστεί ένα υποσύνολο A του $[0,1]$, με τον ίδιο τρόπο που κατασκευάζεται το τριαδικό σύνολο Cantor, όμως στο n-οστό βήμα για την κατασκευή του A_n αφαιρείται από κάθε διάστημα του A_{n-1} ένα ανοικτό υποδιάστημα που έχει το ίδιο μέσο με το διάστημα και του οποίου το μήκος είναι θ_n- φορές το μήκος του διαστήματος, $0<\theta_n<1$. Αν $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, να αποδειχθεί ότι $m(A) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-\theta_k)$ και να συμπεράνετε ότι $m(A)=0$ αν και μόνο αν $\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k = \infty$.

19. Έστω S το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο $[0,1]$ τέτοιο ώστε $x \in S$ αν και μόνο αν στο δεκαδικό ανάπτυγμα του x δεν εμφανίζεται το ψηφίο 6. Να αποδειχθεί ότι το S έχει μέτρο Lebesgue μηδέν.

20. Έστω $A, E \subseteq \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Αν το E είναι Lebesgue μετρήσιμο, χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$A \cap (a+E) = a + (A-a) \cap E\,, \quad A \cap (a+E)^c = a + (A-a) \cap E^c$$

και

$$A \cap aE = a\left((a^{-1}A) \cap E\right)\,, \quad A \cap (aE)^c = a\left((a^{-1}A) \cap E^c\right)\,,\; a \neq 0\,,$$

να αποδειχθεί ότι τα σύνολα $a + E$ και aE είναι Lebesgue μετρήσιμα, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

21. (α΄) Αν C είναι το τριαδικό σύνολο Cantor και $C + C \overset{\text{ορ.}}{=} \{x + y : x, y \in C\}$, να αποδειχθεί ότι $C + C = [0, 2]$.

    (β΄) Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα A και B του $\mathbb{R}$, με $m(A) = m(B) = 0$, τέτοια ώστε $A + B \overset{\text{ορ.}}{=} \{x + y : x \in A, \, y \in B\} = \mathbb{R}$.

    (*Υπόδειξη*. $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (C + n)$ και $B = C$.)

    Επομένως, αν δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$ έχουν μέτρο Lebesgue μηδέν, τότε δεν συνεπάγεται ότι και το άθροισμά τους θα έχει μέτρο μηδέν.

22. Έστω N ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $m(N) = 0$. Αν η παράγωγος της $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, να αποδειχθεί ότι $m\left(f(N)\right) = 0$.

    (*Υπόδειξη*. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $f|_{[-n,n]} : [-n, n] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz. Δηλαδή υπάρχει $M_n > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(y)| \leq M_n |x - y|$, για κάθε $x, y \in [-n, n]$.)

23. Αν $E \subseteq \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι $m^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}$, όπου το infimum το παίρνουμε πάνω σε όλα τα καλύμματα του E από αριθμήσιμες ενώσεις ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων I_n.

24. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ακολουθία ανοικτών συνόλων (G_n), με $G_n \supseteq E$, τέτοια ώστε $m^*(E) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)$.

25. (α΄) Έστω
$$E_n = \left(\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \, 1\right), \quad \alpha > 0 \, .$$
    Να αποδειχθεί ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και να υπολογιστεί το $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$.

    (β΄) Έστω
$$F_n = \left(\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + (n-1)^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \, 1\right), \quad \alpha > 0 \, .$$
    Να αποδειχθεί ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και να υπολογιστεί το $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right)$.

26. (α΄) Έστω $E_n = (x_n, a)$, όπου $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, με $x_0 = a > 1$. Να αποδειχθεί ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και να υπολογιστεί το $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$.

(β΄) Έστω

$$F_n = \left(\frac{n}{(n!)^{1/n}} \, , \, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \right) .$$

Να αποδειχθεί ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και να υπολογιστεί το $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right)$.

(γ΄) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $a_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \ln n$ είναι φθίνουσα και τέτοια ώστε $1/n \leq a_n \leq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως $\lim_{n\to\infty} a_n = \gamma$, όπου γ **είναι η σταθερά του Euler** ($\gamma = 0,577215\cdots$). Αν $G_n = (0, a_n)$, να αποδειχθεί ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και να υπολογιστεί το $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)$.

27. Έστω το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$.

(α΄) Αν το A δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο, δείξτε ότι για κάθε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $M \supset A$ είναι $m^*(M \setminus A) > 0$.

(β΄) Αν το A είναι Lebesgue μετρήσιμο με $m(A) < \infty$, δείξτε ότι για κάθε σύνολο $B \supset A$ είναι $m^*(B \setminus A) = m^*(B) - m(A)$.

28. Έστω A και B δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

(α΄) Αν το $G \subset \mathbb{R}$ είναι ανοικτό σύνολο τέτοιο ώστε $A \subseteq G$ και $B \cap G = \emptyset$, δείξτε ότι

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B) .$$

(β΄) Υποθέτουμε ότι τα A και B έχουν θετική απόσταση, δηλαδή

$$d(A,B) := \inf \{|x-y| : x \in A,\, y \in B\} > 0 .$$

Τότε

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B) .$$

29. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο G πυκνό στο $\mathbb{R}$ και τέτοιο ώστε $m(G) < \varepsilon$.

30. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, αν και μόνο αν

$$m^*([a,b]) = m^*([a,b] \cap E) + m^*([a,b] \cap E^c) ,$$

για κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$.

31. Έστω E_1, E_2 Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $[0, 1]$. Αν $m(E_1) = 1$, τότε $m(E_1 \cap E_2) = m(E_2)$.

32. Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $m(A) = 0$, να αποδειχθεί ότι για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι
$$m^*(A \cup B) = m^*(B \setminus A) = m^*(B).$$

33. Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $m^*(A) < \infty$. Αν το Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο A_1 του A είναι τέτοιο ώστε $m(A_1) = m^*(A)$, δείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο.

34. Έστω $E_j \subset (0, 1)$, $1 \leq j \leq n$, Lebesgue μετρήσιμα σύνολα με $\sum_{j=1}^{n} m(E_j) > n - 1$. Να αποδειχθεί ότι $m\left(\bigcap_{j=1}^{n} E_j\right) > 0$.
<u>Υπόδειξη</u>. Να αποδειχθεί ότι $m\left([0, 1] \setminus \bigcap_{j=1}^{n} E_j\right) < 1$.

35. Έστω (E_n) αριθμήσιμη οικογένεια Lebesgue μετρήσιμων συνόλων με $E_n \subseteq [0, 1]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Δείξτε ότι αν $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = \infty$, τότε
$$\sum_{\substack{k,n=1 \\ k \neq n}}^{\infty} m(E_k \cap E_n) = \infty.$$

36. Αν το Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο E του $[0, 1]$ είναι τέτοιο ώστε $m(E) = 1$, δείξτε ότι το E είναι πυκνό στο $[0, 1]$.
<u>Υπόδειξη</u>. Δείξτε ότι για κάθε μη κενό υποδιάστημα I του $[0, 1]$ είναι $I \cap E \neq \emptyset$.

37. Υποθέτουμε ότι $E \in \mathcal{M}$, δηλαδή το σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.
   (α΄) Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} m(E \cap [-n, n]) = m(E)$.
   (β΄) Αν $m(E) < \infty$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} m(E \setminus [-n, n]) = 0$.
   Δώστε ένα παράδειγμα συνόλου $E \in \mathcal{M}$ με $m(E) = +\infty$, τέτοιο ώστε
$$\lim_{n\to\infty} m(E \setminus [-n, n]) \neq 0.$$

38. (α΄) Να αποδειχθεί ότι κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο έχει θετικό μέτρο Lebesgue.
   (β΄) Να βρεθεί ένα σύνολο $A \subseteq [0, 1]$, τέτοιο ώστε $m^*(A) > 0$ και $m^*(A \cap I) < \ell(I)$, για όλα τα διαστήματα $I \subseteq [0, 1]$.

<u>Υπόδειξη</u>. (β΄) Το γενικευμένο σύνολο Cantor C_a, $0 < a < 1$, έχει θετικό μέτρο, είναι κλειστό και δεν περιέχει ανοικτά διαστήματα.

39. Έστω $c > 0$. Αν το Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ είναι τέτοιο ώστε $m(A \cap I) \geq c \cdot \ell(I)$ για κάθε διάστημα I του $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι $m(A^c) = 0$.

40. Υποθέτουμε ότι το Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ είναι τέτοιο ώστε

$$m(A \cap (a,b)) \leq \frac{b-a}{2},$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Δείξτε $m(A) = 0$.

41. Έστω $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και έστω

$$I_{k,n} := \left(r_n - \frac{1}{k2^{n+1}}, \, r_n + \frac{1}{k2^{n+1}} \right), \ A_k := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n} \ , \ \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}^* .$$

Αν $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, ποιο είναι το μέτρο Lebesgue του A; Είναι $A = \mathbb{Q}$;

Σημείωση. Είναι γνωστό ότι το σύνολο των άρρητων αριθμών $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$(προκύπτει εύκολα από το θεώρημα κατηγορίας του Baire).

42. (α΄) Αν E είναι ένα φραγμένο μετρήσιμο σύνολο με $m(E) > 0$, δείξτε ότι για κάθε $c \in (0, m(E))$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $A \subset E$ τέτοιο ώστε $m(A) = c$.

Υπόδειξη. Αν $E \subset [a, b]$, θεωρείστε τη συνάρτηση $f(x) := m(E \cap [a, x])$, $x \in [a, b]$.

(β΄) Αν E είναι ένα μετρήσιμο σύνολο με $0 < m(E) \leq \infty$, να αποδειχθεί ότι για κάθε $c \in (0, m(E))$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $A \subset E$ τέτοιο ώστε $m(A) = c$.

Υπόδειξη. Αν το E δεν είναι φραγμένο, θεωρείστε την αριθμήσιμη οικογένεια των φραγμένων και μετρήσιμων συνόλων $E_n := E \cap [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

43. Έστω $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και έστω $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(α΄) Δείξτε ότι υπάρχουν Lebesgue μετρήσιμα σύνολα $G, G_n \in \mathcal{M}$ τέτοια ώστε

$$A \subseteq G \,, \quad A_n \subseteq G_n \subseteq G$$

με

$$m^*(A) = m(G) \ \text{ και } \ m^*(A_n) = m(G_n) \,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^* .$$

(β΄) Δείξτε ότι

$$m^*(A) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \to \infty} m^*(A_n) \,.$$

44. Για $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a σταθερό, ορίζουμε την οικογένεια

$$\mathcal{T}_a := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \, A + a \in \mathfrak{B}\} \,,$$

όπου $A + a = \{x + a : \, x \in A\}$ και $\mathfrak{B}$ η Borel σ-άλγεβρα.

(α') Να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{T}_a$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$.

(β') Να αποδειχθεί ότι $\mathfrak{B} = \mathcal{T}_a$ (δηλαδή η Borel σ-άλγεβρα είναι αναλλοίωτη ως προς τη μεταφορά).

(γ') Για κάθε $A \in \mathfrak{B}$ θέτουμε $\mu(A) := m(A + a)$, όπου m είναι το μέτρο Lebesgue. Να αποδειχθεί ότι το μ είναι ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ και να συμπεράνετε ότι $m(A + a) = m(A)$, για κάθε $A \in \mathfrak{B}$.

45. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι $1 - 1$ και συνεχής. Αν

$$\mathfrak{M} = \{A \subseteq \mathbb{R} : f(A) \in \mathfrak{B}\} \,,$$

δείξτε ότι η $\mathfrak{M}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$ η οποία περιέχει τα σύνολα Borel. Δηλαδή η f απεικονίζει σύνολα Borel σε σύνολα Borel.

46. (α') Αν ένα τουλάχιστον από τα μη κενά κλειστά υποσύνολα F_1 και F_2 του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές, δείξτε ότι υπάρχουν $x^* \in F_1$, $y^* \in F_2$ τέτοια ώστε

$$d(F_1, F_2) = |x^* - y^*| = \inf \{|x - y| : \, x \in F_1, \, y \in F_2\} \,. \tag{2.14}$$

(β') Γενικά η (2.14) δεν ισχύει στην περίπτωση που και τα δύο κλειστά σύνολα F_1, F_2 δεν είναι συμπαγή.

47. Έστω το $A \subset [0, 1]$ είναι μετρήσιμο σύνολο με $m(A) > 0$. Τότε υπάρχουν $x', x'' \in A$, τέτοια ώστε $x' - x'' \in \mathbb{Q}$.

48. Δώστε ένα παράδειγμα φθίνουσας ακολουθίας (A_n) υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με $m^*(A_1) < \infty$ και

$$m^* \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) < \lim_{n \to \infty} m^*(A_n) \,.$$

Υπόδειξη. Στο Παράδειγμα 2.78 κατασκευάστηκε ακολουθία (E_n) ξένων ανά δύο και μη μετρήσιμων συνόλων με $E_n \subset (-1, 2)$ και

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) \, .$$

Κεφάλαιο 3

Μετρήσιμες Συναρτήσεις

3.1 Μετρήσιμες Συναρτήσεις

Το επεκταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\overline{\mathbb{R}}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ στο οποίο έχουμε προσθέσει δύο στοιχεία, το ∞ (ή $+\infty$) και το $-\infty$. Δηλαδή $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, ή, όπως συνήθως γράφεται, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Οι αλγεβρικές πράξεις ορίζονται ως εξής:

1. $\infty + \infty = \infty$ και $(-\infty) - \infty = -\infty$,

2. $(\pm\infty) \cdot \infty = \pm\infty$ και $(\pm\infty) \cdot (-\infty) = \mp\infty$,

3. $x + \infty = \infty$ και $x - \infty = -\infty$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

4. $x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty)$, αν $x > 0$ και $x \cdot (\pm\infty) = (\mp\infty)$, αν $x < 0$.

Οι πράξεις $\infty - \infty$ και $-\infty + \infty$ είναι απροσδιόριστες. Ορίζουμε

5. $0 \cdot \infty = 0$.

Επίσης,

6. $-\infty < x < \infty$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η ισότητα $a + b = a + c$ συνεπάγεται $b = c$ μόνο όταν $-\infty < a < \infty$. Επίσης, η ισότητα $ab = ac$ συνεπάγεται $b = c$ μόνο όταν $-\infty < a < \infty$, $a \neq 0$.

Ως γνωστόν, το σύνολο $\mathcal{U}$ των ανοικτών και φραγμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}$ αποτελεί μια **βάση περιοχών** της συνήθους τοπολογίας του $\mathbb{R}$. Δηλαδή, κάθε ανοικτό μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι ένωση στοιχείων του $\mathcal{U}$. Η βάση περιοχών του $\overline{\mathbb{R}}$ αποτελείται από τα διαστήματα της μορφής:

$$[-\infty, a)\,, \quad (a,b) \quad \text{και} \quad (b,\infty]\,, \quad a,b \in \mathbb{R}\,.$$

Ένα υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος διαστημάτων της παραπάνω μορφής. Παρατηρούμε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι της μορφής $\mathbb{R} \cap U$, όπου U ανοικτό υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$. Επομένως, η τοπολογία του $\overline{\mathbb{R}}$ που επάγεται στο $\mathbb{R}$ είναι η συνήθης τοπολογία του $\mathbb{R}$.

Μια συνάρτηση με πεδίο τιμών το $\overline{\mathbb{R}}$ λέγεται **επεκταμένη πραγματική συνάρτηση**.

Ορισμός 3.1.

1. *Έστω $E \in \mathcal{M}$. Η επεκταμένη συνάρτηση $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται* **Lebesgue μετρήσιμη** *ή απλά* **μετρήσιμη**, *αν*

$$f^{-1}(U) = \{x \in E : f(x) \in U\} \in \mathcal{M}\,,$$

δηλαδή το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι μετρήσιμο, για κάθε ανοικτό σύνολο U του $\overline{\mathbb{R}}$.

2. *Έστω $E \in \mathcal{B}$, δηλαδή το E είναι Borel μετρήσιμο σύνολο. Η επεκταμένη συνάρτηση $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται* **Borel μετρήσιμη** *, αν για κάθε ανοικτό σύνολο U του $\overline{\mathbb{R}}$ το $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}$.*

Επειδή κάθε Borel μετρήσιμο σύνολο είναι Lebesgue μετρήσιμο, μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Αν η συνάρτηση f έχει μιγαδικές τιμές, δηλαδή $f = \Re f + i\Im f$, η f είναι μετρήσιμη(αντίστοιχα, Borel μετρήσιμη) αν και μόνο αν το πραγματικό μέρος $\Re f$ και το φανταστικό μέρος $\Im f$ της f είναι μετρήσιμες(αντίστοιχα, Borel μετρήσιμες) πραγματικές συναρτήσεις.

Αν $E \in \mathcal{M}$, είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό σύνολο U είναι $f^{-1}(U) = E \cap V$, για κάποιο ανοικτό σύνολο V. Επειδή $E \cap V \in \mathcal{M}$, κάθε συνεχής συνάρτηση είναι μετρήσιμη. Ειδικά, οι σταθερές συναρτήσεις είναι μετρήσιμες.

Συμβολισμός: Έστω η συνάρτηση $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, έστω G υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ και έστω $a \in \mathbb{R}$. Συχνά θα συμβολίζουμε με $\{E : f \in G\}$ ή $\{f \in G\}$ το σύνολο $f^{-1}(G) = \{x \in E : f(x) \in G\}$. Επίσης θα συμβολίζουμε με $\{E : f < a\}$ ή $\{f < a\}$ το σύνολο $f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in E : f(x) < a\}$, με $\{E : f = a\}$ ή $\{f = a\}$ το σύνολο $f^{-1}(\{a\}) = \{x \in E : f(x) = a\}$ κλπ, ανάλογα με τις απαιτήσεις του προβλήματος.

Πρόταση 3.2. *Έστω η συνάρτηση $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, όπου το E είναι μετρήσιμο σύνολο. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(i) Η f είναι μετρήσιμη.

(ii) Αν I είναι ένα από τα ανοικτά διαστήματα (a, b), $(a, \infty]$ και $[-\infty, a)$ του $\overline{\mathbb{R}}$, το $f^{-1}(I)$ είναι μετρήσιμο σύνολο.

(iii) Για κάθε κλειστό σύνολο F του $\overline{\mathbb{R}}$ το $f^{-1}(F)$ είναι μετρήσιμο σύνολο.

(iv) Το $f^{-1}([a, \infty]) = \{x \in E : f(x) \geq a\}$ είναι μετρήσιμο σύνολο για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

(v) Το $f^{-1}((a, \infty]) = \{x \in E : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο σύνολο για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

(vi) Το $f^{-1}([-\infty, a]) = \{x \in E : f(x) \leq a\}$ είναι μετρήσιμο σύνολο για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

(vii) Το $f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in E : f(x) < a\}$ είναι μετρήσιμο σύνολο για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. $\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$ Είναι προφανές από τον Ορισμό 3.1.

$\underline{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Επειδή $f^{-1}(F) = \left(f^{-1}(F^c)\right)^c$, η απόδειξη προκύπτει απο το γεγονός ότι το F^c είναι ανοικτό σύνολο και επομένως είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος ανοικτών διαστημάτων του $\overline{\mathbb{R}}$.

$\underline{(iii) \Rightarrow (iv)}$ Είναι προφανές.

$\underline{(iv) \Rightarrow (v)}$ $\{E : f > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{E : f \geq a + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{M}$.

$\underline{(v) \Rightarrow (iv)}$ $\{E : f \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{E : f > a - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{M}$.

$\underline{(v) \Rightarrow (vi)}$ $\{E : f \leq a\} = E \setminus \{E : f > a\} \in \mathcal{M}$.

$\underline{(vi) \Rightarrow (v)}$ $\{E : f > a\} = E \setminus \{E : f \leq a\} \in \mathcal{M}$.

$\underline{(vi) \Rightarrow (vii)}$ $\{E : f < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{E : f \leq a - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{M}$.

$\underline{(vii) \Rightarrow (vi)}$ $\{E : f \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{E : f < a + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{M}$.

$(vii) \Rightarrow (i)$ Έχουμε αποδείξει ότι $f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{M}$ συνεπάγεται $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{M}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Τότε και $f^{-1}((a,b)) = f^{-1}((a,\infty]) \bigcap f^{-1}([-\infty, b)) \in \mathcal{M}$. Δηλαδή, $(vii) \Rightarrow (ii)$. Αν G είναι ένα ανοικτό σύνολο στο $\overline{\mathbb{R}}$, τότε το $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, όπου I_n είναι διαστήματα της μορφής (a, b), $(a, \infty]$ και $[-\infty, a)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Επομένως, $f^{-1}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n) \in \mathcal{M}$. Άρα, η f είναι μετρήσιμη. □

Αν μια συνάρτηση f είναι μετρήσιμη στο $E \in \mathcal{M}$, τότε είναι μετρήσιμη και σε κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E_1 του E. Πράγματι, επειδή για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\{x \in E_1 : f(x) > a\} = \{x \in E : f(x) > a\} \cap E_1 ,$$

το σύνολο $\{x \in E_1 : f(x) > a\}$ θα είναι μετρήσιμο.

Πόρισμα 3.3. *Έστω η $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη. Τότε, $\forall c \in \overline{\mathbb{R}}$ το σύνολο $\{x \in E : f(x) = c\}$ είναι μετρήσιμο.*

Απόδειξη. Αν $c \in \mathbb{R}$, τότε $\{E : f = c\} = \{E : f \geq c\} \cap \{E : f \leq c\} \in \mathcal{M}$. Επίσης, τα σύνολα

$$\{E : f = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{E : f \geq n\} \quad \text{και} \quad \{E : f = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{E : f \leq -n\}$$

είναι μετρήσιμα. □

Ας σημειωθεί ότι η συνάρτηση $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, όπου $E \in \mathcal{M}$, είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν τα σύνολα $A = \{x \in E : f(x) = \infty\}$, $B = \{x \in E : f(x) = -\infty\}$ είναι μετρήσιμα και ο περιορισμός της f στο σύνολο $E \setminus (A \cup B)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.
Η μετρησιμότητα του συνόλου $\{x : f(x) = c\}$, για κάθε $c \in \mathbb{R}$, δεν είναι ικανή συνθήκη για τη μετρησιμότητα της f.

Παράδειγμα 3.4. *Υποθέτουμε ότι το E είναι ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ (το σύνολο του Vitali στο $(0,1)$, βλέπε Παράδειγμα 2.78, είναι ένα τέτοιο σύνολο). Έστω η συνάρτηση f με*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in E\ , \\ -x & \text{αν } x \in [0,1] \setminus E\ . \end{cases}$$

Η f είναι $1-1$. Επομένως το $f^{-1}(\{c\})$, $c \in \mathbb{R}$, είναι είτε το κενό σύνολο ή ένα μονοσύνολο. Δηλαδή το $f^{-1}(\{c\})$ είναι μετρήσιμο. Όμως το $f^{-1}([0,1]) = E$ δεν είναι μετρήσιμο. Άρα, η f δεν είναι μετρήσιμη.

Ερώτημα 1: Έστω η συνάρτηση $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{M}$, είναι μετρήσιμη. Αν το σύνολο $A \subset E$ είναι μετρήσιμο, θα είναι το $f(A)$ μετρήσιμο σύνολο;

Γενικά, η απάντηση είναι όχι. Στην Πρόταση 2.79 η συνεχής και γνήσια αύξουσα συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απεικονίζει ένα μετρήσιμο υποσύνολο A του τριαδικού συνόλου Cantor C στο $F(A)$ που δεν είναι μετρήσιμο σύνολο.

Ερώτημα 2: Αν η συνάρτηση g είναι μετρήσιμη και το σύνολο A είναι μετρήσιμο, θα είναι η αντίστροφη εικόνα $g^{-1}(A)$ μετρήσιμο σύνολο;

Γενικά, η απάντηση είναι όχι. Όπως και προηγουμένως, έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνεχής και γνήσια αύξουσα συνάρτηση της Πρότασης 2.79. Αν $g = F^{-1}$, τότε η $g^{-1} = F$ απεικονίζει ένα μετρήσιμο υποσύνολο A του τριαδικού συνόλου Cantor C στο $g^{-1}(A) = F(A)$ που δεν είναι μετρήσιμο σύνολο.

Παράδειγμα 3.5. *Αν E είναι το σύνολο του Vitali, η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_E δεν είναι μετρήσιμη. Πιο γενικά, η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_A είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν το σύνολο A είναι μετρήσιμο. Υπενθυμίζεται ότι* **η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου** $A \subseteq \mathbb{R}$ *ορίζεται ως εξής*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in A\,, \\ 0 & \text{αν } x \notin A\,. \end{cases}$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$

$$\Big\{x \in \mathbb{R} : \chi_A(x) > a\Big\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{αν } a < 0\,, \\ A & \text{αν } 0 \le a < 1\,, \\ \emptyset & \text{αν } a \ge 1\,. \end{cases}$$

Επομένως το σύνολο $\Big\{x \in \mathbb{R} : \chi_A(x) > a\Big\}$ είναι μετρήσιμο αν και μόνο αν το σύνολο A είναι μετρήσιμο.

Έστω $A, B, A_1, \dots, A_n$ υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αναφέρουμε μερικές βασικές ιδιότητες της χαρακτηριστικής συνάρτησης η απόδειξη των οποίων είναι εύκολη.

1) $\chi_\emptyset = 0$ και $\chi_\mathbb{R} = 1$.

2) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$.

3) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B = \min\{\chi_A, \chi_B\}$.

4) $\chi_{A\cup B} = 1 - (1-\chi_A)(1-\chi_B) = \max\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$.

5) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_{A\cap B}$.

6) $\chi_{A\triangle B} = |\chi_A - \chi_B|$.

7) $\chi_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n} = \chi_{A_1}\chi_{A_2}\cdots\chi_{A_n}$ και $\chi_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n} = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1-\chi_{A_k})$.

8) Αν $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, όπου (A_n) είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τότε

$$\chi_A = \sum_{n=1}^\infty \chi_{A_n} .$$

Έστω P είναι η ιδιότητα που έχει (ή δεν έχει) ένα σημείο $x \in \mathbb{R}$. Αν $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μία συνάρτηση, P μπορεί να είναι η ιδιότητα "$f(x) < 0$". Επίσης, αν (f_n) είναι ακολουθία συναρτήσεων, P μπορεί να είναι η ιδιότητα " η $f_n(x)$ συγκλίνει ".

Ορισμός 3.6. *Λέμε ότι μια ιδιότητα P ισχύει* **σχεδόν παντού** **($\sigma.\pi.$)** *στο $A \subseteq \mathbb{R}$, αν υπάρχει $N \subset A$ τέτοιο ώστε $m^*(N) = 0$ και η P ισχύει σε κάθε σημείο του $A \setminus N$. Επομένως μια ιδιότητα P ισχύει $\sigma.\pi.$ στο $E \in \mathcal{M}$, αν υπάρχει σύνολο $N \subset E$ μέτρου μηδέν και η P ισχύει σε κάθε σημείο του $E \setminus N \in \mathcal{M}$.*

Έστω για παράδειγμα $f, g : E \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ δύο συναρτήσεις.

1. Είναι $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο E, αν $m^*(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

2. Είναι $f \geq g$ $\sigma.\pi.$ στο E, αν $m^*(\{x \in E : f(x) < g(x)\}) = 0$.

3. Η f είναι πεπερασμένη $\sigma.\pi.$ στο E, αν $m^*(\{x \in E : |f(x)| = \infty\}) = 0$.

4. Αν $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι ακολουθία συναρτήσεων, η $f_n \to f$ $\sigma.\pi.$ στο E, δηλαδή η ακολουθία (f_n) συγκλίνει στην f σχεδόν για όλα τα x στο E, αν $m^*(\{x \in E : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}) = 0$.

Πρόταση 3.7. *Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής σ.π. στο $E \in \mathcal{M}$, τότε η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $D \subset E$ είναι το σύνολο των σημείων του E στα οποία η f είναι ασυνεχής. Από την υπόθεση είναι $m(D) = 0$. Επομένως, τα σύνολα D και $E \setminus D$ είναι μετρήσιμα.

Έστω τώρα U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Επειδή ο περιορισμός της f στο $E \setminus D$ είναι συνεχής συνάρτηση, το $f^{-1}(U) \cap (E \setminus D)$ είναι ανοικτό σύνολο στο $E \setminus D$ και επομένως υπάρχει ανοικτό σύνολο V του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f^{-1}(U) \cap (E \setminus D) = (E \setminus D) \cap V$. Ειδικά το $f^{-1}(U) \cap (E \setminus D)$ θα είναι μετρήσιμο σύνολο. Επειδή το σύνολο $f^{-1}(U) \cap D$ έχει μέτρο μηδέν, θα είναι και αυτό μετρήσιμο. Επομένως, το

$$f^{-1}(U) = \left[f^{-1}(U) \cap (E \setminus D)\right] \cup \left[f^{-1}(U) \cap D\right]$$

είναι μετρήσιμο σύνολο. Άρα, η f είναι μετρήσιμη. □

Οι μονότονες συναρτήσεις είναι και αυτές μετρήσιμες. Πράγματι, από την Πρόταση 1.28 το σύνολο των σημείων στα οποία μία μονότονη συνάρτηση f είναι ασυνεχής είναι το πολύ αριθμήσιμο και επομένως έχει μέτρο μηδέν. Η f λοιπόν είναι συνεχής σ.π. και από το προηγούμενο πόρισμα θα είναι μετρήσιμη.

Πόρισμα 3.8. *Κάθε μονότονη συνάρτηση είναι μετρήσιμη.*

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες σχεδόν παντού, τότε είτε και οι δύο είναι μετρήσιμες ή και οι δύο είναι μη μετρήσιμες.

Πρόταση 3.9. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $E \in \mathcal{M}$. Αν η $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη και η $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι τέτοια ώστε $f = g$ σ.π. στο E, τότε και η g είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση, το σύνολο $N = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ έχει μέτρο μηδέν. Επειδή για κάθε $a \in \mathbb{R}$

$$\{x \in E : g(x) > a\} = [\{x \in E : f(x) > a\} \setminus N] \cup [\{x \in E : g(x) > a\} \cap N]$$

και κάθε σύνολο στο δεξιό μέλος είναι μετρήσιμο, το σύνολο $\{x \in E : g(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο. Δηλαδή η g είναι μετρήσιμη. □

Λόγω της Πρότασης 3.9, είναι φυσικό να επεκτείνουμε τον ορισμό της μετρησιμότητας και για συναρτήσεις που ορίζονται σχεδόν παντού σ' ένα μετρήσιμο σύνολο E. Έστω η συνάρτηση f ορίζεται στο $E \setminus N$ όπου $E \in \mathcal{M}$ και το $N \subset E$ έχει μέτρο μηδέν, δηλαδή η f ορίζεται $\sigma.\pi.$ στο E. Θα λέμε ότι η f είναι μετρήσιμη στο E αν είναι μετρήσιμη στο $E \setminus N$.
Γενικά, όπως θα δείξουμε και στο Παράδειγμα 3.11, η σύνθεση δύο μετρήσιμων συναρτήσεων δεν είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Όμως η σύνθεση συνεχούς συνάρτησης με μετρήσιμη συνάρτηση είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Πρόταση 3.10. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι πεπερασμένη $\sigma.\pi.$ στο $E \in \mathcal{M}$ και ότι η $g : f(E) \cap \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Αν η f είναι μετρήσιμη, τότε και η συνάρτηση $g \circ f$, που ορίζεται $\sigma.\pi.$ στο $E \in \mathcal{M}$, θα είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι πεπερασμένη παντού στο $E \in \mathcal{M}$ οπότε $f(E) \cap \mathbb{R} = f(E)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε ανοικτό σύνολο U στο $\mathbb{R}$, το $(g \circ f)^{-1}(U) = \{x \in E : g(f(x)) \in U\}$ είναι ένα μετρήσιμο σύνολο. Είναι

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right) .$$

Επειδή η g είναι συνεχής, το σύνολο $g^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο $f(E)$, δηλαδή $g^{-1}(U) = f(E) \cap G$, όπου το G είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$. Επομένως,

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(f(E) \cap G) = E \cap f^{-1}(G)$$

είναι ένα μετρήσιμο σύνολο. □

Ερώτημα 3: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $E \in \mathcal{M}$ και η $g : f(E) \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, η συνάρτηση $g \circ f$ θα είναι μετρήσιμη;

Γενικά, η απάντηση είναι όχι. Στην άσκηση 21 δίνουμε ένα παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης $g : [0,2] \to [0,1]$ και μετρήσιμης συνάρτησης $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, έτσι ώστε η $h \circ g$ να μην είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Παράδειγμα 3.11. *Κάθε πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο $I = [0,1]$ μπορεί να γραφεί σαν σύνθεση δύο Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων.*

Απόδειξη. Έστω $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$, όπου $a_n = 0$ ή 1, είναι το δυαδικό ανάπτυγμα του $x \in [0,1]$ (στην περίπτωση που έχουμε δύο αναπτύγματα, θα παίρνουμε εκείνο στο οποίο από κάποιο σημείο και μετά όλα τα a_n είναι 1). Ορίζουμε τη συνάρτηση $h : I \to I$, με

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}, \qquad a_n \in \{0,1\} \ .$$

Το $h(I)$ είναι ένα υποσύνολο του τριαδικού συνόλου Cantor C και επομένως έχει μέτρο Lebesgue μηδέν. Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι η h είναι γνήσια αύξουσα και επομένως Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Πράγματι, έστω $x, y \in I$, $x < y$. Τότε

$$x = 0, a_1 a_2 \cdots a_{N-1} a_N a_{N+1} \cdots \ , \qquad \text{(βάση 2)}$$

$$y = 0, a_1 a_2 \cdots a_{N-1} b_N b_{N+1} \cdots \ , \qquad \text{(βάση 2)}$$

όπου $a_n, b_n \in \{0,1\}$, με $a_n = b_n$ για $n < N$ και $a_N = 0$, $b_N = 1$. Δηλαδή

$$x = 0, a_1 a_2 \cdots a_{N-1} 0\, a_{N+1} \cdots \ , \qquad \text{(βάση 2)}$$

$$y = 0, a_1 a_2 \cdots a_{N-1} 1\, b_{N+1} \cdots \ , \qquad \text{(βάση 2)}$$

όπου $a_n, b_n \in \{0,1\}$. Από τον ορισμό της συνάρτησης h έχουμε

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2a_n}{3^n} + \frac{2\cdot 0}{3^N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n} \\ &\leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2a_n}{3^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2a_n}{3^n} + \frac{1}{3^N} \\ &< \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2a_n}{3^n} + \frac{2\cdot 1}{3^N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2b_n}{3^n} \\ &= h(y) \ . \end{aligned}$$

Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση $g : I \to \mathbb{R}$, με

$$g(x) = \begin{cases} f(h^{-1}(x)) & \text{αν } x \in h(I) \ , \\ 0 & \text{διαφορετικά} \ . \end{cases}$$

Δηλαδή, $g(x) = f(h^{-1}(x))\chi_{h(I)}(x)$. Επειδή η g είναι Lebesgue μετρήσιμη (γιατί;), έχουμε αποδείξει ότι $f(x) = g(h(x))$, όπου οι g, h είναι Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις στο I. □

Από το προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει ότι η σύνθεση δύο μετρήσιμων συναρτήσεων δεν είναι κατανάγκη μετρήσιμη συνάρτηση. Πράγματι, αν πάρουμε μια συνάρτηση f που δεν είναι μετρήσιμη στο $I = [0,1]$ (για παράδειγμα η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_E, όπου E είναι το σύνολο του Vitali στο I, δεν είναι μετρήσιμη στο I), η f είναι σύνθεση δύο μετρήσιμων συναρτήσεων.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι τόσο το άθροισμα όσο και το γινόμενο μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμες συναρτήσεις. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω χρήσιμο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.12. *Έστω η $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Αν οι συναρτήσεις f, g που ορίζονται στο $E \in \mathcal{M}$ είναι μετρήσιμες και σχεδόν παντού πεπερασμένες, τότε η $h : E \to \mathbb{R}$ με*

$$h(x) := F\,(f(x),\, g(x))$$

είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη. Επειδή από την υπόθεση το σύνολο $\{x \in E : f(x) = \pm\infty\} \cup \{x \in E : g(x) = \pm\infty\}$ έχει μέτρο μηδέν, λόγω της Πρότασης 3.9 μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f, g είναι πεπερασμένες. Επειδή για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $G_a := \{(u,v) : F(u,v) > a\}$ είναι ανοικτό, θα είναι $G_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, όπου $I_n = \{(u,v) : a_n < u < b_n,\ c_n < v < d_n\}$. Επομένως, για κάθε $a \in \mathbb{R}$

$$\{x \in E : h(x) > a\} = \{x \in E : (f(x), g(x)) \in G_a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : (f(x), g(x)) \in I_n\} ,$$

όπου

$$\{x \in E : (f(x), g(x)) \in I_n\} = \{x \in E : a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x \in E : c_n < g(x) < d_n\} \in \mathcal{M} .$$

Επομένως, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το $\{x \in E : h(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο σύνολο και κατά συνέπεια η h είναι μετρήσιμη συνάρτηση. □

Αν $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, ορίζουμε το θετικό μέρος f^+ και το αρνητικό μέρος f^- της f ως εξής:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{αν } f(x) < 0 , \end{cases} \quad \text{και} \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{αν } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{αν } f(x) > 0 . \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} , \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\} .$$

Οι f^+ και f^- έχουν μη αρνητικές τιμές. Αν η μία από τις f^+ και f^- δεν είναι μηδέν στο $x \in \mathbb{R}$, τότε η άλλη θα είναι μηδέν στο σημείο x. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$f = f^+ - f^- \quad \text{και} \quad |f| = f^+ + f^- .$$

Οι συναρτήσεις f^+ και f^- είναι πολύ χρήσιμες. Επειδή κάθε συνάρτηση γράφεται σαν διαφορά δύο μη αρνητικών συναρτήσεων, πολλές αποδείξεις γίνονται πιο απλές θεωρώντας μη αρνητικές συναρτήσεις.

Πρόταση 3.13. *Έστω οι συναρτήσεις f, g που ορίζονται στο $E \in \mathcal{M}$ είναι μετρήσιμες και σχεδόν παντού πεπερασμένες.*

(α΄) Η $af + bg$ είναι μετρήσιμη, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ (υποθέτουμε ότι η $af + bg$ δεν είναι της μορφής $+\infty + (-\infty)$ ή $-\infty + \infty$, δηλαδή ότι είναι καλά ορισμένη).

(β΄) Η $f \cdot g$ είναι μετρήσιμη (κάνουμε την παραδοχή $0 \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot 0 = 0$). Αν $g \neq 0$ σ.π. , τότε και η f/g είναι μετρήσιμη.

(γ΄) Αν $p > 0$, η $|f|^p$ είναι μετρήσιμη.

(δ΄) Οι συναρτήσεις f^- και f^+ είναι μετρήσιμες.

Απόδειξη. (α΄) Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα με $F(u, v) = au + bv$.

(β΄) Αν εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα με $F(u, v) = u \cdot v$, τότε η $f \cdot g$ είναι μετρήσιμη. Για να αποδείξουμε ότι η f/g είναι μετρήσιμη, παρατηρούμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned} \left\{E : \tfrac{f}{g} > a\right\} \cap \{E : g \neq 0\} &= [\{E : f - ag > 0\} \cap \{E : g > 0\}] \\ &\quad \cup [\{E : f - ag < 0\} \cap \{E : g < 0\}] \, . \end{aligned}$$

Όμως οι συναρτήσεις f, g είναι μετρήσιμες οπότε και τα σύνολα στο δεξιό μέλος της παραπάνω ισότητας θα είναι μετρήσιμα. Επομένως, το σύνολο

$$\left\{E : \tfrac{f}{g} > a\right\} \cap \{E : g \neq 0\}$$

είναι μετρήσιμο. Επειδή από την υπόθεση το σύνολο $\{E : g = 0\}$ έχει μέτρο μηδέν, το υποσύνολό του

$$\left\{E : \tfrac{f}{g} > a\right\} \cap \{E : g = 0\}$$

θα έχει μέτρο μηδέν και επομένως είναι ένα μετρήσιμο σύνολο. Τέλος, επειδή

$$\left\{E : \tfrac{f}{g} > a\right\} = \left[\left\{E : \tfrac{f}{g} > a\right\} \cap \{E : g \neq 0\}\right] \cup \left[\left\{E : \tfrac{f}{g} > a\right\} \cap \{E : g = 0\}\right]$$

και το σύνολο $\left\{E : \frac{f}{g} > a\right\}$ θα είναι μετρήσιμο. Άρα, η f/g είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Για μια διαφορετική απόδειξη παραπέμπουμε και στην άσκηση 24.

(γ΄) Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα με $F(u, v) = |v|^p$ ή την Πρόταση 3.10 με $g(x) = |x|^p$.

(δ') Επειδή $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ και $f^- = \frac{|f|-f}{2}$, οι f^+ και f^- είναι μετρήσιμες.

□

Πόρισμα 3.14. *Αν οι συναρτήσεις $f, g : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες, $E \in \mathcal{M}$, τότε τα σύνολα*

$$\{x \in E : f(x) > g(x)\}\ , \quad \{x \in E : f(x) \geq g(x)\} \quad \textit{και} \quad \{x \in E : f(x) = g(x)\}\ ,$$

είναι μετρήσιμα.

Πρόταση 3.15. *Αν (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που ορίζονται στο $E \in \mathcal{M}$, τότε οι συναρτήσεις*

$$\max_{n\leq k} f_n, \quad \min_{n\leq k} f_n, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}^*} f_n, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}^*} f_n, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n \quad \textit{και} \quad \liminf_{n\to\infty} f_n$$

είναι μετρήσιμες.

Απόδειξη. (i) Επειδή για κάθε $a \in \mathbb{R}$

$$\left\{x \in E : \left(\max_{n\leq k} f_n\right)(x) > a\right\} = \bigcup_{n=1}^{k} \{x \in E : f_n(x) > a\}\ ,$$

η συνάρτηση $\max\limits_{n\leq k} f_n$ είναι μετρήσιμη.

(ii) Είναι $\min\limits_{n\leq k} f_n = -\max\limits_{n\leq k}(-f_n)$ οπότε και η συνάρτηση $\min\limits_{n\leq k} f_n$ είναι μετρήσιμη.

(iii) Επειδή για κάθε $a \in \mathbb{R}$

$$\left\{x \in E : \left(\sup_{n\in\mathbb{N}^*} f_n\right)(x) > a\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f_n(x) > a\}\ ,$$

η $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(iv) Είναι $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n = -\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-f_n)$ οπότε και η $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(v) Από τις (*iii*) και (*iv*), η $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\sup\limits_{k\geq n} f_k\right)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(vi) Επειδή $\liminf_{n\to\infty} f_n = -\limsup_{n\to\infty}(-f_n)$, η $\liminf_{n\to\infty} f_n$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

□

Πόρισμα 3.16. *Αν η ακολουθία των μετρήσιμων συναρτήσεων (f_n) που ορίζονται στο $E \in \mathcal{M}$ συγκλίνει(σημειακά) στην f, τότε η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση.*

Απόδειξη. Επειδή $f = \lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$, από την προηγούμενη πρόταση η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση. □

Πόρισμα 3.17. *Αν η ακολουθία των μετρήσιμων συναρτήσεων (f_n) που ορίζονται στο $E \in \mathcal{M}$ συγκλίνει στην f σ.π., τότε η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση.*

Απόδειξη. Έστω $A \subset E$, με $m(A) = 0$, τέτοιο ώστε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, για κάθε $x \in E \setminus A$. Τότε η $(f_n \cdot \chi_{E\setminus A})$ είναι μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων η οποία συγκλίνει στη $g = f \cdot \chi_{E\setminus A}$, για κάθε $x \in E$. Επομένως, από το προηγούμενο πόρισμα η $g = f \cdot \chi_{E\setminus A}$ είναι μετρήσιμη. Επειδή $g = f$ *σ.π.*, τότε και η f θα είναι μετρήσιμη. □

Παράδειγμα 3.18. *(α') Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παντού ασυνεχής και η οποία ισούται σχεδόν παντού με μία συνεχή συνάρτηση.*

(β') Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παντού συνεχής, εκτός από ένα σημείο, και η οποία δεν ισούται σχεδόν παντού με καμία συνεχή συνάρτηση.

Λύση.

(α') Η $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ είναι παντού ασυνεχής και επειδή $m(\mathbb{Q}) = 0$, είναι $f = 0$ *σ.π.* Δηλαδή η f είναι ίση *σ.π.* με τη συνεχή συνάρτηση $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(β') Αν $f = \chi_{(0,\infty)}$, η f είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Δηλαδή, η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παντού συνεχής εκτός από ένα σημείο. Αν η συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν περιέχει τα σημεία 0 και 1 στο πεδίο τιμών της, τότε προφανώς $f(x) \neq g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η συνεχής συνάρτηση g περιέχει μόνο το 0 ή μόνο το 1 στο πεδίο τιμών της, επειδή $m((0,\infty)) =$

$m((-\infty, 0]) = \infty$, η f δεν ισούται σχεδόν παντού με τη g. Έστω $\{0, 1\} \subset g(\mathbb{R})$. Τότε από το θεώρημα Bolzano ή ενδιάμεσης τιμής και το διάστημα $[0, 1] \subset g(\mathbb{R})$. Επομένως το $I = (0, 1) \subset g(\mathbb{R})$ και το σύνολο $U = g^{-1}(0, 1)$ είναι ανοικτό, οπότε $m(U) > 0$. Επειδή $f(x) \neq g(x)$, $\forall x \in U$, δεν είναι $f = g$ σχεδόν παντού. Άρα, δεν είναι $f = g$ σχεδόν παντού.

■

Παράδειγμα 3.19. *Έστω (f_k) μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων οι οποίες είναι ορισμένες σ' ένα μετρήσιμο σύνολο E με $m(E) < +\infty$. Αν $|f_k(x)| \leq M_x < +\infty$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $x \in E$, να αποδειχθεί ότι για $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $F \subset E$ και ένα $M > 0$ τέτοια ώστε $m(E \setminus F) < \varepsilon$ και $|f_k(x)| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $x \in F$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ορίζουμε τα σύνολα

$$E_n := \{x \in E : |f_k(x)| \leq n\,, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}^*\}\ .$$

Τότε, $E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in E : |f_k(x)| \leq n\}$. Όμως κάθε f_k είναι μετρήσιμη συνάρτηση και επομένως το E_n, που είναι τομή αριθμήσιμου το πλήθος μετρήσιμων συνόλων, θα είναι μετρήσιμο σύνολο. Επειδή $E_n \nearrow E$, είναι $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(E)$. Δηλαδή υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $m(E \setminus E_n) = m(E) - m(E_n) < \varepsilon/2$, για κάθε $n \geq n_0$ (επειδή $m(E) < +\infty$, είναι $m(E \setminus E_n) = m(E) - m(E_n)$). Από το Θεώρημα 2.61 (iii) υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subset E_{n_0}$ με $m(E_{n_0} \setminus F) < \varepsilon/2$. Επομένως

$$m(E \setminus F) = m((E \setminus E_{n_0}) \cup (E_{n_0} \setminus F)) = m(E \setminus E_{n_0}) + m(E_{n_0} \setminus F) < \varepsilon\,.$$

Αν $M = n_0$, για κάθε $x \in F$ έχουμε ότι $x \in E_{n_0}$ και συνεπώς $|f_k(x)| \leq M$, για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$.
Σημείωση. Επειδή από την υπόθεση $|f_k(x)| \leq M_x < +\infty$, για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $x \in E$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $E_{n_1} \neq \emptyset$. Επομένως και $E_n \neq \emptyset$, για κάθε $n \geq n_1$. □

3.2 Ακολουθίες Μετρήσιμων Συναρτήσεων

Ορισμός 3.20. *Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων ορισμένων στο σύνολο $E \in \mathcal{M}$. Λέμε ότι* **η** (f_n) **συγκλίνει στο** E **σχεδόν ομοιόμορφα στην** f*, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $E_1 \subset E$ τέτοιο ώστε $m(E \setminus E_1) < \varepsilon$ και η (f_n) συγκλίνει στο E_1 ομοιόμορφα στην f.*

Πρόταση 3.21. *Έστω $E \in \mathcal{M}$, με $m(E) < \infty$ και έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει σ.π. στο E στη συνάρτηση f που είναι πεπερασμένη σ.π. Τότε για κάθε $\varepsilon, \delta > 0$ υπάρχει $E_\varepsilon \in \mathcal{M}$ και $n_0(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}^*$, τέτοια ώστε*

(i) $E_\varepsilon \subset E$, *με* $m(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$.

(ii) $|f_n(x) - f(x)| < \delta$, *για κάθε* $n \geq n_0$ *και κάθε* $x \in E_\varepsilon$.

Απόδειξη. Αν $A = \{x \in E : |f(x)| = \infty\}$ και $B = \{x \in E : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}$ τότε $m(A) = m(B) = 0$. Θεωρούμε το σύνολο $G := E \setminus A \cup B$. Τότε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, για κάθε $x \in G$ και $|f(x)| \neq \infty$. Έστω

$$E_k := \{x \in G : |f_n(x) - f(x)| < \delta, \forall n \geq k\} \ .$$

Τα $E_k \in \mathcal{M}$ και $E_k \subset E_{k+1}$. Τότε, η ακολουθία των μετρήσιμων συνόλων $(G \setminus E_k)$ είναι φθίνουσα, δηλαδή $G \setminus E_k \supset G \setminus E_{k+1}$ και $\bigcap_{k=1}^\infty (G \setminus E_k) = G \setminus \bigcup_{k=1}^\infty E_k = \emptyset$. Επειδή $m(G \setminus E_k) \leq m(G) < \infty$, είναι

$$\lim_{k\to\infty} m(G \setminus E_k) = m(\emptyset) = 0 \, .$$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $m(G \setminus E_{n_0}) < \varepsilon$. Αν θέσουμε $E_\varepsilon := E_{n_0}$, τότε είναι $E_\varepsilon \subset G \subset E$, με $m(G \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$. Επιπλέον, για κάθε $x \in E_\varepsilon$ είναι

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta, \ \forall\, n \geq n_0 \, .$$

Τότε όμως $E \setminus E_\varepsilon = (G \cup A \cup B) \setminus E_\varepsilon = (G \setminus E_\varepsilon) \cup (A \setminus E_\varepsilon) \cup (B \setminus E_\varepsilon)$, οπότε $m(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$. □

Θεώρημα 3.22 (Egorov). *Έστω $E \in \mathcal{M}$ με $m(E) < \infty$ και έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει σ.π. στο E στη συνάρτηση f που είναι πεπερασμένη σ.π. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $E_\varepsilon \in \mathcal{M}$, $E_\varepsilon \subset E$, τέτοιο ώστε*

(i) $m(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, *ομοιόμορφα στο* E_ε.

Δηλαδή, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *σχεδόν ομοιόμορφα στο* E.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την Πρόταση 3.21, για $\delta = 1/k$ υπάρχει $E_k \subset E$, $E_k \in \mathcal{M}$ και $n_k \in \mathbb{N}^*$ τέτοια ώστε

$$m(E \setminus E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k} \text{ και } |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}, \quad \forall x \in E_k \text{ και } \forall n \geq n_k\,.$$

Έστω $E_\varepsilon := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. Τότε

$$m(E \setminus E_\varepsilon) = m\left(E \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E \setminus E_k)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E \setminus E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon\,.$$

Επίσης, για κάθε k είναι $|f_n(x) - f(x)| < 1/k$, για κάθε $x \in E_\varepsilon$ και για κάθε $n \geq n_k$. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ ομοιόμορφα στο } E_\varepsilon\,.$$

□

Το αντίστροφο του θεωρήματος Egorov ισχύει.

Πρόταση 3.23. *Αν* $m(E) < \infty$ *και* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *σχεδόν ομοιόμορφα στο* E, *τότε* $f_n \longrightarrow f$ *σ.π. στο* E.

Απόδειξη. Από την υπόθεση, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $F_n \in \mathcal{M}$, τέτοιο ώστε $m(F_n) < 1/n$ και η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $E \setminus F_n$. Αν $F := \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, τότε $m(F) = 0$ και για $x \in E \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus F_n)$ είναι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Δηλαδή, $f_n \longrightarrow f$ *σ.π.* στο E. □

Γενικά, το θεώρημα του Egorov δεν ισχύει αν $m(E) = \infty$ ή όταν η f δεν είναι πεπερασμένη *σ.π.*

Παράδειγμα 3.24. *Έστω* $f_n = \chi_{(n,\infty)}$. *Οι* f_n *ορίζονται στο* $\mathbb{R}$ *και είναι μετρήσιμες. Είναι* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. *Όμως, η* (f_n) *δεν συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα.*

3.3 Προσέγγιση των Μετρήσιμων Συναρτήσεων

Οι μετρήσιμες συναρτήσεις χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι είναι όρια απλών συναρτήσεων.

Ορισμός 3.25. *Μια συνάρτηση ορισμένη στο $E \in \mathcal{M}$ λέγεται* **απλή** *αν είναι μετρήσιμη και το πεδίο τιμών της είναι ένα πεπερασμένο σύνολο πραγματικών αριθμών.*

Για παράδειγμα, οι σταθερές συναρτήσεις καθώς επίσης και οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις είναι απλές. Σημειώνεται ότι οι απλές συναρτήσεις είναι φραγμένες.

Πρόταση 3.26. *Μία συνάρτηση f ορισμένη στο $E \in \mathcal{M}$ είναι απλή, αν και μόνο αν υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος μετρήσιμα υποσύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ του E και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}(x)\,.$$

Απόδειξη. Έστω η f είναι απλή. Αν $c_1, c_2, \ldots, c_n$ είναι οι τιμές της f, διάφορες ανά δύο και διάφορες του μηδενός, ορίζουμε τα σύνολα $A_k = \{x \in E : f(x) = c_k\}$, $k = 1, \ldots, n$. Τότε ως γνωστόν τα $A_k \in \mathcal{M}$ και προφανώς

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}(x)\,.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}(x)$, όπου $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$ και τα $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Αν $x \in E$, τότε $f(x)$ είναι το άθροισμα εκείνων των a_k για τα οποία $x \in A_k$. Επομένως το πεδίο τιμών της f δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα από 2^n στοιχεία, δηλαδή είναι πεπερασμένο. Επίσης η f είναι μετρήσιμη επειδή είναι γραμμικός συνδυασμός μετρήσιμων συναρτήσεων. $\square$

Παρατήρηση 3.27. *Γενικά, η παράσταση της απλής συνάρτησης $f : E \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}$, στη μορφή $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ δεν είναι μοναδική. Αν όμως τα $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ είναι διάφορα ανά δύο και διάφορα του μηδενός, τότε η παράσταση*

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}\,,$$

όπου $A_k = \{x \in E : f(x) = a_k\}$, είναι μοναδική και λέγεται **κανονική παράσταση της απλής συνάρτησης** *f. Τα σύνολα A_k είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο.*

Υποθέτουμε ότι η μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη στο μετρήσιμο σύνολο E, δηλαδή υπάρχει $M \geq 0$ τέτοιο ώστε $|f| \leq M$ στο E. Τότε το πεδίο τιμών της f περιέχεται σ' ένα ανοικτό και φραγμένο διάστημα (c, d). Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τη διαμέριση $P = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ του κλειστού και φραγμένου διαστήματος $[c, d]$ με $\|P\| = \max\{y_k - y_{k-1} : 1 \leq k \leq n\} < \varepsilon$. Αν

$$I_k = [y_k - y_{k-1}) \text{ και } E_k = f^{-1}(I_k) = \{x \in E : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}, \; 1 \leq k \leq n,$$

τα E_k είναι μετρήσιμα υποσύνολα του E. Ορίζουμε τις απλές συναρτήσεις s_ε και t_ε με

$$s_\varepsilon := \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\chi_{E_k} \quad \text{και} \quad t_\varepsilon := \sum_{k=1}^{n} y_k\chi_{E_k}.$$

Επειδή $f(E) \subseteq (c, d)$, υπάρχει μοναδικό k, $1 \leq k \leq n$, τέτοιο ώστε $y_{k-1} \leq f(x) < y_k$ και επομένως

$$s_\varepsilon(x) = y_{k-1} \leq f(x) < y_k = t_\varepsilon(x).$$

Επειδή $y_k - y_{k-1} < \varepsilon$, έχουμε αποδείξει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.28. *Υποθέτουμε ότι η μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη στο μετρήσιμο σύνολο E. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν απλές συναρτήσεις s_ε και t_ε ορισμένες στο E, τέτοιες ώστε*

$$s_\varepsilon \leq f \leq t_\varepsilon \text{ και } 0 \leq t_\varepsilon - s_\varepsilon < \varepsilon \text{ στο } E.$$

Αν η ακολουθία (s_n) απλών συναρτήσεων ορισμένων στο μετρήσιμο σύνολο E συγκλίνει στη συνάρτηση f, από το Πόρισμα 3.16 έπεται ότι και η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Είναι αξιοσημείωτο ότι και το αντίστροφο ισχύει.

Θεώρημα 3.29. *Υποθέτουμε ότι η $f : E \to [0, \infty]$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, όπου $E \in \mathcal{M}$. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών απλών συναρτήσεων (s_n) στο E, με*

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots \leq f\,,$$

η οποία συγκλίνει σημειακά στην f. Δηλαδή $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$, για κάθε $x \in E$. Η (s_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f σε κάθε μετρήσιμο υποσύνολο του E στο οποίο η f είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών απλών συναρτήσεων (s_n) στο E με $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$. Η ιδέα οφείλεται στον Lebesgue: Διαμερίζουμε το πεδίο τιμών της f. Επειδή $f(E) \subseteq [0, \infty]$, διαμερίζουμε το $[0, \infty]$:

$$[0, \infty] = [0, 1) \cup [1, 2) \cup \cdots \cup [n-1, n) \cup [n, \infty]$$

και μετά διαμερίζουμε καθένα από τα διαστήματα $[j-1, j)$, $1 \leq j \leq n$, σε 2^n υποδιαστήματα ξένα ανά δύο. Δηλαδή, διαμερίζουμε το διάστημα $[0, n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, σε $n \cdot 2^n$ ξένα ανά δύο υποδιαστήματα

$$[0, n) = \left[0, \frac{1}{2^n}\right) \cup \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right) \cup \cdots \cup \left[\frac{n\cdot 2^n - 1}{2^n}, n\right)\,.$$

Στη συνέχεια, για $n \in \mathbb{N}^*$ και $1 \leq k \leq n \cdot 2^n$ ορίζουμε τα σύνολα

$$E_{n,k} := f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)\right) = \left\{x \in E : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\right\}$$

και

$$F_n := f^{-1}([n, \infty]) = \{x \in E : f(x) \geq n\}\,.$$

Τα σύνολα $E_{n,k}$ και F_n είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο. Επομένως οι απλές συναρτήσεις s_n, με

$$s_n := n\chi_{F_n} + \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n}\chi_{E_{n,k}}\,,$$

είναι μετρήσιμες. Από τον ορισμό προκύπτει ότι

$$0 \leq s_n \leq f$$

και

$$\begin{aligned} 0 \le f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}\,, &\qquad \text{αν } f(x) < n \\ s_n(x) = n\,, &\qquad \text{αν } f(x) \ge n\,. \end{aligned}$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ για κάθε $x \in E$ (ας σημειωθεί ότι στο σύνολο $\{x \in E : f(x) = \infty\}$ είναι $s_n(x) = n$).

Αν τώρα $0 \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in E' \subseteq E$, όπου $E' \in \mathcal{M}$, τότε για κάθε $n > M$ θα είναι $0 \le f(x) < n$ για κάθε $x \in E'$. Επομένως

$$0 \le f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}, \text{ για κάθε } x \in E' \text{ και για κάθε } n > M\,.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \text{ ομοιόμορφα στο } E'\,.$$

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι η (s_n) είναι αύξουσα. Παρατηρούμε ότι

$$E_{n,k} = \left\{ x \in E : \frac{k-1}{2^n} \le f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} = E_{n+1,2k-1} \cup E_{n+1,2k}\,.$$

Κάθε $x \in E$ ανήκει σ' ένα από τα σύνολα $E_{n+1,2k-1}$, $E_{n+1,2k}$ και F_n.

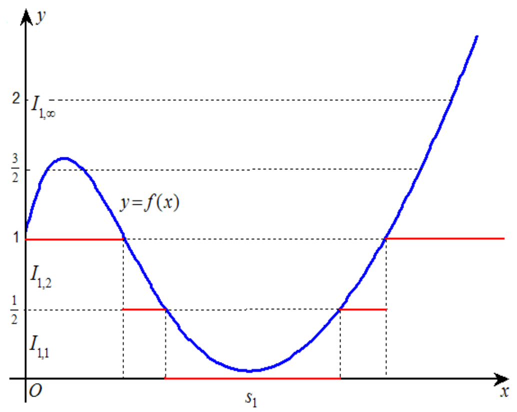
(i) Αν $x \in E_{n+1,2k-1}$, είναι $s_{n+1}(x) = \frac{2k-2}{2^{n+1}} = \frac{k-1}{2^n} = s_n(x)$.

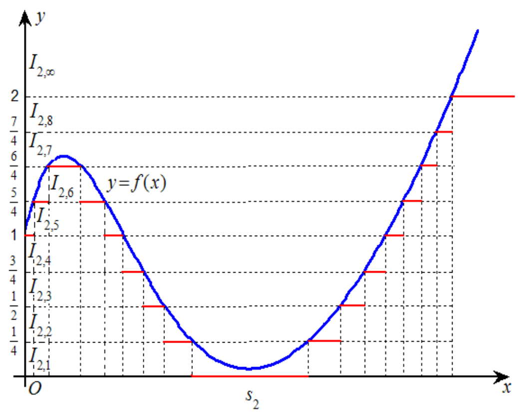
(ii) Αν $x \in E_{n+1,2k}$, είναι $s_{n+1}(x) = \frac{2k-1}{2^{n+1}} > \frac{k-1}{2^n} = s_n(x)$.

(iii) Τέλος, αν το x δεν ανήκει σε κανένα από τα $E_{n,k}$, τότε $x \in F_n$ και επομένως $s_n(x) = n$. Τότε $x \in F_{n+1}$ ή $x \in E_{n+1,j}$ για κάποιο $j > n2^{n+1}$ ($j \le (n+1)2^{n+1}$), οπότε $s_{n+1}(x) \ge n = s_n(x)$.

Άρα, $s_n(x) \le s_{n+1}(x)$ για κάθε $x \in E$.

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε κατασκευάσει τους δύο πρώτους όρους s_1 και s_2 της ακολουθίας απλών συναρτήσεων (s_n) (η συνεχής συνάρτηση $y = f(x)$ προσεγγίζεται από τις απλές συναρτήσεις).





Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$I_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) , \ k = 1, \ldots, n \cdot 2^n \quad \text{και } I_{n,\infty} = [n, \infty) .$$

□

Στη γενική περίπτωση που το πεδίο τιμών της μετρήσιμης συνάρτησης f είναι το $[-\infty, \infty]$, θεωρούμε τις συναρτήσεις $f^+ = \max\{f, 0\}$ και $f^- = -\min\{f, 0\}$. Τότε $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ και οι f^+, f^- είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες συναρτήσεις. Από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχουν ακολουθίες μη αρνητικών απλών συναρτήσεων (s_n') και (s_n'') στο E με

$$0 \le s_1' \le s_2' \le \cdots \le s_n' \le \cdots \le f^+ , \quad 0 \le s_1'' \le s_2'' \le \cdots \le s_n'' \le \cdots \le f^-$$

και $\lim_{n\to\infty} s_n' = f^+$, $\lim_{n\to\infty} s_n'' = f^-$. Αν $s_n = s_n' - s_n''$, η (s_n) είναι ακολουθία απλών συναρτήσεων στο E με $\lim_{n\to\infty} s_n = f$. Για $x \in E$ παρατηρούμε ότι είτε $s_n'(x) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ή $s_n''(x) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

$$s_n^+ = s_n' , \quad s_n^- = s_n'' \quad \text{και} \quad |s_n| = s_n' + s_n'' .$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πόρισμα 3.30. *Έστω η $f : E \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, όπου $E \in \mathcal{M}$. Τότε υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων (s_n) με*

$$0 \le |s_1| \le |s_2| \le \cdots \le |s_n| \le \cdots \le |f| ,$$

τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$, *για κάθε* $x \in E$. *Επιπλέον,* $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ *ομοιόμορφα σε κάθε μετρήσιμο υποσύνολο του* E *στο οποίο η* $|f|$ *είναι φραγμένη.*

Πόρισμα 3.31. *Έστω* E *μετρήσιμο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$.

(α΄) *Η συνάρτηση* $f : E \to [-\infty, \infty]$ *είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν είναι όριο ακολουθίας απλών συναρτήσεων στο* E.

(β΄) *Η συνάρτηση* $f : E \to [-\infty, \infty]$ *είναι φραγμένη και μετρήσιμη αν και μόνο αν είναι το ομοιόμορφο όριο ακολουθίας απλών συναρτήσεων στο* E.

Απόδειξη. (α΄) Αν η συνάρτηση f είναι μετρήσιμη, από το Πόρισμα 3.30 η f είναι όριο ακολουθίας απλών συναρτήσεων στο E. Αντίστροφα, αν η f είναι όριο ακολουθίας απλών συναρτήσεων, από το Πόρισμα 3.16 η f θα είναι μετρήσιμη.

(β΄) Αν η συνάρτηση f είναι φραγμένη και μετρήσιμη, από το Πόρισμα 3.30 η f είναι το ομοιόμορφο όριο ακολουθίας απλών συναρτήσεων στο E. Αντίστροφα, αν η f είναι το ομοιόμορφο όριο ακολουθίας απλών συναρτήσεων, από το Πόρισμα 3.16 η f θα είναι μετρήσιμη. Επίσης η f θα είναι και φραγμένη. Πράγματι, εύκολα αποδεικνύεται ότι αν μια ακολουθία (s_n) φραγμένων συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση f στο E, τότε η f είναι φραγμένη.

□

3.4 Ασκήσεις

1. Έστω (E_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

   (i) Αν $m(E_n) < \frac{1}{2^n}$, δείξτε ότι $\chi_{E_n} \longrightarrow 0$ $\sigma.\pi.$

   (ii) Να αποδειχθεί ότι η συνθήκη $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = 0$ δεν είναι ικανή για να ισχύει

$$\chi_{E_n} \longrightarrow 0 \ \sigma.\pi\,.$$

Υπόδειξη. (i) Αν $F_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n$ και $F = \bigcap_{N=1}^{\infty} F_N$, τότε

$$m(F) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \chi_{E_n}(x) = 0 \text{ αν } x \notin F\,.$$

(ii) Έστω $E_1 = [0,1/2], E_2 = [1/2,1], E_3 = [0,1/4], E_4 = [1/4,1/2], E_5 = [1/2,3/4]$, $E_6 = [3/4,1]$, $E_7 = [0,1/8], E_8 = [1/8,1/4]\ldots$.

2. Έστω E ένα μη- Lebesgue μετρήσιμο σύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $f = \chi_E - \chi_{E^c}$, να αποδειχθεί ότι η f δεν είναι Lebesgue μετρήσιμη ενώ η $|f|$ είναι Lebesgue μετρήσιμη.

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) := \chi_A(x) - \frac{1}{2}$, όπου το σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο. Είναι η f Lebesgue μετρήσιμη; Είναι η $|f|$ Lebesgue μετρήσιμη; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

4. Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, όπου το $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Αν

$$f_A(x) = \begin{cases} -A & \text{αν } f(x) < -A \\ f(x) & \text{αν } |f(x)| \le A \\ A & \text{αν } f(x) > A\,, \end{cases}$$

όπου $A > 0$, δείξτε ότι η f_A είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

5. Έστω το σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο και έστω η συνάρτηση f, με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \in A\,, \\ -x^2 & \text{αν } x \in A^c\,. \end{cases}$$

Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, είναι το σύνολο $\{x : f(x) = a\}$ Lebesgue μετρήσιμο; Είναι η συνάρτηση f Lebesgue μετρήσιμη; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

6. Έστω η συνάρτηση $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, όπου $E \in \mathcal{M}$.

   (α΄) Αν η f^3 είναι μετρήσιμη, δείξτε ότι και η f θα είναι μετρήσιμη.

   (β΄) Αν $m(E) > 0$, δώστε ένα παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f στο E για την οποία η f^2 είναι μετρήσιμη.

7. Έστω A ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ και έστω C το τριαδικό σύνολο Cantor. Αν

$$h(x) = \chi_{A\cap C}(x)\sin x + \chi_{(A\cap C)^c}(x)x^2\,,$$

είναι η συνάρτηση h μετρήσιμη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

8. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μετρησιμότητας μιας συνάρτησης, να αποδειχθεί ότι κάθε μονότονη συνάρτηση είναι μετρήσιμη.

9. Έστω (E_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι μετρήσιμη σε κάθε E_n, $n \in \mathbb{N}^*$, τότε θα είναι μετρήσιμη στην ένωσή τους $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ καθώς επίσης και στην τομή τους $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

10. Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, $f_n : E \subseteq \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{M}$. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{x \in E : f_n(x)\,\text{συγκλίνει}\}$ είναι μετρήσιμο.

11. Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, $f_n : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}$ και έστω $\alpha > 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$\left\{x \in E : \liminf_{n\to\infty} f_n(x) > \alpha\right\} = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\left\{x \in E : f_n(x) - \alpha \geq \frac{1}{m}\right\}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, να δώσετε μια άλλη απόδειξη του Πορίσματος 3.16.

12. Να βρεθεί μη μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε η εικόνα κάθε μετρήσιμου υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ να είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

13. Αν C είναι το τριαδικό σύνολο Cantor, να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$ τέτοια ώστε $f(x) = 0$, για κάθε $x \in C$ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [0,1] \setminus C$.

14. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση στο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 0$ αν $f(x) \in \mathbb{Q}$ και $g(x) = 1$ αν $f(x) \notin \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι η g είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

15. Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν ο } x \text{ είναι άρρητος ,} \\ 1/q & \text{αν } x = p/q, \text{ όπου } p, q \text{ ακέραιοι αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους και } q > 0 \text{ ,} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = 1/n, \text{ όπου } n \in \mathbb{N}^* \text{ ,} \\ 0 & \text{διαφορετικά ,} \end{cases}$$

είναι συνεχείς σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ και ότι η $g \circ f$ είναι παντού ασυνεχής.

16. (α΄) Έστω $f, g, \varphi : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & \text{αν } g(x) \neq 0 \\ \varphi(x) & \text{αν } g(x) = 0 \text{ ,} \end{cases}$$

δείξτε ότι η $h : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

(β΄) Να αποδειχθεί ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ γράφεται στη μορφή $f = u|f|$, όπου η u είναι μετρήσιμη συνάρτηση με $u(x) = \pm 1$, για κάθε $x \in E$.

17. Έστω η Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με θετικό μέτρο στο οποίο η f είναι φραγμένη.

Υπόδειξη. Να θεωρήσετε την ακολουθία συνόλων $A_n = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < n\}$.

18. Έστω A είναι ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $A = \mathbb{Q}$). Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα μετρήσιμο σύνολο E, να αποδειχθεί ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν το σύνολο $\{x \in E : f(x) \geq a\}$ είναι μετρήσιμο για κάθε $a \in A$.

19. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη και πεπερασμένη σχεδόν παντού στο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο A, με $m(A) < \infty$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $B \subset A$, τέτοιο ώστε $m(A \setminus B) < \varepsilon$ και η f είναι φραγμένη στο B (ο περιορισμός της f στο B είναι φραγμένη συνάρτηση).

20. Έστω το διάστημα $I = (0, 1)$. Αν το $E \subset I$ είναι μετρήσιμο σύνολο με $m(E) = 1$, να αποδειχθεί ότι το E είναι σύνολο πυκνό στο I.

Αν f είναι μια συνεχής και μη φραγμένη συνάρτηση στο $I = (0,1)$, να δείξετε ότι για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο E του I με $m(I \setminus E) = 0$, ο περιορισμός της f στο E είναι μη φραγμένη συνάρτηση.

21. Έστω η συνάρτηση $g : [0,2] \to [0,1]$ με $g = F^{-1}$, όπου F είναι η συνεχής και γνήσια αύξουσα συνάρτηση της Πρότασης 2.79 με $F([0,1]) = [0,2]$. Στην Πρόταση 2.79 αποδεικνύεται ότι υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο $V \subset F(C)$, όπου C το τριαδικό σύνολο Cantor, με $A = F^{-1}(V) = g(V) \subset C$ μετρήσιμο σύνολο. Έστω $h = \chi_A$, η χαρακτηριστική συνάρτηση του A. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $h \circ g$ δεν είναι μετρήσιμη.

22. Να αποδειχθεί ότι ο πληθάριθμος του συνόλου όλων των μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων είναι $2^{\mathfrak{c}}$.

23. Έστω η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{αν } 0 < x \leq 1\ . \end{cases}$$

Αν $E = \{x \in [0,1] : f(x) \geq 0\}$, να αποδειχθεί ότι

$$E = [1/\pi, 1] \bigcup_{n=1}^{\infty} [1/(2n+1)\pi,\ 1/2n\pi] \cup \{0\}$$

και στη συνέχεια ότι $m(E) = \pi^{-1}(\pi - \ln 2)$.

24. Έστω $f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Χρησιμοποιώντας την ακολουθία $h_n := \frac{ng}{ng^2+1}$, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $h : E \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{g(x)} & \text{αν } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{αν } g(x) = 0\ , \end{cases}$$

είναι μετρήσιμη. Αν $g \neq 0$ $\sigma.\pi.$, τότε και η f/g είναι μετρήσιμη.

25. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$ και επί, δηλαδή αμφιμονοσήμαντη. Αν

$$\mathfrak{M} = \{A \subseteq \mathbb{R} : f(A) \in \mathfrak{B}\}\ ,$$

όπου $\mathfrak{B}$ είναι η Borel σ-άλγεβρα, δείξτε ότι η $\mathfrak{M}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$ η οποία περιέχει τα σύνολα Borel. Δηλαδή, η f απεικονίζει σύνολα Borel σε σύνολα Borel.

26. Έστω το μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει *σ-πεπερασμένο μέτρο*, δηλαδή $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ με $E_n \in \mathfrak{M}$ και $\mu(E_n) < \infty$ και έστω η $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $A \subset E$, $A \in \mathfrak{M}$, με $m(A) > 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $b > 0$ και $B \subset A$ με $B \in \mathfrak{M}$ και $0 < m(B) < \infty$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq b$ για κάθε $x \in B$.

    Υπόδειξη. Αποδείξτε ότι

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left\{ x \in E : f(x) \geq \frac{1}{n} \right\} \cap E_n \cap A \right).$$

27. Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, όπου $X \in \mathcal{M}$ με $m(X) < \infty$ και έστω (α_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\left(\{x \in X : |f_n(x) > \alpha_n|\}\right) < \infty.$$

    Να αποδειχθεί ότι

$$-1 \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} \leq 1$$

    σχεδόν για όλα τα $x \in X$.

28. Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη και φραγμένη συνάρτηση στο μετρήσιμο σύνολο E. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία (s_n) απλών συναρτήσεων και φθίνουσα ακολουθία (t_n) απλών συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n = f$ ομοιόμορφα στο E.

29. Να αποδειχθεί ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to [0, \infty]$, $E \in \mathcal{M}$, γράφεται στη μορφή $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_{A_n}$, όπου $0 \leq a_n < \infty$ και $A_n \in \mathcal{M}$.

30. Έστω $f : X \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ συνάρτηση μετρήσιμη και πεπερασμένη σχεδόν παντού στο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο X με $m(X) < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση g στο X τέτοια ώστε

$$m\{x : g(x) \neq f(x)\} < \varepsilon.$$

    Υπόδειξη. Θεωρείστε τα σύνολα

$$A_n = \{x \in X : |f(x)| > n\}, \; n \in \mathbb{N}^* \quad \text{και} \quad A_\infty = \{x \in X : |f(x)| = \infty\}.$$

31. (**Συνάρτηση κατανομής**) Ένα θετικό μέτρο μ στη Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ λέγεται **μέτρο Borel**. Υποθέτουμε ότι το μέτρο μ είναι πεπερασμένο, δηλαδή $\mu(\mathbb{R}) < \infty$. Η **συνάρτηση κατανομής** του μέτρου μ, συμβολίζεται με F, ορίζεται στο $\mathbb{R}$ με

$$F(x) := \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι

(α΄) Η F είναι αύξουσα.

(β΄) Η F είναι από δεξιά συνεχής, δηλαδή $F(x+) = \lim_{t\to x^+} F(t) = F(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ΄) Η F είναι φραγμένη.

(δ΄) Είναι $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \mu(\mathbb{R})$.

Κεφάλαιο 4

Ολοκλήρωμα Lebesgue

4.1 Ολοκλήρωση μη Αρνητικών Συναρτήσεων

Ορισμός 4.1. *Έστω $s : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ απλή συνάρτηση της μορφής $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, όπου $a_1, \ldots, a_n$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, $A_i \in \mathcal{M}$ $(1 \leq i \leq n)$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i \neq j$ και $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \mathbb{R}$ (δηλαδή η $\{A_1, \ldots, A_n\}$ είναι μια διαμέριση του $\mathbb{R}$). Αν $E \in \mathcal{M}$, τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα της s ως εξής*

$$\int_E s(x)\, \mathrm{d}m(x) := \sum_{k=1}^{n} a_i m(A_i \cap E)\,. \tag{4.1}$$

(Υπενθυμίζεται ότι ορίζουμε $0 \cdot \infty = 0$).

Θα αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_E s\, \mathrm{d}m$ είναι ανεξάρτητο της παράστασης της s, δηλαδή ότι είναι καλά ορισμένο.

Πρόταση 4.2. *Έστω $s = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$, όπου $\{A_1, \ldots, A_k\}$ και $\{B_1, \ldots, B_n\}$ είναι δύο διαμερίσεις του $\mathbb{R}$ από στοιχεία του $\mathcal{M}$. Τότε*

$$\int_E s\, \mathrm{d}m = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i \cap E) = \sum_{j=1}^{n} b_j m(B_j \cap E)\,.$$

Απόδειξη. Επειδή $A_i = \bigcup_{j=1}^{n} A_i \cap B_j$ και $B_j = \bigcup_{i=1}^{k} B_j \cap A_i$, όπου $(A_i \cap B_j)_{j=1}^{n}$ και $(B_j \cap A_i)_{i=1}^{k}$

είναι δύο πεπερασμένες ακολουθίες μετρήσιμων συνόλων ξένων ανά δύο, είναι

$$s = \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_i \cap B_j} = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{k} \chi_{B_j \cap A_i}\,.$$

Επομένως, αν $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ τότε $a_i = b_j$. Επειδή $A_i \cap E = \bigcup_{j=1}^{n} A_i \cap B_j \cap E$ και $B_j \cap E = \bigcup_{i=1}^{k} B_j \cap A_i \cap E$, όπου $(A_i \cap B_j \cap E)_{j=1}^{n}$ και $(B_j \cap A_i \cap E)_{i=1}^{k}$ είναι πεπερασμένες ακολουθίες μετρήσιμων συνόλων ξένων ανά δύο και το μέτρο Lebesgue είναι σ- αθροιστικό,

$$m(A_i \cap E) = \sum_{j=1}^{n} m(A_i \cap B_j \cap E) \qquad \text{και} \quad m(B_j \cap E) = \sum_{i=1}^{k} m(B_j \cap A_i \cap E)\,.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\int_E s \,\mathrm{d}m &= \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i \cap E)\\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=1}^{n} m(A_i \cap B_j \cap E)\\ &= \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{k} m(B_j \cap A_i \cap E) = \sum_{j=1}^{n} b_j m(B_j \cap E)\,.\end{aligned}$$

□

Αναφέρουμε στη συνέχεια μερικές βασικές ιδιότητες των ολοκληρωμάτων απλών συναρτήσεων.

Πρόταση 4.3. *Έστω $s, t : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ απλές συναρτήσεις και έστω $c \geq 0$.*

(i) $0 \leq \int_{\mathbb{R}} s \,\mathrm{d}m \leq \infty\,.$

(ii) *Αν $E \in \mathcal{M}$, τότε* $\int_E s \,\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} s\chi_E \,\mathrm{d}m\,.$

(iii) $\int_{\mathbb{R}} cs \,\mathrm{d}m = c \int_{\mathbb{R}} s \,\mathrm{d}m\,.$

(iv) $\int_{\mathbb{R}} (s+t)\ \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} s \,\mathrm{d}m + \int_{\mathbb{R}} t \,\mathrm{d}m\,.$

(v) *Αν $s \leq t$, τότε* $\int_{\mathbb{R}} s \,\mathrm{d}m \leq \int_{\mathbb{R}} t \,\mathrm{d}m\,.$

(vi) *Αν $E \in \mathcal{M}$, ορίζουμε το $\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ με*

$$\varphi(E) := \int_E s \,\mathrm{d}m\,.$$

Τότε το φ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

(vii) *Αν $s = 0$, τότε $\int_{\mathbb{R}} s \,\mathrm{d}m = 0$. Πιο γενικά, αν $s = 0$ σ.π. στο $\mathbb{R}$ τότε $\int_{\mathbb{R}} s \,\mathrm{d}m = 0$.*

Απόδειξη. (i) Είναι προφανές από την (4.1).

(ii) Αν $s = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, επειδή $\chi_{A_i} \cdot \chi_E = \chi_{A_i \cap E}$, θα είναι $s\chi_E = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i \cap E}$. Επομένως, από την (4.1) έχουμε

$$\int_E s \,\mathrm{d}m = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i \cap E) = \int_{\mathbb{R}} s\chi_E \,\mathrm{d}m\,.$$

(iii) Αν $c = 0$, τότε η (iii) ισχύει. Υποθέτουμε ότι $c > 0$ και $s = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$. Τότε, $cs = \sum_{i=1}^n ca_i \chi_{A_i}$ και επομένως

$$\int_{\mathbb{R}} cs \,\mathrm{d}m = \sum_{i=1}^n ca_i m(A_i) = c \sum_{i=1}^n a_i m(A_i) = c \int_{\mathbb{R}} s \,\mathrm{d}m\,.$$

(iv) Έστω $s = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ και $t = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{B_j}$, $a_i, b_j \geq 0$, όπου $\{A_1, \ldots, A_k\}$ και $\{B_1, \ldots, B_n\}$ είναι δύο διαμερίσεις του $\mathbb{R}$ από στοιχεία του $\mathcal{M}$. Είναι $A_i = \bigcup_{j=1}^n A_i \cap B_j$ και $B_j = \bigcup_{i=1}^k B_j \cap A_i$, όπου $(A_i \cap B_j)_{j=1}^n$ και $(B_j \cap A_i)_{i=1}^k$ είναι δύο πεπερασμένες ακολουθίες ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων. Τότε,

$$s = \sum_{i=1}^k a_i \sum_{j=1}^n \chi_{A_i \cap B_j}\,, \quad t = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^k \chi_{B_j \cap A_i}$$

και $m(A_i) = \sum_{j=1}^n m(A_i \cap B_j)$, $m(B_j) = \sum_{i=1}^k m(B_j \cap A_i)$. Επειδή

$$s + t = \sum_{i=1}^k a_i \sum_{j=1}^n \chi_{A_i \cap B_j} + \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^k \chi_{B_j \cap A_i} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j}\,,$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}(s+t)\,\mathrm{d}m &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(a_i+b_j)m(A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{i=1}^{k}a_i\sum_{j=1}^{n}m(A_i\cap B_j)+\sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{i=1}^{k}m(B_j\cap A_i)\\ &= \sum_{i=1}^{k}a_i m(A_i)+\sum_{j=1}^{n}b_j m(B_j)\\ &= \int_{\mathbb{R}}s\,\mathrm{d}m+\int_{\mathbb{R}}t\,\mathrm{d}m\,.\end{aligned}$$

(v) Είναι $t(x) = s(x) + (t(x) - s(x))$, όπου η $t - s$ είναι απλή συνάρτηση και μη αρνητική. Επομένως, από τη (iv) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}}t\,\mathrm{d}m=\int_{\mathbb{R}}s\,\mathrm{d}m+\int_{\mathbb{R}}(t-s)\,\mathrm{d}m\geq\int_{\mathbb{R}}s\,\mathrm{d}m\,.$$

(vi) Έστω $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, όπου τα $E_j \in \mathcal{M}$ είναι ξένα ανά δύο και έστω $s = \sum_{i=1}^{k} a_i\chi_{A_i}$, όπου $\{A_1, \ldots, A_k\}$ είναι μία διαμέριση του $\mathbb{R}$ από στοιχεία του $\mathcal{M}$. Είναι

$$\varphi(E_j)=\int_{E_j}s\,\mathrm{d}m=\sum_{i=1}^{k}a_i m(A_i\cap E_j)\,.$$

Επειδή η $(A_i \cap E_j)_{j=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων, είναι

$$m(A_i\cap E)=m\left(A_i\cap\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)\right)=m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_i\cap E_j)\right)=\sum_{j=1}^{\infty}m(A_i\cap E_j)\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\varphi(E)&=\int_E s\,\mathrm{d}m\\ &=\sum_{i=1}^{k}a_i m(A_i\cap E)\\ &=\sum_{i=1}^{k}a_i\sum_{j=1}^{\infty}m(A_i\cap E_j)\\ &=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}a_i m(A_i\cap E_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(E_j)\,.\end{aligned}$$

Επειδή $\varphi(\emptyset) = 0$, η φ δεν μπορεί να είναι ταυτοτικά ίση με ∞. Άρα, έχουμε αποδείξει ότι το φ είναι θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$.

<u>Σημείωση</u>. Είναι γνωστό ότι αν $a_{i,j} \geq 0$ για κάθε $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, τότε

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j} \right) .$$

(vii) Αν $s = 0$ στο $\mathbb{R}$, τότε από την (4.1) είναι $\int_{\mathbb{R}} s \,\mathrm{d}m = 0$. Αν τώρα $s = 0$ $\sigma.\pi.$ και $E := \{x \in \mathbb{R} : s(x) = 0\}$, τότε $E^c = \{x \in \mathbb{R} : s(x) > 0\}$ με $m(E^c) = 0$. Τα $E, E^c \in \mathcal{M}$ και από την (4.1) είναι $\int_{E^c} s \,\mathrm{d}m = 0$. Επειδή $s\chi_E = 0$ στο $\mathbb{R}$, από τη (ii) είναι $\int_E s \,\mathrm{d}m = 0$. Άρα, από τη (vi) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} s \,\mathrm{d}m = \int_E s \,\mathrm{d}m + \int_{E^c} s \,\mathrm{d}m = 0 \,.$$

□

Ορισμός 4.4. *Έστω $E \in \mathcal{M}$ και έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f πάνω στο E ως εξής :*

$$\int_E f(x) \,\mathrm{d}m(x) := \sup \left\{ \int_E s \,\mathrm{d}m : \, 0 \leq s \leq f \text{ στο } E, \text{ όπου η } s \text{ είναι απλή συνάρτηση} \right\} . \tag{4.2}$$

Παρατήρηση 4.5. *Αν η f είναι απλή συνάρτηση, τότε φαίνεται ότι έχουμε δύο ορισμούς για το ολοκλήρωμα της f, τους* (4.1) *και* (4.2). *Όμως, σ' αυτή την περίπτωση η f είναι εκείνη που μας δίνει τη μεγαλύτερη τιμή στο δεξιό μέλος της* (4.2). *Δηλαδή αν η f είναι απλή συνάρτηση, τότε ο ορισμός* (4.2) *συμπίπτει με τον ορισμό* (4.1).

Αναφέρουμε τώρα τις βασικές ιδιότητες των ολοκληρωμάτων των μη αρνητικών και Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων.

Πρόταση 4.6. *Έστω $f, g : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $E \in \mathcal{M}$.*

(i) *Αν $f(x) = 0 \ \forall x \in E$, τότε $\int_E f \,\mathrm{d}m = 0$.*

(ii) *Αν* $0 \le f \le g$ *στο* E, *τότε* $\int_E f\,\mathrm{d}m \le \int_E g\,\mathrm{d}m$. *Ειδικά,*

$$\int_E (\inf f)\ \mathrm{d}m \le \int_E f\,\mathrm{d}m\,.$$

(iii) *Αν* $m(E) = 0$, *τότε* $\int_E f\,\mathrm{d}m = 0$ *ακόμη και αν* $f(x) = \infty$ *για κάθε* $x \in E$.

(iv) *Είναι* $\int_E f\,\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} f\chi_E\,\mathrm{d}m$.

(v) *Αν* $A, B \in \mathcal{M}$, *με* $A \subseteq B$, *τότε* $\int_A f\,\mathrm{d}m \le \int_B f\,\mathrm{d}m$.

(vi) *Αν* $\int_E f\,\mathrm{d}m < \infty$, *τότε* $f < \infty$ *σ.π. στο* E.

Απόδειξη. Η απόδειξη των (i) και (ii) είναι προφανής από τον Ορισμό 4.4.

(iii) Έστω η $s = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$ είναι απλή, με $s \le f$ στο E. Επειδή $A_i \cap E \subseteq E$ και $m(E) = 0$, θα είναι $m(A_i \cap E) = 0$, $1 \le i \le n$. Επομένως

$$\int_E s\,\mathrm{d}m = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i \cap E) = 0$$

και από τον Ορισμό 4.4 συνεπάγεται ότι $\int_E f\,\mathrm{d}m = 0$.

(iv) Αν η s είναι απλή, με $0 \le s \le f\chi_E$ στο $\mathbb{R}$, τότε η s είναι μηδέν στο E^c. Επομένως, από την Πρόταση 4.3 (vi) έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f\chi_E\,\mathrm{d}m &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} s\,\mathrm{d}m :\ 0 \le s \le f\chi_E\right\} \\
&= \sup\left\{\int_E s\,\mathrm{d}m + \int_{E^c} s\,\mathrm{d}m :\ 0 \le s \le f\chi_E\right\} \\
&= \sup\left\{\int_E s\,\mathrm{d}m :\ 0 \le s \le f\chi_E\right\} \\
&= \int_E f\chi_E\,\mathrm{d}m\,.
\end{aligned}$$

Όμως στο E είναι $f\chi_E = f$, οπότε $\int_E f\chi_E\,\mathrm{d}m = \int_E f\,\mathrm{d}m$.

(v) Είναι $f\chi_A \le f\chi_B$. Επομένως από τις (ii) και (iv) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f\chi_A\,\mathrm{d}m \le \int_{\mathbb{R}} f\chi_B\,\mathrm{d}m \Longleftrightarrow \int_A f\,\mathrm{d}m \le \int_B f\,\mathrm{d}m\,.$$

(vi) Έστω $E_1 := \{x \in E : f(x) = +\infty\}$. Τότε το $E_1 \subset E$ είναι ένα μετρήσιμο σύνολο. Υποθέτουμε ότι $m(E_1) > 0$. Από τις (ii) και (v) έχουμε

$$\int_E f\,\mathrm{d}m \geq \int_{E_1} f\,\mathrm{d}m \geq \int_{E_1} a\,\mathrm{d}m = a \cdot m(E_1)\,, \quad \text{για κάθε } a > 0.$$

Άτοπο, επειδή το $\int_E f\,\mathrm{d}m$ είναι πεπερασμένο. Άρα, $m(E_1) = 0$. □

Παρατήρηση 4.7. *Λόγω της Πρότασης 4.6 (iv), χωρίς περιορισμό της γενικότητας θα μπορούσαμε να δώσουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος μιας μετρήσιμης συνάρτησης $f \geq 0$ πάνω στο $\mathbb{R}$.*

Η Πρόταση 4.6 (vi) μπορεί επίσης να αποδειχθεί (βλέπε άσκηση 5) χρησιμοποιώντας την παρακάτω ανισότητα η οποία μας δίνει μια εκτίμηση για το "μέγεθος" της f συναρτήσει του ολοκληρώματος της f.

Πρόταση 4.8 (Ανισότητα Chebyshev). *Έστω $f : E \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση, $E \in \mathcal{M}$. Αν $\alpha > 0$, τότε*

$$m\left(\{x \in E : |f(x)| > \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha}\int_E |f|\,\mathrm{d}m\,.$$

Απόδειξη. Έστω $E_\alpha := \{x \in E : |f(x)| > \alpha\}$. Επειδή το E_α είναι μετρήσιμο υποσύνολο του E και $|f(x)| > \alpha$, για κάθε $x \in E_\alpha$, από την Πρόταση 4.6 (v) και (ii) έχουμε

$$\int_E |f|\,\mathrm{d}m \geq \int_{E_\alpha} |f|\,\mathrm{d}m \geq \int_{E_\alpha} \alpha\,\mathrm{d}m = \alpha m(E_\alpha)\,.$$

□

Πρόταση 4.9. *Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση και έστω $E \in \mathcal{M}$. Είναι*

$$\int_E |f|\,\mathrm{d}m = 0\,, \text{ αν και μόνο αν } f = 0 \text{ σ.π. στο } E\,.$$

Απόδειξη. Αν $f = 0\ \sigma.\pi.$ στο E και $0 \leq s \leq |f|$, όπου s είναι απλή συνάρτηση, τότε $s = 0\ \sigma.\pi.$ στο E. Επομένως $s\chi_E = 0\ \sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$ και από την Πρόταση 4.3 (vii) είναι $\int_E s\,\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} s\chi_E\,\mathrm{d}m = 0$. Άρα, από τον Ορισμό 4.4 θα είναι και $\int_E |f|\,\mathrm{d}m = 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\int_E |f|\,\mathrm{d}m = 0$. Αν $A = \{x \in E : |f(x)| > 0\}$, θα αποδείξουμε ότι $m(A) = 0$. Έστω $A_n := \left\{x \in E : |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε τα σύνολα A_n είναι μετρήσιμα, $A_n \subseteq A_{n+1}$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και από το Θεώρημα 2.53 (δ') $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$. Όμως από την ανισότητα Chebyshev

$$m(A_n) = m\left(\left\{x \in E : |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n \int_E |f|\,\mathrm{d}m = 0\,.$$

Άρα $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0$. □

Θεώρημα 4.10 (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης (ΘΜΣ)). *Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$ και υποθέτουμε ότι*

(α') $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots \leq \infty$, *για κάθε $x \in E$,*

(β') $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, *για κάθε $x \in E$.*

Τότε η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση και

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,\mathrm{d}m = \int_E \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)\,\mathrm{d}m = \int_E f\,\mathrm{d}m\,,$$

δηλαδή

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \int_E f_n\,\mathrm{d}m = \int_E \left(\sup_{n\in\mathbb{N}^*} f_n\right)\,\mathrm{d}m\,. \qquad \textbf{(ιδιότητα Beppo Levi}^1\textbf{)}$$

Απόδειξη. Από την (α') έχουμε $\int_E f_n\,\mathrm{d}m \leq \int_E f_{n+1}\,\mathrm{d}m$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,\mathrm{d}m = a\,, \tag{4.3}$$

[1] Beppo Levi (1875-1961), ιταλός μαθηματικός ο οποίος εργάστηκε ερευνητικά στη " λογική", στην " ανάλυση" και στην " αλγεβρική γεωμετρία". Δημοσίευσε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης το 1906. Πολλές φορές στη διεθνή βιβλιογραφία αναφέρονται αποτελέσματα "BEPPO-LEVI", δηλαδή σαν να πρόκειται για αποτελέσματα που οφείλονται σε δύο μαθηματικούς. Αυτό δεν είναι σωστό και θα πρέπει να αποφεύγεται.

για κάποιο $a \in [0, \infty]$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ για κάθε $x \in E$, η f είναι μετρήσιμη και $f_n \le f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Άρα, $\int_E f_n \, \mathrm{d}m \le \int_E f \, \mathrm{d}m$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και από την (4.3) έχουμε

$$a \le \int_E f \, \mathrm{d}m \,. \tag{4.4}$$

Έστω s απλή συνάρτηση τέτοια ώστε $0 \le s \le f$ και έστω $0 < \varepsilon < 1$. Ορίζουμε την ακολουθία συνόλων (E_n) με

$$E_n := \{x \in E : f_n(x) \ge \varepsilon s(x)\} \,, \quad n \in \mathbb{N}^* \,.$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η $f_n - \varepsilon s$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, τα E_n είναι μετρήσιμα σύνολα. Επειδή η ακολουθία (f_n) είναι αύξουσα,

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subset \cdots \,.$$

Θα αποδείξουμε ότι $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Πράγματι, έστω $x \in E$.
<u>*1η περίπτωση*</u>. Αν $f(x) = 0$, τότε $s(x) = 0$ και επομένως $x \in E_1 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.
<u>*2η περίπτωση*</u>. Αν $f(x) > 0$, επειδή $0 < \varepsilon < 1$ και $0 \le s(x) \le f(x)$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) > \varepsilon s(x)$$

και επομένως $f_n(x) > \varepsilon s(x)$ τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}^*$(γιατί;). Τότε για αυτά τα n το $x \in E_n$ και επομένως $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι αν $x \in E$, τότε $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Άρα, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.
Επειδή από την Πρόταση 4.3 (vi) το $\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ με $\varphi(A) = \int_A s \, \mathrm{d}m$ είναι ένα θετικό μέτρο, από το Θεώρημα 2.6 (δ') είναι

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = \varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \varphi(E) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s \, \mathrm{d}m = \int_E s \, \mathrm{d}m \,.$$

Επίσης

$$\int_E f_n \, \mathrm{d}m \ge \int_{E_n} f_n \, \mathrm{d}m \ge \varepsilon \int_{E_n} s \, \mathrm{d}m \,.$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}m \ge \limsup_{n\to\infty} \int_{E_n} f_n \, \mathrm{d}m \ge \varepsilon \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s \, \mathrm{d}m = \varepsilon \int_E s \, \mathrm{d}m \,.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι για κάθε ε, $0 < \varepsilon < 1$, είναι $a \ge \varepsilon \int_E s \, \mathrm{d}m$. Κατά συνέπεια $a \ge \int_E s \, \mathrm{d}m$, για οποιαδήποτε απλή συνάρτηση s με $0 \le s \le f$. Άρα,

$$a \ge \sup\left\{\int_E s \, \mathrm{d}m : \, 0 \le s \le f \,, \text{ όπου η } s \text{ είναι απλή συνάρτηση}\right\} = \int_E f \, \mathrm{d}m \,. \tag{4.5}$$

Από τις (4.4) και (4.5) συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}m = \int_E f\,\mathrm{d}m$. □

Παράδειγμα 4.11 (Ο τύπος Euler για τη συνάρτηση γάμμα). *Να αποδειχθεί ότι*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,, \quad x>0\,.$$

Απόδειξη. Η **συνάρτηση γάμμα** $\Gamma:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,, \quad x>0\,.$$

Επειδή ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, $x>0$, συγκλίνει, θα αποδείξουμε στην παράγραφο 4.4 ότι το ολοκλήρωμα Lebesgue της $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ υπάρχει στο $[0,\infty)$ και είναι $\int_{[0,\infty)} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}m(t) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Αν $f_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}\chi_{(0,n)}(t)$, τότε η (f_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$. Για να αποδείξουμε ότι η (f_n) είναι αύξουσα, αρκεί να αποδείξουμε ότι για $t<n$ η $h_n(t) := (1-t/n)^n$ είναι γνήσια αύξουσα. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή ανισότητα μεταξύ του γεωμετρικού και του αριθμητικού μέσου των θετικών πραγματικών αριθμών $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$:

$$\sqrt[n+1]{a_1 a_2\cdots a_{n+1}} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}\,.$$

Η ισότητα στην παραπάνω ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1}$. Από την ανισότητα με $a_1 = 1$ και $a_2 = a_3 = \cdots = a_{n+1} = 1-t/n$, $n\in\mathbb{N}^*$, έχουμε

$$\sqrt[n+1]{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n} < 1-\frac{t}{n+1} \Longleftrightarrow \left(1-\frac{t}{n}\right)^n < \left(1-\frac{t}{n+1}\right)^{n+1}\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) = \int_{[0,\infty)} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}m(t) &= \int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}m(t)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)} f_n(t)\,\mathrm{d}m(t) \qquad \text{(θεώρημα μονότονης σύγκλισης)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\chi_{(0,n)}(t)\,\mathrm{d}m(t)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{(0,n)} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}m(t)\,.
\end{aligned}$$

Επειδή τώρα η $g_n(t) := \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$, $x>0$, είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $(0,n)$, όπως θα αποδείξουμε στην παράγραφο 4.3 η g_n είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0,n)$ και τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα. Κατά συνέπεια,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Χρησιμοποιώντας πρώτα την αντικατάσταση $t = ns$ και μετά παραγοντική ολοκλήρωση, εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = n^x \int_0^1 (1-s)^n s^{x-1}\,\mathrm{d}s = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,.$$

Άρα,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,, \quad x>0\,.$$

□

Πρόταση 4.12. *Έστω $E \in \mathcal{M}$.*

(α΄) Αν η $f : E \to [0,\infty]$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση και $c \geq 0$, τότε

$$\int_E cf\,\mathrm{d}m = c\int_E f\,\mathrm{d}m\,.$$

(β΄) Αν οι $f_1, f_2 : E \to [0,\infty]$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_E (f_1+f_2)\,\mathrm{d}m = \int_E f_1\,\mathrm{d}m + \int_E f_2\,\mathrm{d}m\,.$$

(γ΄) Αν οι $f, g : E \to [0,\infty]$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις με $f \leq g$ και $\int_E f\,\mathrm{d}m < \infty$, τότε

$$\int_E (g-f)\,\mathrm{d}m = \int_E g\,\mathrm{d}m - \int_E f\,\mathrm{d}m\,.$$

Απόδειξη. (α΄) Από το Θεώρημα 3.29 υπάρχει αύξουσα ακολουθία (s_n) μη αρνητικών απλών συναρτήσεων με $s_n \nearrow f$. Τότε η cs_n είναι αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών απλών συναρτήσεων με $cs_n \nearrow cf$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης

$$\int_E cf\,\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_E cs_n\,\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} c\int_E s_n\,\mathrm{d}m = c\int_E f\,\mathrm{d}m\,.$$

(β΄) Υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες (s_n) και (t_n) μη αρνητικών απλών συναρτήσεων με $s_n \nearrow f_1$ και $t_n \nearrow f_2$. Τότε η $(s_n + t_n)$ είναι αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών απλών συναρτήσεων με $s_n + t_n \nearrow f_1 + f_2$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης

$$\begin{aligned}\int_E f_1 \,\mathrm{d}m + \int_E f_2 \,\mathrm{d}m &= \lim_{n\to\infty} \int_E s_n \,\mathrm{d}m + \lim_{n\to\infty} \int_E t_n \,\mathrm{d}m \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_E (s_n + t_n) \,\mathrm{d}m \\ &= \int_E (f_1 + f_2) \,\mathrm{d}m \,.\end{aligned}$$

(γ΄) Επειδή $g = f + (g - f)$ και $g - f \geq 0$, από τη (β΄) έχουμε

$$\int_E g \,\mathrm{d}m = \int_E f \,\mathrm{d}m + \int_E (g - f) \,\mathrm{d}m \,.$$

Επειδή $\int_E f \ \mathrm{d}m < \infty$, τελικά είναι

$$\int_E (g - f) \,\mathrm{d}m = \int_E g \,\mathrm{d}m - \int_E f \,\mathrm{d}m \,.$$

□

Θεώρημα 4.13. *Αν $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, όπου οι συναρτήσεις $f_n : E \to [0, \infty]$, $E \in \mathcal{M}$, είναι μετρήσιμες, τότε*

$$\int_E f \,\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m \,.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 4.12 (β΄), επαγωγικά αποδεικνύεται ότι

$$\int_E \sum_{n=1}^{N} f_n \,\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{N} \int_E f_n \,\mathrm{d}m \,.$$

Αν $g_N := \sum_{n=1}^N f_n$, είναι $g_N \leq g_{N+1}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_E f_n \,\mathrm{d}m \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_E \sum_{n=1}^{N} f_n \,\mathrm{d}m \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_E g_N \,\mathrm{d}m \\
&= \int_E \lim_{N\to\infty} g_N \,\mathrm{d}m && \text{(θεώρημα μονότονης σύγκλισης)} \\
&= \int_E \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n \,\mathrm{d}m = \int_E f \,\mathrm{d}m\,.
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 4.14. *Ας σημειωθεί ότι το προηγούμενο θεώρημα είναι ουσιαστικά ένα πόρισμα του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.13, θα αποδείξουμε τώρα ένα ανάλογο αποτέλεσμα με αυτό της Πρότασης 4.3 (vi) για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις.*

Θεώρημα 4.15. *Υποθέτουμε ότι η $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $E \in \mathcal{M}$, ορίζουμε το $\varphi : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ με*

$$\varphi(E) := \int_E f \,\mathrm{d}m\,.$$

Τότε το φ είναι ένα θετικό μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

Απόδειξη. Αν $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, όπου E_k είναι ακολουθία ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων, τότε

$\chi_E = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}$ και επομένως $f\chi_E = \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_k}$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.13 έχουμε

$$\begin{aligned}
\varphi(E) = \int_E f \,\mathrm{d}m &= \int_{\mathbb{R}} f\chi_E \,\mathrm{d}m \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_k} \,\mathrm{d}m \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f\chi_{E_k} \,\mathrm{d}m \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f \,\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(E_k)\,.
\end{aligned}$$

Επειδή $\varphi(\emptyset) = 0$, το φ είναι ένα θετικό μέτρο. □

Παρατήρηση 4.16. *Το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, Θεώρημα 4.10, ισχύει και με την ασθενέστερη υπόθεση ότι η ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων (f_n) είναι αύξουσα σχεδόν παντού στο $E \in \mathcal{M}$ με $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in E$. Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και το Θεώρημα 4.15. Αφήνουμε σαν άσκηση την εύκολη απόδειξη.*

Πρόταση 4.17. *Αν $f, g : E \to [0,\infty]$, $E \in \mathcal{M}$, είναι μετρήσιμες συναρτήσεις με $f(x) \le g(x)$ σ.π., τότε*

$$\int_E f \,\mathrm{d}m \le \int_E g \,\mathrm{d}m\,.$$

Απόδειξη. Αν $A = \{x \in E : f(x) \le g(x)\}$ και $B = E \setminus A$, τότε τα A, B είναι μετρήσιμα σύνολα ξένα μεταξύ τους με $m(B) = 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_E f \,\mathrm{d}m &= \int_{A\cup B} f \,\mathrm{d}m \\
&= \int_A f \,\mathrm{d}m + \int_B f \,\mathrm{d}m && \text{(Θεώρημα 4.15)} \\
&= \int_A f \,\mathrm{d}m && (m(B) = 0) \\
&\le \int_A g \,\mathrm{d}m && \text{(Πρόταση 4.6 } (ii)) \\
&= \int_A g \,\mathrm{d}m + \int_B g \,\mathrm{d}m && (m(B) = 0) \\
&= \int_{A\cup B} g \,\mathrm{d}m && \text{(Θεώρημα 4.15)} \\
&= \int_E g \,\mathrm{d}m\,.
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 4.18. *Έστω $E \in \mathcal{M}$. Αν η συνάρτηση $f : E \to [0,\infty]$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση και η $g : E \to [0,\infty]$ είναι τέτοια ώστε $f = g$ σ.π., τότε η g είναι μετρήσιμη συνάρτηση και*

$$\int_E g \,\mathrm{d}m = \int_E f \,\mathrm{d}m\,.$$

Παράδειγμα 4.19. *Έστω η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, με*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\,, \\ n & \text{αν } x \in I_{n,k}\ (1 \le k \le 2^{n-1})\,, \end{cases}$$

όπου C είναι το τριαδικό σύνολο Cantor και $I_{n,k}$ $(1 \le k \le 2^{n-1})$ είναι τα ανοικτά και ξένα ανά δύο διαστήματα, μήκους $1/3^n$, που αφαιρούνται από το σύνολο C_{n-1} για την κατασκευή του συνόλου C_n (βλέπε παράγραφο 1.2.1). Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}m\,.$$

Λύση. Τα σύνολα $A_n := \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ ξένα ανά δύο με

$$m(A_n) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} m(I_{n,k}) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{3^n} = \frac{2^{n-1}}{3^n}\,.$$

1ος τρόπος. Είναι $f(x) = n$, για κάθε $x \in A_n$ και $f(x) = 0$, για κάθε $x \in C = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Επομένως, $f = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{A_n}$. Επειδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \frac{1}{(1-x)^2}\,, \quad \text{για } |x| < 1\,,$$

είναι

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} f\,\mathrm{d}m &= \int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{A_n}\,\mathrm{d}m \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \int_{[0,1]} \chi_{A_n}\,\mathrm{d}m && \text{(Θεώρημα 4.13)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot m(A_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-2} = 3\,.
\end{aligned}$$

2ος τρόπος. Επειδή $[0,1] \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, από το Θεώρημα 4.15 έχουμε

$$\int_{[0,1]} f\,\mathrm{d}m = \int_{[0,1]\setminus C} f\,\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f\,\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot m(A_n) = 3\,.$$

■

Παράδειγμα 4.20. *Υποθέτουμε ότι η* $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ *είναι μετρήσιμη και ότι* $\int_E f\,\mathrm{d}m < \infty$, *όπου* $E \in \mathcal{M}$ *με* $m(E) < \infty$. *Αν* $\varepsilon > 0$ *και* $E_n = \{x \in E : n\varepsilon \le f(x) < (n+1)\varepsilon\}$, $n \in \mathbb{N}$, *ορίζουμε το* $S(\varepsilon) := \sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon m(E_n)$. *Τότε,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} S(\varepsilon) = \int_E f\,\mathrm{d}m\,.$$

Απόδειξη. Τα σύνολα E_n είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο. Αν $F = \{x \in E : f(x) = \infty\}$, τότε το F έχει μέτρο μηδέν και $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \cup F$. Είναι

$$\begin{aligned}
S(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{En} n\varepsilon\,\mathrm{d}m &\le \sum_{n=0}^{\infty}\int_{En} f\,\mathrm{d}m \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{En} f\,\mathrm{d}m + \int_F f\,\mathrm{d}m && (m(F) = 0) \\
&= \int_{\bigcup_{n=0}^{\infty} En} f\,\mathrm{d}m + \int_F f\,\mathrm{d}m && \text{(Θεώρημα 4.15)} \\
&= \int_E f\,\mathrm{d}m && \text{(Θεώρημα 4.15)}
\end{aligned}$$

και παρόμοια

$$S(\varepsilon)+\varepsilon m(E)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\varepsilon m(E_n)\geq\sum_{n=0}^{\infty}\int_{En} f\,\mathrm{d}m=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{En} f\,\mathrm{d}m+\int_F f\,\mathrm{d}m=\int_E f\,\mathrm{d}m\,.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι

$$\int_E f\,\mathrm{d}m-\varepsilon m(E)\leq S(\varepsilon)\leq\int_E f\,\mathrm{d}m$$

και επομένως $\lim_{\varepsilon\to 0^+} S(\varepsilon)=\int_E f\,\mathrm{d}m$. □

Παράδειγμα 4.21. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$\int_{(0,1)}\left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2\mathrm{d}m(x)\,.$$

Λύση. Αν $f_n(x):=nx^{n-1}(\ln x)^2$, $n\in\mathbb{N}^*$, η f_n είναι θετική, φθίνουσα, συνεχής και κατά συνέπεια μετρήσιμη στο $(0,1)$. Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση εύκολα υπολογίζεται το ολοκλήρωμα Riemann (είναι γενικευμένο στην περίπτωση $n=1$) :

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 nx^{n-1}(\ln x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2}\,.$$

Όπως θα αποδειχθεί στις επόμενες παραγράφους, τότε και το ολοκλήρωμα Lebesgue

$$\int_{(0,1)} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x)=\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2}\,.$$

Επειδή για $x\in(0,1)$ είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=(\ln x)^2\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=(\ln x)^2\frac{1}{(1-x)^2}\,,$$

από το Θεώρημα 4.13

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)}\left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2\mathrm{d}m(x)&=\int_{(0,1)}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(0,1]} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=2\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{3}\,.\end{aligned}$$

■

Στο επόμενο παράδειγμα δίνουμε μια διαφορετική απόδειξη του λήμματος Borel–Cantelli, Παράδειγμα 2.21, για μια ακολουθία (E_n) Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4.22 (Λήμμα Borel–Cantelli). *Έστω (E_n) ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < +\infty$. Τότε σχεδόν όλα τα $x \in \mathbb{R}$ ανήκουν σε πεπερασμένα το πολύ E_n.*

Απόδειξη. Αν

$$E := \overline{\lim}\, E_n = \{x \in \mathbb{R} : \ x \in E_n \text{ για άπειρα το πλήθος } n \in \mathbb{N}^*\} \ ,$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι $m(E) = 0$. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) \, , \quad x \in \mathbb{R} \, .$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ο κάθε όρος της σειράς είναι είτε 0 ή 1. Επομένως $x \in E$ αν και μόνο αν $f(x) = \infty$. Όμως από το Θεώρημα 4.13 έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mathrm{d}m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{E_n}(x) \, \mathrm{d}m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty \, .$$

Άρα, από την Πρόταση 4.6 (vi) προκύπτει ότι $f(x) < \infty$ $\sigma.\pi.$ και ισοδύναμα $m(E) = 0$. □

Εξετάζουμε τώρα δύο βασικά ερωτήματα αναφορικά με τα ολοκληρώματα και τις ακολουθίες μη αρνητικών και Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων.

Ερώτημα 1: Υποθέτουμε ότι η (f_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$, δηλαδή για κάθε $x \in E$

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f_n(x) \geq \cdots \geq 0 \, .$$

Ισχύει τότε το συμπέρασμα του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης; Δηλαδή, είναι

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}m \, ; \tag{4.6}$$

Γενικά, η απάντηση είναι όχι. Για παράδειγμα, έστω $f_n(x) = \frac{|x|}{n}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε η (f_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Επομένως, $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}m = 0$. Επειδή

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}m \geq \int_{[n,\infty)} f_n \, \mathrm{d}m \geq \int_{[n,\infty)} 1 \, \mathrm{d}m = \infty \, ,$$

είναι $\int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}m = \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και επομένως $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}m = \infty$. Άρα, η (4.6) δεν ισχύει σ' αυτή την περίπτωση.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι με μία επιπλέον συνθήκη η (4.6) ισχύει.

Θεώρημα 4.23 (Θεώρημα μονότονης σύγκλισης για φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων (ΘΜΣ)). *Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$ και υποθέτουμε ότι*

(α') $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f_n(x) \geq \cdots \geq 0$, *για κάθε* $x \in E$,

(β') $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, *για κάθε* $x \in E$.

Αν $\int_E f_1 \, \mathrm{d}m < \infty$, τότε η f είναι μετρήσιμη και

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}m = \int_E f \, \mathrm{d}m \, .$$

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για την $(f_1 - f_n)$ που είναι μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο E. Όμως μπορεί οι συναρτήσεις $f_1 - f_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, να μην είναι καλά ορισμένες στο E. Γι αυτό εργαζόμαστε ως εξής:

Επειδή $\int_E f_1 \, \mathrm{d}m < \infty$, από την Πρόταση 4.6$(vi)$ $f_1 < \infty$ $\sigma.\pi.$ στο E και επομένως το σύνολο $A := \{x \in E : f_1(x) < \infty\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο με $m(E \setminus A) = 0$. Τότε οι συναρτήσεις $f_1\chi_A - f_n\chi_A$, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι καλά ορισμένες και η $\Big(f_1\chi_A - f_n\chi_A\Big)$ είναι αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο E με

$$\lim_{n\to\infty} \Big(f_1\chi_A - f_n\chi_A\Big) = f_1\chi_A - f\chi_A \, .$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \Big(f_1\chi_A - f_n\chi_A\Big) \, \mathrm{d}m = \int_E \Big(f_1\chi_A - f\chi_A\Big) \, \mathrm{d}m \, .$$

Επειδή $\int_E f_n\chi_A \, \mathrm{d}m \leq \int_E f_1\chi_A \, \mathrm{d}m < \infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\int_E f\chi_A \, \mathrm{d}m \leq \int_E f_1\chi_A \, \mathrm{d}m < \infty$, απο την Πρόταση 4.12(γ')

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_E f_1\chi_A \, \mathrm{d}m - \int_E f_n\chi_A \, \mathrm{d}m\right) = \int_E f_1\chi_A \, \mathrm{d}m - \int_E f\chi_A \, \mathrm{d}m$$

και επομένως

$$\int_E f_1 \chi_A \,\mathrm{d}m - \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \chi_A \,\mathrm{d}m = \int_E f_1 \chi_A \,\mathrm{d}m - \int_E f \chi_A \,\mathrm{d}m\,.$$

Όμως $\int_E f_1 \chi_A \,\mathrm{d}m < \infty$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \chi_A \,\mathrm{d}m = \int_E f \chi_A \,\mathrm{d}m \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \,\mathrm{d}m = \int_A f \,\mathrm{d}m\,.$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_E f_n \,\mathrm{d}m = \int_A f_n \,\mathrm{d}m + \int_{E\setminus A} f_n \,\mathrm{d}m = \int_A f_n \,\mathrm{d}m$$

και παρόμοια $\int_E f \,\mathrm{d}m = \int_A f \,\mathrm{d}m$, τελικά έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m = \int_E f \,\mathrm{d}m\,.$$

□

Παρατήρηση 4.24. *Εύκολα αποδεικνύεται ότι το προηγούμενο θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που η ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων (f_n) είναι φθίνουσα σχεδόν παντού στο E με $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in E$.*

Ερώτημα 2: Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$. Αν η (f_n) συγκλίνει σημειακά σε μια πραγματική συνάρτηση, υπάρχει σχέση η οποία να συνδέει την ακολουθία $\left(\int_E f_n \,\mathrm{d}m\right)_{n=1}^{\infty}$ με το $\int_E \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}m$; Όμως το $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m$ μπορεί να μην υπάρχει και επομένως η (4.6) μπορεί να μην έχει έννοια. Το επόμενο αποτέλεσμα δημοσιεύτηκε το 1906 από τον P. Fatou [25] και δίνει μια απάντηση σ' αυτό το ερώτημα.

Θεώρημα 4.25 (Λήμμα Fatou). *Αν (f_n) είναι ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$, τότε*

$$\int_E \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}m \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m\,. \tag{4.7}$$

Απόδειξη. Αν $g_n(x) := \inf_{k\geq n} f_k(x)$, τότε

$$g_1 \leq g_2 \leq \cdots \leq g_n \leq \cdots$$

και οι συναρτήσεις g_n, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι μετρήσιμες. Επειδή $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$, είναι

$$\int_E g_n \,\mathrm{d}m \leq \int_E f_k \,\mathrm{d}m\,, \quad \text{για κάθε } k \geq n\,.$$

Επομένως

$$\int_E g_n \,\mathrm{d}m \leq \inf_{k\geq n} \int_E f_k \,\mathrm{d}m\,.$$

Όμως $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf\limits_{k\geq n} f_k\right)$, οπότε

$$\begin{aligned}
\int_E \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}m &= \int_E \lim_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}m \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \,\mathrm{d}m \qquad\qquad \text{(θεώρημα μονότονης σύγκλισης)} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} \int_E f_k \,\mathrm{d}m\right) = \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Το παρακάτω παράδειγμα αποδεικνύει ότι είναι δυνατόν να έχουμε ανισότητα στην (4.7).

Παράδειγμα 4.26. *Έστω (f_n), $f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty]$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων με*

$$f_n = \begin{cases} \chi_E & \text{αν } n = 2k+1\,, \\ 1 - \chi_E & \text{αν } n = 2k\,, \end{cases}$$

όπου $E \in \mathcal{M}$. Επειδή $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = 0$, είναι $\int_{\mathbb{R}} \liminf\limits_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}m = 0$.
Όμως $\int_{\mathbb{R}} \chi_E \,\mathrm{d}m = m(E)$ και $\int_{\mathbb{R}} \left(1 - \chi_E\right) \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} \chi_{E^c} \,\mathrm{d}m = m(E^c)$, οπότε

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}m = \begin{cases} m(E) & \text{αν } n = 2k+1\,, \\ m(E^c) & \text{αν } n = 2k\,. \end{cases}$$

Επομένως, $\liminf\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}m = m(E)$ ή $m(E^c)$. Αν το σύνολο σύνολο $E \in \mathcal{M}$ είναι τέτοιο ώστε $m(E) \neq 0$ και $m(E^c) \neq 0$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}m = 0 < \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}m\,.$$

Παράδειγμα 4.27. *Υποθέτουμε ότι* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, *όπου* $f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ *είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}m < \infty\,.$$

Τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m = \int_E f \,\mathrm{d}m\,, \quad \text{για κάθε} \quad E \in \mathcal{M}\,.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned}
\int_E f \,\mathrm{d}m &\le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m && \text{(λήμμα Fatou)}\\
&\le \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m\\
&= \limsup_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}m - \int_{\mathbb{R}\setminus E} f_n \,\mathrm{d}m \right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}m + \limsup_{n\to\infty} \left(- \int_{\mathbb{R}\setminus E} f_n \,\mathrm{d}m \right)\\
&= \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}m - \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus E} f_n \,\mathrm{d}m\\
&\le \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}m - \int_{\mathbb{R}\setminus E} \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}m && \text{(λήμμα Fatou)}\\
&= \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}m - \int_{\mathbb{R}\setminus E} f \,\mathrm{d}m = \int_E f \,\mathrm{d}m\,.
\end{aligned}$$

Άρα, $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m = \int_E f \,\mathrm{d}m$. □

Σημείωση. Στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι αν (x_n), (y_n) είναι δύο πραγματικές ακολουθίες και το $\lim_{n\to\infty} x_n$ υπάρχει, τότε

$$\limsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n\,.$$

Ορισμός 4.28. *Θα λέμε ότι η μετρήσιμη συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ *είναι* **Lebesgue ολοκληρώσιμη στο** $E \in \mathcal{M}$, *αν*

$$\int_E f \,\mathrm{d}m < \infty\,.$$

Αν η $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και $F(x) := \int_{(-\infty,x]} f \,\mathrm{d}m$, τότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μπορεί να αποδειχθεί ότι η F είναι συνεχής. Δηλαδή, ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F(x) - F(x_0) = \int_{(x_0,x]} f \,\mathrm{d}m < \varepsilon$ για κάθε $x \ge x_0$, με $x - x_0 < \delta$ και παρόμοια $F(x_0) - F(x) = \int_{(x,x_0]} f \, \mathrm{d}m < \varepsilon$ για κάθε $x < x_0$, με $x_0 - x < \delta$. Όμως αυτό είναι ειδική περίπτωση του παρακάτω πιο γενικού αποτελέσματος.

Πρόταση 4.29 (Απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος). *Έστω $f : E \to [0, \infty]$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$ με $m(A) < \delta$ είναι*

$$\int_A f \, \mathrm{d}m < \varepsilon \, .$$

Απόδειξη. *<u>1ος τρόπος</u>.* Η απόδειξη είναι προφανής αν η f είναι φραγμένη. Στην αντίθετη περίπτωση, έστω

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } f(x) \leq n \, , \\ n & \text{διαφορετικά} \, , \end{cases}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε, για κάθε $x \in E$ είναι $f_n(x) \leq n$ και η (f_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων(γιατί;) συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Επομένως, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\int_E (f - f_N) \, \mathrm{d}m = \int_E f \, \mathrm{d}m - \int_E f_N \, \mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Άρα, για $\delta < \varepsilon/2N$ και για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$ με $m(A) < \delta$ έχουμε

$$\int_A f \, \mathrm{d}m = \int_A (f - f_N) \, \mathrm{d}m + \int_A f_N \, \mathrm{d}m \leq \int_E (f - f_N) \, \mathrm{d}m + N m(A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \, .$$

<u>2ος τρόπος</u>. Αν $f = b\chi_B$, όπου $b > 0$ και B είναι ένα μετρήσιμο σύνολο, τότε

$$\int_A b\chi_B \, \mathrm{d}m = b \cdot m(A \cap B) \leq b \cdot m(A) < \varepsilon \, ,$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$, με $m(A) < \delta = \varepsilon/b$ και η πρόταση ισχύει σ' αυτή την περίπτωση. Επομένως η πρόταση ισχύει και όταν η $f = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{B_i}$, δηλαδή η f είναι μια απλή και μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο E.

Έστω τώρα η f είναι μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο E και έστω $\varepsilon > 0$. Αν $A \subseteq E$ είναι ένα μετρήσιμο σύνολο, από τον Ορισμό 4.4 υπάρχει απλή συνάρτηση s, με $0 \leq s \leq f$

στο A, τέτοια ώστε $\int_A (f-s)\,\mathrm{d}m < \varepsilon/2$. Επειδή η πρόταση ισχύει για απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$ με $m(A) < \delta$ είναι $\int_A s\,\mathrm{d}m < \varepsilon/2$. Άρα,

$$\int_A f\,\mathrm{d}m = \int_A (f-s)\,\mathrm{d}m + \int_A s\,\mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$, με $m(A) < \delta$. □

Παραπέμπουμε στην άσκηση 42 για μια διαφορετική απόδειξη της Πρότασης 4.29 και στην άσκηση 43 για μια γενίκευση της Πρότασης 4.29.

4.2 Ολοκλήρωση Πραγματικών Συναρτήσεων

Αν η $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, τότε ως γνωστόν και οι $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$ είναι μετρήσιμες μη αρνητικές συναρτήσεις. Επομένως, από την προηγούμενη παράγραφο τα ολοκληρώματα $\int_{\mathbb{R}} f^+\,\mathrm{d}m$ και $\int_{\mathbb{R}} f^-\,\mathrm{d}m$ ορίζονται(υπάρχουν) και είναι μη αρνητικά (τα ολοκληρώματα μπορεί να παίρνουν και την τιμή $+\infty$). Αν ένα τουλάχιστον από τα ολοκληρώματα $\int_{\mathbb{R}} f^+\,\mathrm{d}m$ και $\int_{\mathbb{R}} f^-\,\mathrm{d}m$ είναι πεπερασμένο, επειδή $f = f^+ - f^-$, ορίζουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m := \int_{\mathbb{R}} f^+\,\mathrm{d}m - \int_{\mathbb{R}} f^-\,\mathrm{d}m$$

και λέμε ότι **το ολοκλήρωμα** $\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m$ **υπάρχει**. Αν το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m$ υπάρχει, τότε

$$-\infty \leq \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m \leq \infty\,.$$

Ορισμός 4.30. *Λέμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι* **Lebesgue ολοκληρώσιμη**, *ή απλά* **ολοκληρώσιμη στο** $\mathbb{R}$, *αν το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο, δηλαδή αν $\int_{\mathbb{R}} f^-\,\mathrm{d}m < \infty$ και $\int_{\mathbb{R}} f^+\,\mathrm{d}m < \infty$.*

Επειδή $|f| = f^+ + f^-$, έχουμε τις εξής ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned}
\text{Η } f \text{ είναι ολοκληρώσιμη} &\iff \text{Οι } f^- \text{ και } f^+ \text{ είναι ολοκληρώσιμες} \\
&\iff \int_{\mathbb{R}} f^- \,\mathrm{d}m < \infty \text{ και } \int_{\mathbb{R}} f^+ \,\mathrm{d}m < \infty \\
&\iff \int_{\mathbb{R}} f^- \,\mathrm{d}m + \int_{\mathbb{R}} f^+ \,\mathrm{d}m < \infty \\
&\iff \int_{\mathbb{R}} |f| \,\mathrm{d}m < \infty \\
&\iff \text{Η } |f| \text{ είναι ολοκληρώσιμη}\,.
\end{aligned}$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\int_{\mathbb{R}} |f| \;\mathrm{d}m < \infty$.

Αν το E είναι μετρήσιμο σύνολο, παρόμοια ορίζουμε

$$\int_E f \,\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} f\chi_E \,\mathrm{d}m = \int_E f^+ \,\mathrm{d}m - \int_E f^- \,\mathrm{d}m\,,$$

αρκεί ένα τουλάχιστον από τα ολοκληρώματα $\int_E f^- \,\mathrm{d}m$ και $\int_E f^+ \,\mathrm{d}m$ να είναι πεπερασμένο. Αν η f ορίζεται στο E, τότε θέτουμε $f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus E$, οπότε $\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}m = \int_E f \,\mathrm{d}m$. Σε κάθε περίπτωση, το ολοκλήρωμα $\int_E f \,\mathrm{d}m$ εξαρτάται μόνο από τον περιορισμό της f στο E. Αν $\int_E |f| \,\mathrm{d}m < \infty$, τότε θα λέμε ότι **η f είναι ολοκληρώσιμη στο** E.

Συμβολίζουμε με $L_1(\mathbb{R})$ την οικογένεια όλων των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$. Αν το E είναι μετρήσιμο σύνολο, με $L_1(E)$ συμβολίζουμε την οικογένεια όλων των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο E. Ισοδύναμα, ο $L_1(E)$ αποτελείται από τις συναρτήσεις της μορφής $f\chi_E$, όπου η $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη και η $f\chi_E$ είναι ολοκληρώσιμη.

Παρατήρηση 4.31. *Αν $f \in L_1(I)$, όπου I είναι ένα από τα διασήματα (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ και $[a, b]$, τότε χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό*

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \;\text{ αντί για }\; \int_I f \,\mathrm{d}m\,.$$

Επειδή το μέτρο Lebesgue ενός μονοσυνόλου είναι 0, δεν έχει έχει καμία διαφορά σε ποιο από τα παραπάνω τέσσερα διαστήματα ολοκληρώνουμε.

Πρόταση 4.32. *Αν $f \in L_1(E)$, όπου $E \in \mathcal{M}$, τότε $|f(x)| < \infty$ σ.π. στο E.*

Απόδειξη. Επειδή $|f(x)| \geq 0$, η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.6 (vi). □

Πρόταση 4.33. *Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμες, $E \in \mathcal{M}$.*

(α΄) Αν τα ολοκληρώματα $\int_E f\,\mathrm{d}m$, $\int_E g\,\mathrm{d}m$ υπάρχουν και $f \leq g$ σ.π. στο E, τότε

$$\int_E f\,\mathrm{d}m \leq \int_E g\,\mathrm{d}m\,.$$

Ειδικά, αν $f = g$ σ.π. στο E, τότε $\int_E f\,\mathrm{d}m = \int_E g\,\mathrm{d}m$.

(β΄) Αν το $\int_{E_2} f\,\mathrm{d}m$ υπάρχει και $E_1 \subset E_2$, $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, τότε και το $\int_{E_1} f\,\mathrm{d}m$ υπάρχει.

Απόδειξη. (α΄) Αν $f \leq g$ σ.π., τότε $0 \leq f^+ \leq g^+$ και $0 \leq g^- \leq f^-$ σ.π. στο E. Επομένως, από την Πρόταση 4.17 έχουμε

$$\int_E f^+\,\mathrm{d}m \leq \int_E g^+\,\mathrm{d}m \quad \text{και} \quad \int_E f^-\,\mathrm{d}m \geq \int_E g^-\,\mathrm{d}m\,.$$

Άρα,

$$\int_E f\,\mathrm{d}m = \int_E f^+\,\mathrm{d}m - \int_E f^-\,\mathrm{d}m \leq \int_E g^+\,\mathrm{d}m - \int_E g^-\,\mathrm{d}m = \int_E g\,\mathrm{d}m\,.$$

(β΄) Αν το $\int_{E_2} f\,\mathrm{d}m$ υπάρχει, τότε ένα τουλάχιστον από τα $\int_{E_2} f^-\,\mathrm{d}m$, $\int_{E_2} f^+\,\mathrm{d}m$ είναι πεπερασμένο. Επομένως, ένα τουλάχιστον από τα $\int_{E_1} f^+\,\mathrm{d}m$, $\int_{E_1} f^-\,\mathrm{d}m$ είναι πεπερασμένο. Δηλαδή το $\int_{E_1} f\,\mathrm{d}m$ υπάρχει.

□

Πρόταση 4.34 (Η σ-αθροιστικότητα της ολοκλήρωσης). *Έστω η συνάρτηση $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη, $E \in \mathcal{M}$. Αν το ολοκλήρωμα $\int_E f\,\mathrm{d}m$ υπάρχει και $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, όπου τα E_k είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα, τότε τα ολοκληρώματα $\int_{E_k} f\,\mathrm{d}m$, $k \in \mathbb{N}^*$, υπάρχουν και*

$$\int_E f\,\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f\,\mathrm{d}m\,.$$

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση τα $\int_{E_k} f \,\mathrm{d}m$, $k \in \mathbb{N}^*$, υπάρχουν και επομένως ένα τουλάχιστον από τα $\int_{E_k} f^- \,\mathrm{d}m$ και $\int_{E_k} f^+ \,\mathrm{d}m$ είναι πεπερασμένο. Από το Θεώρημα 4.15

$$\int_E f \,\mathrm{d}m = \int_E f^+ \,\mathrm{d}m - \int_E f^- \,\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^+ \,\mathrm{d}m - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^- \,\mathrm{d}m$$

και επειδή μία τουλάχιστον από τις παραπάνω σειρές έχει πεπερασμένο άθροισμα, έχουμε

$$\int_E f \,\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{E_k} f^+ \,\mathrm{d}m - \int_{E_k} f^- \,\mathrm{d}m \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f \,\mathrm{d}m\,.$$

□

Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει (βλέπε άσκηση 26).

Πρόταση 4.35. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη, $E \in \mathcal{M}$. Αν $m(E) = 0$ ή $f = 0$ σ.π. στο E, τότε $\int_E f \,\mathrm{d}m = 0$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι απλή εφαρμογή της Πρότασης 4.6 (iii) ή της Πρότασης 4.9 για τις συναρτήσεις f^+ και f^-. □

Πρόταση 4.36. *Αν $f \in L_1(E)$, $E \in \mathcal{M}$, τότε*

$$\left| \int_E f \,\mathrm{d}m \right| \leq \int_E |f| \,\mathrm{d}m\,.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\left| \int_E f \,\mathrm{d}m \right| = \left| \int_E f^+ \,\mathrm{d}m - \int_E f^- \,\mathrm{d}m \right| \leq \int_E f^+ \,\mathrm{d}m + \int_E f^- \,\mathrm{d}m = \int_E |f| \,\mathrm{d}m\,.$$

□

Πρόταση 4.37. *Έστω $f, g \in L_1(E)$, $E \in \mathcal{M}$ και τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Τότε $\alpha f + \beta g \in L_1(E)$ και*

$$\int_E (\alpha f + \beta g) \, \mathrm{d}m = \alpha \int_E f \, \mathrm{d}m + \beta \int_E g \, \mathrm{d}m \, .$$

Επομένως, ο $L_1(E)$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

Απόδειξη. Είναι $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|$ $\sigma.\pi.$ (τουλάχιστον όπου οι f, g έχουν πραγματικές τιμές). Τότε

$$\int_E |\alpha f + \beta g| \, \mathrm{d}m \leq \int_E (|\alpha||f| + |\beta||g|) \, \mathrm{d}m = |\alpha| \int_E |f| \, \mathrm{d}m + |\beta| \int_E |g| \, \mathrm{d}m < \infty \, .$$

Δηλαδή $\alpha f + \beta g \in L_1(E)$. Αν τώρα $f, g \in L_1(E)$,

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \ \sigma.\pi. \, ,$$

(ή τουλάχιστον όπου οι f^+, f^-, g^+ και g^- έχουν όλες πραγματικές τιμές). Επομένως,

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ \ \sigma.\pi.$$

Όμως τότε

$$\int_E \left[(f+g)^+ + f^- + g^-\right] \, \mathrm{d}m = \int_E \left[(f+g)^- + f^+ + g^+\right] \, \mathrm{d}m$$

και κατά συνέπεια

$$\int_E (f+g)^+ \, \mathrm{d}m + \int_E f^- \, \mathrm{d}m + \int_E g^- \, \mathrm{d}m = \int_E (f+g)^- \, \mathrm{d}m + \int_E f^+ \, \mathrm{d}m + \int_E g^+ \, \mathrm{d}m \, .$$

Επειδή τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_E (f+g) \, \mathrm{d}m &= \int_E (f+g)^+ \, \mathrm{d}m - \int_E (f+g)^- \, \mathrm{d}m \\
&= \int_E f^+ \, \mathrm{d}m - \int_E f^- \, \mathrm{d}m + \int_E g^+ \, \mathrm{d}m - \int_E g^- \, \mathrm{d}m \\
&= \int_E f \, \mathrm{d}m + \int_E g \, \mathrm{d}m \, .
\end{aligned}$$

Για $\alpha \geq 0$ είναι

$$\begin{aligned}\int_E (\alpha f)\ \mathrm{d}m &= \int_E (\alpha f)^+\ \mathrm{d}m - \int_E (\alpha f)^-\ \mathrm{d}m \\ &= \int_E \alpha f^+ \,\mathrm{d}m - \int_E \alpha f^- \,\mathrm{d}m \\ &= \alpha \left(\int_E f^+ \,\mathrm{d}m - \int_E f^- \,\mathrm{d}m \right) \\ &= \alpha \int_E f \,\mathrm{d}m\,.\end{aligned}$$

Στην περίπτωση που είναι $\alpha < 0$, εύκολα αποδεικνύεται ότι $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ και $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_E (\alpha f)\ \mathrm{d}m &= \int_E (\alpha f)^+\ \mathrm{d}m - \int_E (\alpha f)^-\ \mathrm{d}m \\ &= \int_E -\alpha f^-\ \mathrm{d}m - \int_E -\alpha f^+ \,\mathrm{d}m \\ &= -\alpha \int_E f^-\ \mathrm{d}m + \alpha \int_E f^+ \,\mathrm{d}m \\ &= \alpha \left(\int_E f^+\ \mathrm{d}m - \int_E f^-\ \mathrm{d}m \right) = \alpha \int_E f \,\mathrm{d}m\,.\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 4.38. *Έστω οι συναρτήσεις f και g είναι μετρήσιμες στο $E \in \mathcal{M}$, $f(x) \geq g(x)$, σ.π. στο E και $g \in L_1(E)$. Τότε το ολοκλήρωμα $\int_E f \,\mathrm{d}m$ υπάρχει και*

$$\int_E (f-g)\,\mathrm{d}m = \int_E f \,\mathrm{d}m - \int_E g \,\mathrm{d}m\,.$$

Απόδειξη. Αν $f \in L_1(E)$, η απόδειξη προκύπτει από την Πρόταση 4.37. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $f \notin L_1(E)$. Όμως το ολοκλήρωμα $\int_E f \,\mathrm{d}m$ υπάρχει επειδή από την $f^-(x) \leq g^-(x)$ $\sigma.\pi.$ στο E συνεπάγεται ότι το ολοκλήρωμα $\int_E f^- \,\mathrm{d}m$ είναι πεπερασμένο, δηλαδή $f^- \in L_1(E)$. Επομένως $\int_E f \,\mathrm{d}m = \infty$. Παρατηρούμε ότι και το ολοκλήρωμα $\int_E (f-g)\,\mathrm{d}m$ υπάρχει επειδή $f - g \geq 0$ $\sigma.\pi.$ Το γεγονός ότι $g \in L_1(E)$ συνεπάγεται ότι $f - g \notin L_1(E)$ και επομένως $\int_E (f-g)\,\mathrm{d}m = \infty$. Άρα, αν $f \notin L_1(E)$, τότε και πάλι έχουμε

$$\int_E (f-g)\,\mathrm{d}m = \infty = \int_E f \,\mathrm{d}m - \int_E g \,\mathrm{d}m\,.$$

□

Αν χρησιμοποιήσουμε τη σ-αθροιστικότητα της ολοκλήρωσης και εργαστούμε όπως και στην απόδειξη των ιδιοτήτων (δ') και (ε') του Θεωρήματος 2.6, ιδιότητες ενός σ-αθροιστικού θετικού μέτρου, τότε εύκολα αποδεικνύεται το παρακάτω αποτέλεσμα (άσκηση 27).

Πρόταση 4.39. *Έστω $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη συνάρτηση, όπου $E \in \mathcal{M}$.*

(i) Αν το ολοκλήρωμα $\int_E f \,\mathrm{d}m$ υπάρχει και η (E_n) είναι αύξουσα οικογένεια μετρήσιμων υποσυνόλων του E, τότε

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f \,\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \,\mathrm{d}m\,.$$

(ii) Αν $f \in L_1(E)$ και η (E_n) είναι φθίνουσα οικογένεια μετρήσιμων υποσυνόλων του E, τότε

$$\int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f \,\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \,\mathrm{d}m\,.$$

Παράδειγμα 4.40. *Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, όπου E μετρήσιμο σύνολο με $m(E) < \infty$. Αν*

$$E_n := \{x \in E : \, n \le |f(x)| < n+1\}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

τότε η $f \in L_1(E)$, δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη, αν και μόνο αν $\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) < \infty$.

Απόδειξη. Επειδή η $|f|$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, τα σύνολα E_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο. Είναι

$$n\chi_{E_n}(x) \le |f(x)|\chi_{E_n}(x) \le (n+1)\chi_{E_n}(x)\,,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επομένως

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\chi_{E_n}(x) \le \sum_{n=0}^{\infty} |f(x)|\chi_{E_n}(x) \le \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\chi_{E_n}(x)\,. \tag{4.8}$$

Όμως $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$, όπου τα σύνολα E_n είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο, οπότε

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}m(x) &= \int_{\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n} |f(x)|\,\mathrm{d}m(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |f(x)|\,\mathrm{d}m(x) && \text{(Θεώρημα 4.15)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_E |f(x)| \chi_{E_n}(x)\,\mathrm{d}m(x) \\
&= \int_E \sum_{n=0}^{\infty} |f(x)| \chi_{E_n}(x)\,\mathrm{d}m(x)\,. && \text{(Θεώρημα 4.13)}
\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 4.13 έχουμε

$$\int_E \sum_{n=0}^{\infty} n\chi_{E_n}(x)\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \int_E \chi_{E_n}(x)\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nm\left(E_n\right)$$

και παρόμοια

$$\int_E \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\chi_{E_n}(x)\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) m\left(E_n\right)\,.$$

Άρα, η (4.8) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) &\leq \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}m(x) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) m(E_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) + \sum_{n=0}^{\infty} m(E_n) \\
&\leq m(E_0) + 2\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n)\,.
\end{aligned}$$

Από τις παραπάνω ανισότητες είναι προφανές ότι $f \in L_1(E)$ αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n)$ συγκλίνει, δηλαδή $\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) < \infty$. □

Παράδειγμα 4.41. *Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, όπου E μετρήσιμο σύνολο με $m(E) < \infty$. Αν*

$$A_n := \{x \in E : |f(x)| \geq n\}\ , \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

τότε η $f \in L_1(E)$, δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη, αν και μόνο αν

$$\sum_{n=0}^{\infty} m(A_n) < \infty\,.$$

Απόδειξη. Είναι $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, όπου (E_k) είναι η αριθμήσιμη οικογένεια των μετρήσιμων και ξένων ανά δύο συνόλων του προηγούμενου παραδείγματος. Επομένως, $m(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} m(E_k)$ και κατά συνέπεια

$$\sum_{n=1}^{N} m(A_n) = \sum_{n=0}^{N} nm(E_n) + N \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} m(E_n)\,, \quad N \in \mathbb{N}^*\,. \tag{4.9}$$

Αν $f \in L_1(E)$, από το προηγούμενο παράδειγμα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n)$ συγκλίνει και επομένως

$$N \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} m(E_n) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} nm(E_n) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0\,.$$

Δηλαδή $\lim_{N\to\infty} N \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} m(E_n) = 0$ και από την (4.9) έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} m(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) < \infty\,.$$

Αντίστροφα, αν $\sum_{n=0}^{\infty} m(A_n) < \infty$, τότε από την (4.9) για κάθε $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=0}^{N} nm(E_n) = \sum_{n=1}^{N} m(A_n) - N \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} m(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$$

και επομένως $\sum_{n=0}^{\infty} nm(E_n) < \infty$. Άρα, από το προηγούμενο παράδειγμα η $f \in L_1(E)$. □

Τα θεωρήματα μονότονης σύγκλισης, Θεώρημα 4.10 και Θεώρημα 4.23, ισχύουν για μονότονες ακολουθίες μετρήσιμων και μη αρνητικών συναρτήσεων σ' ένα σύνολο $E \in \mathcal{M}$. Επεκτείνουμε τώρα αυτά τα αποτελέσματα και στην περίπτωση των μονότονων ακολουθιών μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων σ' ένα σύνολο $E \in \mathcal{M}$.

Θεώρημα 4.42 (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης (ΘΜΣ)). *Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$.*

(i) Αν $f_n \nearrow f$ σ.π. στο E και υπάρχει $\phi \in L_1(E)$ τέτοια ώστε $f_n \geq \phi$ σ.π. στο E για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m = \int_E f \,\mathrm{d}m\,.$$

(ii) Αν $f_n \searrow f$ σ.π. στο E και υπάρχει $\phi \in L_1(E)$ τέτοια ώστε $f_n \leq \phi$ σ.π. στο E για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m = \int_E f \,\mathrm{d}m\,.$$

Απόδειξη. (i) Λόγω της Πρότασης 4.35 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_n \nearrow f$ και $f_n \geq \phi$ παντού στο E. Τότε η $(f_n - \phi)$ είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων και μη αρνητικών συναρτήσεων στο E με

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x) - \phi(x)) = f(x) - \phi(x)\,, \quad \text{για κάθε } x \in E.$$

Από το κλασικό θεώρημα μονότονης σύγκλισης, Θεώρημα 4.10, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (f_n - \phi)\, \mathrm{d}m = \int_E (f - \phi)\, \mathrm{d}m\,.$$

Επειδή $f_n \geq \phi$ και $f \geq \phi$ παντού στο E και η $\phi \in L_1(E)$, από το Πόρισμα 4.38 είναι

$$\int_E (f_n - \phi)\ \mathrm{d}m = \int_E f_n\, \mathrm{d}m - \int_E \phi\, \mathrm{d}m \quad \text{και} \quad \int_E (f - \phi)\ \mathrm{d}m = \int_E f\, \mathrm{d}m - \int_E \phi\, \mathrm{d}m\,.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, \mathrm{d}m - \int_E \phi\, \mathrm{d}m = \int_E f\, \mathrm{d}m - \int_E \phi\, \mathrm{d}m$$

και επειδή $\phi \in L_1(E)$, τελικά έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, \mathrm{d}m = \int_E f\, \mathrm{d}m\,.$$

(ii) Η απόδειξη προκύπτει από τη (i) θεωρώντας τη $(-f_n)$ που είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$.

□

Θεώρημα 4.43 (Θεώρημα Ομοιόμορφης Σύγκλισης (ΘΟΣ)). *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $m(E) < \infty$. Αν η ακολουθία $f_n : E \to \mathbb{R}$, $f_n \in L_1(E)$, συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, τότε η $f \in L_1(E)$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, \mathrm{d}m = \int_E f\, \mathrm{d}m\,. \tag{4.10}$$

Απόδειξη. Επειδή $|f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)|$ και $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ομοιόμορφα στο E, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq |f_n(x)| + 1$ στο E, για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως,

$$\int_E |f(x)|\, \mathrm{d}m(x) \leq \int_E |f_n(x)|\, \mathrm{d}m(x) + m(E)\,,$$

δηλαδή η $f \in L_1(E)$. Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_E f(x)\,\mathrm{d}m(x) - \int_E f_n(x)\,\mathrm{d}m(x)\right| &= \left|\int_E (f(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}m(x)\right| && \text{(Πρόταση 4.37)}\\ &\le \int_E |f(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}m(x) && \text{(Πρόταση 4.36)}\\ &\le \left(\sup_{x\in E} |f(x) - f_n(x)|\right) m(E) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

και αυτό αποδεικνύει την (4.10). □

Θεώρημα 4.44 (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue (ΘΚΣ)). *Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$, τέτοια ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in E\,. \tag{4.11}$$

Αν υπάρχει συνάρτηση $g \in L_1(E)$ τέτοια ώστε

$$|f_n(x)| \le g(x) \text{ για κάθε } x \in E\,, \tag{4.12}$$

τότε $f \in L_1(E)$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\,\mathrm{d}m = 0\,. \tag{4.13}$$

Επίσης

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,\mathrm{d}m = \int_E f\,\mathrm{d}m\,. \tag{4.14}$$

Απόδειξη. Από την ανισότητα (4.12) έπεται ότι $f_n \in L_1(E)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Επίσης από την (4.12) είναι

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \le g(x)$$

και κατά συνέπεια η $f \in L_1(E)$. Είναι

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x)| + |f(x)| \le 2g(x)\,, \quad \text{για κάθε } x \in E$$

και επειδή $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} (2g(x) - |f_n(x) - f(x)|) = 2g(x)\,.$$

Δηλαδή η $(2g - |f_n - f|)$ είναι ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων η οποία συγκλίνει στη $2g$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_E 2g \, \mathrm{d}m &= \int_E \lim_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|) \, \mathrm{d}m \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \int_E (2g - |f_n - f|) \, \mathrm{d}m && \text{(λήμμα Fatou)} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(\int_E 2g \, \mathrm{d}m - \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}m \right) \\
&= \int_E 2g \, \mathrm{d}m + \liminf_{n\to\infty} \left(- \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}m \right) \\
&= \int_E 2g \, \mathrm{d}m - \limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}m \,.
\end{aligned}$$

Δηλαδή $\limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}m \le 0$ και αυτό συνεπάγεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}m = 0 \,.$$

Τέλος, επειδή

$$\left| \int_E f_n \, \mathrm{d}m - \int_E f \, \mathrm{d}m \right| = \left| \int_E (f_n - f) \, \mathrm{d}m \right| \le \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}m \,,$$

θα είναι και

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}m = \int_E f \, \mathrm{d}m \,.$$

□

Σημείωση. Στην προηγούμενη απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι αν (x_n), (y_n) είναι δύο πραγματικές ακολουθίες και το $\lim_{n\to\infty} x_n$ υπάρχει, τότε

$$\liminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \,.$$

Παραπέμπουμε στην άσκηση 36 για μία γενίκευση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue.

Παρατήρηση 4.45. *Το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue ισχύει και με τις εξής ασθενέστερες υποθέσεις* :
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *σ.π. στο E και υπάρχει $g \in L_1(E)$, τέτοια ώστε $|f_n(x)| \le g(x)$ σ.π. στο E.*

Πόρισμα 4.46. *Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$, τέτοια ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ σχεδόν παντού στο } E. \tag{4.15}$$

Αν υπάρχει συνάρτηση $g \in L_1(E)$ τέτοια ώστε

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ σχεδόν παντού στο } E, \tag{4.16}$$

τότε $f \in L_1(E)$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}m = 0\,. \tag{4.17}$$

Επίσης

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}m = \int_E f \, \mathrm{d}m\,. \tag{4.18}$$

Απόδειξη. Από την ανισότητα (4.16) έπεται ότι $f_n \in L_1(E)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Επίσης, επειδή $|f(x)| \leq g(x)$ $\sigma.\pi.$ στο E, η $f \in L_1(E)$. Έστω

$$E_1 = \{x \in E : |f_n(x)| \leq g(x)\} \quad \text{και} \quad E_2 = \left\{x \in E : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right\}.$$

Τότε, $m(E \setminus E_1) = m(E \setminus E_2) = 0$. Επειδή

$$m\left(E \setminus (E_1 \cap E_2)\right) = m\left((E \setminus E_1) \cup (E \setminus E_2)\right) \leq m(E \setminus E_1) + m(E \setminus E_2) = 0\,,$$

είναι $m\left(E \setminus (E_1 \cap E_2)\right) = 0$ και επομένως

$$\int_{E\setminus(E_1\cap E_2)} |f_n - f| \, \mathrm{d}m = 0\,.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ για κάθε $x \in E_1 \cap E_2$ και $|f_n(x)| \leq g(x)$ για κάθε $x \in E_1 \cap E_2$, από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_1\cap E_2} |f_n - f| \, \mathrm{d}m = 0\,.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}m &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{E\setminus(E_1\cap E_2)} |f_n - f| \, \mathrm{d}m + \int_{E_1\cap E_2} |f_n - f| \, \mathrm{d}m \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{E_1\cap E_2} |f_n - f| \, \mathrm{d}m = 0\,. \end{aligned}$$

Η απόδειξη της (4.18) είναι η ίδια με αυτήν της (4.14) στο Θεώρημα 4.44. □

Η παρακάτω ειδική περίπτωση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης χρησιμοποιείται όταν το $E \in \mathcal{M}$ έχει πεπερασμένο μέτρο.

Πόρισμα 4.47 (Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης (ΘΦΣ)). *Έστω E Lebesgue μετρήσιμο σύνολο, με $m(E) < \infty$. Αν (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο E, τέτοια ώστε*

(α) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *σχεδόν παντού στο E*

και

(β) $|f_n(x)| \leq M$ *σχεδόν παντού στο E, όπου $M > 0$ είναι μία σταθερά,*

τότε $f \in L_1(E)$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}m = \int_E f \, \mathrm{d}m \,.$$

Παρατήρηση 4.48. *Το πιο σημαντικό αποτέλεσμα του H. Lebesgue στη μονογραφία του [43] είναι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Η χρησιμότητα αυτού του θεωρήματος φαίνεται όταν συγκρίνεται με το θεώρημα Arzelà (βλέπε άσκηση 37), το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα που μπορεί να πάρει κανείς χρησιμοποιώντας τη θεωρία ολοκλήρωσης κατά Riemann. Το θεώρημα Arzelà είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue.*

Παράδειγμα 4.49. *Αν $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$, τότε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως $\int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}m = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως,*

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}m = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}m \,.$$

Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue δεν υπάρχει συνάρτηση $g \in L_1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $|f_n(x)| \leq g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν $g = \sum_{k=1}^{\infty} k\chi_{(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}$, τότε $g(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ και

$$\int_{\mathbb{R}} g \, \mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{\mathbb{R}} \chi_{(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]} \, \mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty \,.$$

Παράδειγμα 4.50. *Για κάθε φυσικό αριθμό n και για κάθε $0 \leq x \leq 1$, έστω $f_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx^2}$.*

(i) *Να υπολογιστεί το*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(ii) *Υπάρχει $\varphi \in L_1[0,1]$ τέτοια ώστε $f_n \leq \varphi$ στο $[0,1]$;*

Λύση. Όπως θα αποδειχθεί στην επόμενη παράγραφο, Θεώρημα 4.76, επειδή η f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, η f_n είναι και Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα.

(i)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx\mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_{-n}^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t && (\text{αντικατάσταση } t = -nx^2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-n}) = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

(ii) Η απάντηση είναι όχι. Ας σημειωθεί ότι για κάθε $x \in (0,1]$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{tx}{e^{tx^2}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{x}{x^2 e^{tx^2}} && (\text{κανόνας L'Hôpital}) \\
&= \frac{1}{x}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)^t = 0.
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, αν υπήρχε $\varphi \in L_1[0,1]$ τέτοια ώστε $f_n \leq \varphi$ στο $[0,1]$, τότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue θα ήταν

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \neq \frac{1}{2}$$

που είναι προφανώς άτοπο [2].

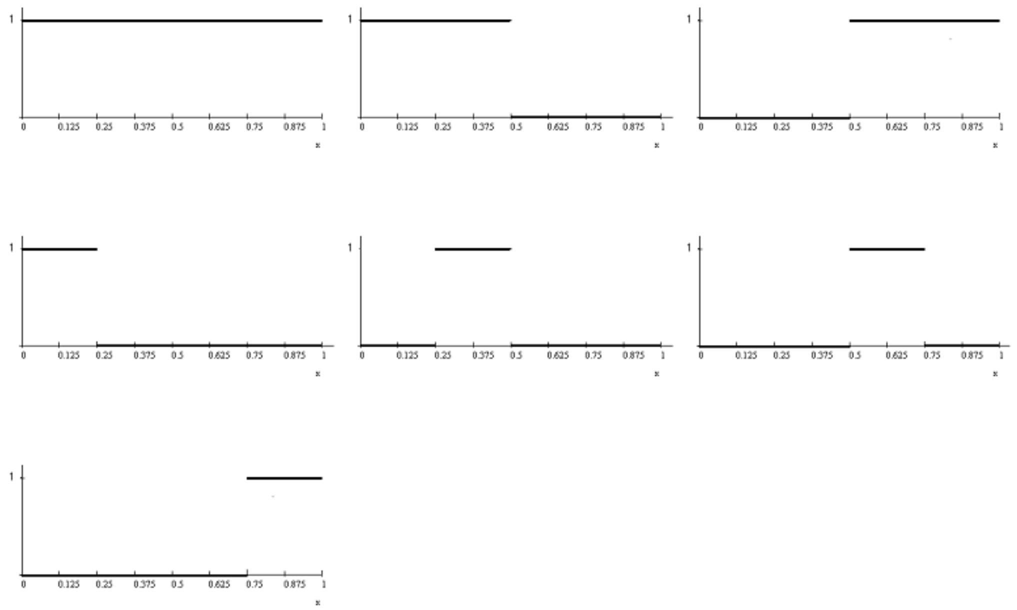
[2] Η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα ούτε και είναι ομοιόμορφα φραγμένη γιατί και πάλι θα καταλήγαμε σε άτοπο από τα θεωρήματα της ομοιόμορφης και της φραγμένης σύγκλισης.

■

Υπάρχει ακολουθία (f_n) Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$, η οποία δεν συγκλίνει σημειακά για κανένα $x \in [0,1]$, τέτοια ώστε $0 \leq f_n \leq 1$ και $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \,\mathrm{d}m = 0$. Μάλιστα οι συναρτήσεις f_n μπορεί να είναι και συνεχείς στο $[0,1]$. Ας σημειωθεί ότι αν είχαμε στην υπόθεσή μας και $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ $\sigma.\pi.$, τότε το συμπέρασμα θα ήταν συνέπεια του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue.

Παράδειγμα 4.51. *Υποθέτουμε ότι* $f_1(x) = 1$, *για κάθε* $x \in [0,1]$. *Έστω* $f_2(x) = 1$ *όταν* $x \in [0,1/2]$ *και* $f_2(x) = 0$ *για* $x \in (1/2,1]$. *Παίρνουμε* $f_3(x) = 0$ *όταν* $x \in [0,1/2)$ *και* $f_3(x) = 1$ *για* $x \in [1/2,1]$.

Στη συνέχεια ορίζουμε τις συναρτήσεις f_4, f_5, f_6 *και* f_7 *ως εξής : διαιρούμε το διάστημα σε τέσσερα ίσα υποδιαστήματα και δίνουμε στην πρώτη από αυτές τις συναρτήσεις την τιμή* 1 *για* $0 \leq x \leq 1/4$ *και* 0 *διαφορετικά, στη δεύτερη συνάρτηση την τιμή* 1 *για* $1/4 \leq x \leq 1/2$ *και* 0 *διαφορετικά, στην τρίτη συνάρτηση την τιμή* 1 *για* $1/2 \leq x \leq 3/4$ *και* 0 *διαφορετικά και στην τέταρτη συνάρτηση την τιμή* 1 *για* $3/4 \leq x \leq 1$ *και* 0 *διαφορετικά. Οι συναρτήσεις* $f_1, \ldots, f_7$ *φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.*



Κάθε φυσικός αριθμός n *γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή* $n = 2^k + j - 1$, $k \in \mathbb{N}$ *και*

$1 \leq j \leq 2^k$. *Γενικά, για* $n = 2^k + j - 1$ *η ακολουθία συναρτήσεων* (f_n) *ορίζεται στο* $[0,1]$ *ως εξής:*

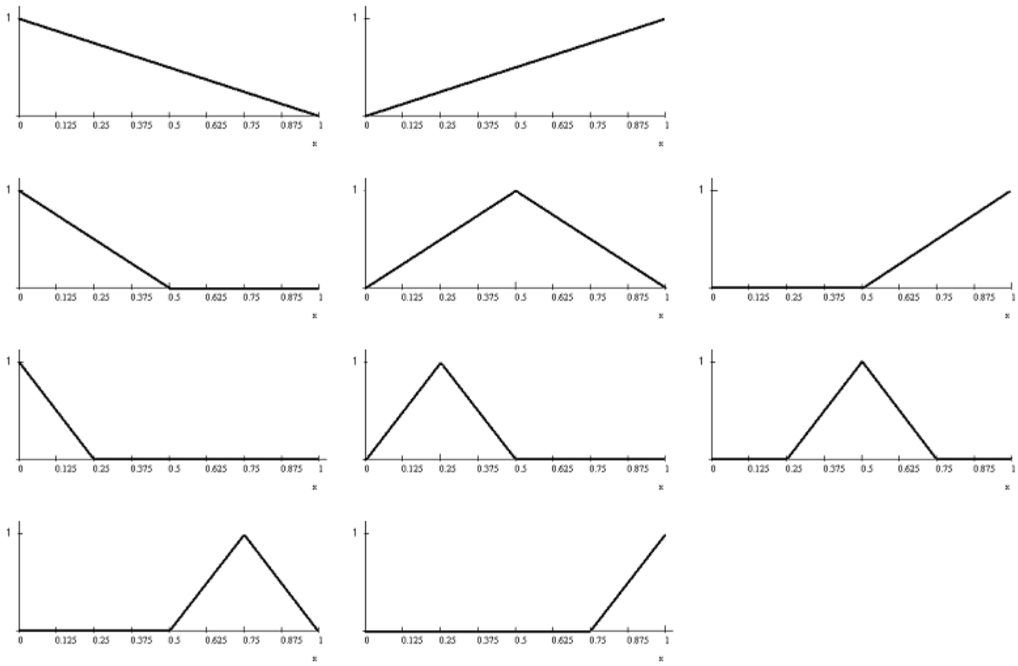
$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right], \\ 0 & \text{διαφορετικά} . \end{cases}$$

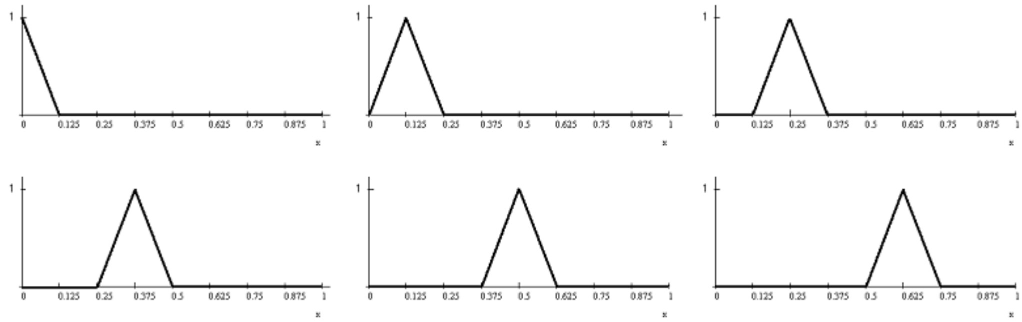
Η κάθε μία από τις συναρτήσεις με δείκτες $2^k, 2^k+1, \ldots, 2^{k+1}-1$ *παίρνει την τιμή* 1 *μόνο σ' ένα κλειστό διάστημα μήκους* $1/2^k$ *και είναι ίση με το* 0 *διαφορετικά. Επομένως αν* $n = 2^k + j - 1$, *με* $1 \leq j \leq 2^k$, *τότε*

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Η ακολουθία των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (f_n) *στο* $[0,1]$ *δεν συγκλίνει σημειακά για κανένα* $x \in [0,1]$. *Πράγματι, σε οποιοδήποτε σημείο* x *του διαστήματος* $[0,1]$ *μία ή το πολύ δύο από τις συναρτήσεις* $f_{2^k}, f_{2^k+1}, \ldots, f_{2^{k+1}-1}$ *παίρνουν την τιμή* 1 *και οι υπόλοιπες παίρνουν την τιμή* 0. *Επομένως υπάρχει μία υπακολουθία της* (f_n), *οι όροι της οποίας παίρνουν την τιμή* 1 *στο* x *και μία άλλη υπακολουθία της οποίας οι όροι παίρνουν την τιμή* 0 *στο* x.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με τις ίδιες ιδιότητες στο διάστημα $[0,1]$. *Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ο τρόπος κατασκευής των πρώτων δεκαέξι συναρτήσεων μιας ακολουθίας* (f_n) *συνεχών συναρτήσεων στο* $[0,1]$, $0 \leq f_n \leq 1$, *η οποία δεν συγκλίνει σημειακά για κανένα* $x \in [0,1]$ *και είναι τέτοια ώστε* $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \,\mathrm{d}m = 0$.





Παράδειγμα 4.52. *Έστω η συνάρτηση $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με*

$$F(x)=\int_0^{\infty}\frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue για να αποδείξουμε ότι η F είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Γι' αυτό, έστω (x_n) πραγματική ακολουθία με $\lim_{n\to\infty}x_n=x\in\mathbb{R}$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty}F(x_n)=F(x)$. Αν

$$f_n(t)=\frac{\sin(x_nt)}{1+t^2},\ f(t)=\frac{\sin(xt)}{1+t^2}\ \text{ και } g(t)=\frac{1}{1+t^2}\,,$$

τότε οι συναρτήσεις f_n, $n\geq 1$, f και g είναι συνεχείς. Είναι $f_n(t)\leq g(t)$ και $\lim_{n\to\infty}f_n(t)=f(t)$ για κάθε $t\geq 0$. Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty}g(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

συγκλίνει, θα αποδείξουμε στην παράγραφο 4.4 (Θεώρημα 4.91) ότι το ολοκλήρωμα Lebesgue της g υπάρχει στο $[0,\infty)$ και είναι $\int_{[0,\infty)}g(t)\,\mathrm{d}m(t)=\int_0^{\infty}g(t)\,\mathrm{d}t=\pi/2$. Επομένως, από το Θεώρημα 4.44

$$\lim_{n\to\infty}F(x_n)=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin(x_nt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(x_nt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=F(x)\,.$$

Παράδειγμα 4.53. *Να υπολογιστεί το όριο*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

Λύση. Έστω $f_n(x):=(1+x/n)^n\,\mathrm{e}^{-2x}\chi_{[0,n)}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$. Τότε, $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\mathrm{e}^{-x}$, για κάθε $x\geq 0$. Επειδή $\mathrm{e}^{x/n}\geq 1+x/n$ και ισοδύναμα $(1+x/n)^n\leq\mathrm{e}^{x}$, θα είναι $0\leq f_n(x)\leq(1+x/n)^n\,\mathrm{e}^{-2x}\leq\mathrm{e}^{-x}$, για κάθε $x\geq 0$. Όμως

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\lim_{r\to\infty}\int_0^{r}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\lim_{r\to\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-r}\right)=1\,.$$

Τότε, όπως θα αποδείξουμε στην παράγραφο 4.4 (Θεώρημα 4.91), η e^{-x} είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,\infty)$ και είναι $\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}m(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$. Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_{[0,n)} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}m(x)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\chi_{[0,n)}\,\mathrm{d}m(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\chi_{[0,n)}\right]\mathrm{d}m(x)\\
&= \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}m(x) = 1.
\end{aligned}$$

Όπως θα αποδειχθεί στην επόμενη παράγραφο, Θεώρημα 4.76, επειδή η $g_n(x) := (1+x/n)^n\,\mathrm{e}^{-2x}$, $n\in\mathbb{N}^*$, είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,n]$, η g_n είναι και Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,n]$ και τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα.

Σημείωση. Επειδή για $x > -n$ η ακολουθία $f_n(x) = (1+x/n)^n$ είναι γνήσια αύξουσα, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης. ■

Παράδειγμα 4.54. *Να αποδειχθεί ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^\infty \frac{n^2x\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases}\frac{1}{2} & \textit{αν } a=0\ ,\\ 0 & \textit{αν } a>0\ .\end{cases}$$

Απόδειξη. (ι) Έστω $a=0$. Με την αντικατάσταση $u=nx$

$$\int_0^\infty \frac{n^2x\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{u\mathrm{e}^{-u^2}}{1+(u/n)^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Αν $f_n(u) = \frac{u\mathrm{e}^{-u^2}}{1+(u/n)^2}\chi_{[0,\infty)}(u)$ και $f(u) = u\mathrm{e}^{-u^2}\chi_{[0,\infty)}(u)$, τότε για κάθε $u\in\mathbb{R}$ είναι $f_n(u)\le f(u)$ και $\lim_{n\to\infty} f_n(u) = f(u)$. Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty u\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ συγκλίνει, από το Θεώρημα 4.91 της παραγράφου 4.4 είναι

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\,\mathrm{d}m(u) = \int_0^\infty u\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,.$$

Δηλαδή η $f\in L_1(\mathbb{R})$. Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(u)\,\mathrm{d}m(u) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\,\mathrm{d}m(u) = \frac{1}{2}$$

και ισοδύναμα

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{n^2 x\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,.$$

(ιι) Αν $a > 0$, με την ίδια αντικατάσταση $u = nx$ έχουμε

$$\int_a^\infty \frac{n^2 x\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{na}^\infty \frac{u\mathrm{e}^{-u^2}}{1+(u/n)^2}\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} g_n(u)\,\mathrm{d}m(u)\,,$$

όπου $g_n(u) = \frac{u\mathrm{e}^{-u^2}}{1+(u/n)^2}\chi_{[na,\infty)}(u)$. Είναι $\lim_{n\to\infty} g_n(u) = 0$ και $g_n(u) \le u\mathrm{e}^{-u^2}\chi_{[0,\infty)}(u)$, για κάθε $u \in \mathbb{R}$. Και πάλι από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^\infty \frac{n^2 xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(u)\,\mathrm{d}m(u) = 0\,.$$

□

Παράδειγμα 4.55. *Έστω η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $g \in L_1\,[0,1]$. Υποθέτουμε επίσης ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι*

$$\int_0^1 g(x)\mathrm{e}^{-x/n}\,\mathrm{d}x = n\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

(i) *Να αποδειχθεί ότι*

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) *Να αποδειχθεί ότι* $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = f(0)\,.$

Απόδειξη. (i) Για κάθε $x \in [0,1]$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$\left|g(x)\mathrm{e}^{-x/n}\right| \le |g(x)|.$$

Επειδή $g \in L_1\,[0,1]$, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue συνεπάγεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)\mathrm{e}^{-x/n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\left(\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-x/n}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Επομένως, από την υπόθεση έχουμε $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) *1ος τρόπος.* Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής για τα ολοκληρώματα Riemann έχουμε

$$\begin{aligned} n\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x &= n\int_0^{1/\sqrt{n}} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x + n\int_{1/\sqrt{n}}^1 f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \\ &= nf(\xi_n)\int_0^{1/\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x + n\int_{1/\sqrt{n}}^1 f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\right) f(\xi_n) + n\int_{1/\sqrt{n}}^1 f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

για κάποιο ξ_n, με $0<\xi_n<1/\sqrt{n}$. Επειδή η f είναι συνεχής και $\lim_{n\to\infty}\xi_n=0$, από την προηγούμενη ισότητα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = f(0) + \lim_{n\to\infty} n\int_{1/\sqrt{n}}^1 f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

Όμως αν $M=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|$, είναι

$$\begin{aligned} \left| n\int_{1/\sqrt{n}}^1 f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \right| &\le n\int_{1/\sqrt{n}}^1 |f(x)|\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \\ &\le Mn\int_{1/\sqrt{n}}^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \\ &= M\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}-\mathrm{e}^{-n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = f(0)$.

2ος τρόπος. Αν η f είναι ένα πολυώνυμο και πιο γενικά αν η f έχει συνεχή παράγωγο, τότε

$$n\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = -f(x)\mathrm{e}^{-nx}\Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 f'(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = f(0)-f(1)\mathrm{e}^{-n}+\int_0^1 f'(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

Επειδή $\sup\{|f'(x)\mathrm{e}^{-nx}| : x\in[0,1]\,,\, n\in\mathbb{N}^*\} \le \max_{x\in[0,1]}|f'(x)|$, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\left[f(0)-f(1)\mathrm{e}^{-n}+\int_0^1 f'(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x\right] \\ &= f(0) + \int_0^1 f'(x)\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \\ &= f(0). \end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε ότι το ίδιο ισχύει για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση f, θα χρησιμοποιήσουμε το κλασικό θεώρημα του Weierstrass. Δηλαδή, ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε

$$\sup\{|f(x)-p(x)| : x\in[0,1]\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Όπως αποδείξαμε παραπάνω, υπάρχει $N\in\mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\left|n\int_0^1 p(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x - p(0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{για κάθε } n\geq N^*.$$

Επομένως, για κάθε $n\geq N$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left|n\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x - f(0)\right| \\
&\quad\leq \left|n\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x - n\int_0^1 p(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x\right| + \left|n\int_0^1 p(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x - f(0)\right| \\
&\quad\leq n\int_0^1 |f(x)-p(x)|\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x + \left|n\int_0^1 p(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x - p(0)\right| + |p(0)-f(0)| \\
&\quad< \frac{\varepsilon}{3}n\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\quad= \left(1-\mathrm{e}^{-n}\right)\frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα, $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = f(0)$ και κατά συνέπεια $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$.

□

Παράδειγμα 4.56. *Έστω $f:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m = c$, όπου $0<c<\infty$. Δηλαδή η $f\in L_1(\mathbb{R})$. Αν το α είναι σταθερό, $0<\alpha<\infty$, τότε το όριο*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} n\ln\left(1+(f/n)^{\alpha}\right)\,\mathrm{d}m = \begin{cases} \infty & \text{αν } 0<\alpha<1, \\ c & \text{αν } \alpha=1, \\ 0 & \text{αν } 1<\alpha<\infty. \end{cases}$$

Λύση. Επειδή από την υπόθεση $\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m = c<\infty$, από την Πρόταση 4.6($vi$) έπεται ότι $0\leq f<\infty$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $m(\{x: f(x)=\infty\})=0$. Έστω $\alpha\geq 1$. Αν $0\leq f<\infty$, επειδή $(1+x)^{\alpha}\geq 1+x^{\alpha}$ για κάθε $x\geq 0$ και $\ln(1+x)\leq x$ για κάθε $x>-1$, θα είναι

$$\ln\left(1+(f/n)^{\alpha}\right) \leq \ln\left(1+f/n\right)^{\alpha} = \alpha\ln(1+f/n) \leq \alpha(f/n).$$

Επομένως,

$$n\ln\left(1+(f/n)^{\alpha}\right)\leq \alpha f \quad \sigma.\pi., \quad \alpha\geq 1. \tag{4.19}$$

(i) Αν $\alpha = 1$ και $0 \leq f < \infty$, τότε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\ln(1+f/n) &= f \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+f/n)}{f/n} \\ &= f \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = f\,. \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}\end{aligned}$$

Είναι λοιπόν

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+f/n\right) = f \quad \sigma.\pi. \quad \text{και} \quad n\ln\left(1+(f/n)\right) \leq f \quad \sigma.\pi.$$

Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue (Πόρισμα 4.46)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n\ln\left(1+f/n\right)\, \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} f\, \mathrm{d}m = c\,.$$

(ii) Αν $\alpha > 1$ και $0 \leq f < \infty$, τότε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+(f/n)^{\alpha}\right) &= f \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+(f/n)^{\alpha}\right)}{f/n} \\ &= f \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln\left(1+t^{\alpha}\right)}{t} \\ &= f \lim_{t\to 0^+} \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha}} \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Δηλαδή $\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+(f/n)^{\alpha}\right) = 0$ $\sigma.\pi.$ και ισχύει η (4.19). Και πάλι από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n\ln\left(1+(f/n)^{\alpha}\right)\, \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} 0\, \mathrm{d}m = 0\,.$$

(iii) Έστω τώρα $0 < \alpha < 1$. Αν $0 < f < \infty$, τότε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+(f/n)^{\alpha}\right) &= f \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+(f/n)^{\alpha}\right)}{f/n} \\ &= f \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln\left(1+t^{\alpha}\right)}{t} \\ &= f \lim_{t\to 0^+} \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha}} \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\ &= \alpha f \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^{1-\alpha}+t} = \infty\,.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+(f/n)^{\alpha}\right) = \begin{cases} \infty & \text{αν } 0 < f < \infty\,, \\ 0 & \text{αν } f = 0\,. \end{cases}$$

Επειδή από την υπόθεση $\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m = c > 0$, αν $E = \{x : f(x) = 0\}$, τότε $E^c = \{x : f(x) > 0\}$ με $m(E^c) > 0$ (γιατί;). Έχουμε

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n\ln\left(1+(f/n^{\alpha}\right)\,\mathrm{d}m &\geq \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} n\ln\left(1+(f/n)^{\alpha}\right)\,\mathrm{d}m \qquad \text{(λήμμα Fatou)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+(f/n)^{\alpha}\right)\,\mathrm{d}m \\ &= \int_{E} \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+(f/n)^{\alpha}\right)\,\mathrm{d}m + \int_{E^c} \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+(f/n)^{\alpha}\right) \\ &= \int_{E} 0\,\mathrm{d}m + \int_{E^c} \infty\,\mathrm{d}m = \infty\,. \end{aligned}$$

Άρα, $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} n\ln\left(1+(f/n)^{\alpha}\right)\,\mathrm{d}m = \infty$.

■

Παράδειγμα 4.57. *Έστω $f \in L_1(E)$, $E \in \mathcal{M}$.*

1. *Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\left\{\frac{1}{n}\leq|f|\leq n\right\}} |f|\,dm = \int_E |f|\,dm\,.$$

2. *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $A \subset E$, τέτοιο ώστε*

$$m(A) < \infty\,, \quad \sup_{x\in A}|f(x)| < \infty \ \textit{και} \ \int_{E\setminus A} |f|\,dm < \varepsilon\,.$$

Λύση.

1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έστω

$$A_n := \left\{x \in E : \frac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\right\} \quad \text{και} \quad f_n := |f|\chi_{A_n}\,.$$

Επειδή $A_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in E : 0 < |f(x)| < \infty\}$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n} = \chi_{\lim_{n\to\infty} A_n} = \chi_{\{0<|f|<\infty\}}\,.$$

Επειδή η $f \in L_1(E)$, είναι $|f| < \infty$ $\sigma.\pi.$ στο E και επομένως

$$\lim_{n\to\infty} f_n = |f|\chi_{\{0<|f|<\infty\}} = |f| \ \ \sigma.\pi. \text{ στο } E \text{ και } f_n \leq |f|, \text{ όπου } |f| \in L_1(E)\,.$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,dm = \int_E |f|\,dm \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_E |f|\chi_{A_n}\,dm = \int_E |f|\,dm$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} |f|\,dm = \int_E |f|\,dm\,.$$

<u>*Σημείωση*</u>. Επειδή $f_n = |f|\chi_{A_n} \nearrow |f|$ $\sigma.\pi.$ στο E, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

2. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}|f|\,dm = \int_E |f|\,dm$ και

$$\int_{A_n}|f|\,dm + \int_{E\setminus A_n}|f|\,dm = \int_E |f|\,dm\,,$$

έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E\setminus A_n}|f|\,dm = 0\,.$$

Επομένως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\int_{E\setminus A_{n_0}}|f|\,dm < \varepsilon\,.$$

Το A_{n_0} είναι μετρήσιμο σύνολο με $A_{n_0} \subset E$. Επειδή

$$A_{n_0} \subseteq \left\{x \in E : |f(x)| \geq \frac{1}{n_0}\right\}\,,$$

από την ανισότητα Chebyshev έχουμε

$$m(A_{n_0}) \leq m\left(\left\{x \in E : |f(x)| \geq \frac{1}{n_0}\right\}\right) \leq n_0\int_E |f|\,dm < \infty\,.$$

Επίσης, από τον ορισμό του συνόλου A_{n_0} έπεται ότι $\sup_{x\in A_{n_0}}|f(x)| \leq n_0 < \infty$.

■

Το παρακάτω χρήσιμο αποτέλεσμα, γνωστό σαν "θεώρημα Beppo Levi", είναι μια μορφή του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue για σειρές συναρτήσεων. Δημοσιεύτηκε το 1906 από τον B. Levi [45].

Θεώρημα 4.58 (Beppo Levi). *Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (f_n) μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$ είναι τέτοια ώστε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| \, \mathrm{d}m < \infty \,. \tag{4.20}$$

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο E και αν

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,, \tag{4.21}$$

η $f \in L_1(E)$ και

$$\int_E f \, \mathrm{d}m = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}m \,. \tag{4.22}$$

Επιπλέον έχουμε

$$\left| \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \mathrm{d}m \right| \leq \int_E \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right| \, \mathrm{d}m \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| \, \mathrm{d}m \,. \tag{4.23}$$

Απόδειξη. Έστω $g := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$. Από το Θεώρημα 4.13 (ή το Θεώρημα 4.10) είναι

$$\int_E g \, \mathrm{d}m = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \, \mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| \, \mathrm{d}m < \infty \,.$$

Επομένως, από την Πρόταση 4.6 (vi) η g είναι ολοκληρώσιμη και πεπερασμένη $\sigma.\pi.$ στο E. Δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ συγκλίνει $\sigma.\pi.$ στο E που συνεπάγεται ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει $\sigma.\pi$ στο E. Έστω

$$f(x) := \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) & \text{αν η σειρά συγκλίνει ,} \\ 0 & \text{διαφορετικά .} \end{cases}$$

Θέσαμε $f(x) = 0$ για εκείνα τα $x \in E$ για τα οποία η σειρά αποκλίνει. Επειδή το σύνολο αυτών των σημείων έχει μέτρο μηδέν, θα μπορούσαμε αντί για το 0 να επιλέξουμε οποιοδήποτε άλλο πραγματικό αριθμό.

Αν $g_N(x) := \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$, τότε $\lim_{N\to\infty} g_N(x) = f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in E$ και

$$|g_N(x)| \leq g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \,, \quad \text{για κάθε } N \in \mathbb{N}^*, \text{ όπου } g \in L_1(E) \,.$$

Εφαρμόζοντας για τη (g_N) το Πόρισμα 4.46, έχουμε ότι $f \in L_1(E)$ και

$$\begin{aligned}
\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \mathrm{d}m &= \int_E f \, \mathrm{d}m \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_E g_N \, \mathrm{d}m \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_E \sum_{n=1}^{N} f_n \, \mathrm{d}m \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_E f_n \, \mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}m \,.
\end{aligned}$$

Ας σημειωθεί ότι επειδή $\int_E |f_n| \, \mathrm{d}m < \infty$, δηλαδή $f_n \in L_1(E)$, $n \in \mathbb{N}^*$, απο την Πρόταση 4.37 είναι

$$\int_E \sum_{n=1}^{N} f_n \, \mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{N} \int_E f_n \, \mathrm{d}m \,.$$

Επειδή η $f \in L_1(E)$, θα είναι $\left|\int_E f \, \mathrm{d}m\right| \leq \int_E |f| \, \mathrm{d}m$ και επομένως

$$\left| \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \mathrm{d}m \right| \leq \int_E \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right| \, \mathrm{d}m \leq \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \, \mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| \, \mathrm{d}m \,.$$

□

Παρατήρηση 4.59. *Όλα τα προηγούμενα θεωρήματα και προτάσεις αυτής της παραγράφου διατυπώθηκαν για μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις. Όμως αυτά τα αποτελέσματα ισχύουν και στην περίπτωση που οι συναρτήσεις είναι μετρήσιμες και έχουν μιγαδικές τιμές. Αυτό είναι προφανές αν θεωρήσουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των συναρτήσεων.*

Παράδειγμα 4.60. *Αν $f_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$, $x \in (0,1)$, τότε*

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}m(x) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x) \, \mathrm{d}m(x) \,.$$

Επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n(x)| \, \mathrm{d}m(x) = \infty$.

Λύση. Οι συναρτήσεις f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι συνεχείς στο $(0,1)$. Όπως θα αποδείξουμε στο Θεώρημα 4.76 της επόμενης παραγράφου, το ολοκλήρωμα Riemann της f_n στο $[0,1]$ ισούται με το ολοκλήρωμα Lebesgue της f_n στο $[0,1]$. Επειδή για κάθε $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \big(nx^{n-1} - (n+1)x^n\big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \big(nx^{n-1} - (n+1)x^n\big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \big(1 - (N+1)x^N\big) = 1\,,\end{aligned}$$

είναι $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) = 1$. Όμως

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_0^1 \big(nx^{n-1} - (n+1)x^n\big)\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

οπότε $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) = 0$. Είναι λοιπόν,

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) = 1 \neq 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}m(x)\,.$$

Επομένως, το θεώρημα B. Levi συνεπάγεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}m(x) = \infty$. Πράγματι, επειδή $f_n(x) \geq 0$, για $0 < x \leq n/(n+1)$ και $f_n(x) \leq 0$, για $n/(n+1) \leq x \leq 1$, έχουμε

$$\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{n/(n+1)} f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_{n/(n+1)}^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^n}\,.$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^n} = \infty\,.$$

■

Παράδειγμα 4.61. *Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^a x^n$ συγκλίνει σε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[-1,1]$;*

Λύση. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^a x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 1$ και επομένως συγκλίνει απόλυτα για $x \in (-1,1)$. Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[-1,1]} |n^a x^n|\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^a \int_{[-1,1]} |x|^n\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^a 2 \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^a}{n+1}\,.$$

<u>(*i*) $a < 0$</u>. Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^a/(n+1)}{1/n^{1-a}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 2$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-a}}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^a}{n+1}$. Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[-1,1]} |n^a x^n| \,\mathrm{d}x < \infty$$

και από το θεώρημα B. Levi το άθροισμα της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} n^a x^n$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

<u>*(ii)* $a \geq 0$</u>. Τώρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-a}} = \infty$ οπότε με σύγκριση, όπως και προηγουμένως, θα είναι και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^a}{n+1} = \infty$. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} n^a x^n$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1,1]$. Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} n^a x^n$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και από το Θεώρημα 4.13

$$\int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{\infty} n^a x^n dm(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^a \int_0^1 x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{n+1} = \infty\,,$$

που είναι άτοπο. Επομένως, η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^a x^n$ δεν είναι ολοκληρώσιμη για $a \geq 0$. ∎

Παράδειγμα 4.62. *Η συνάρτηση Bessel τάξης 0 ορίζεται ως εξής*

$$J_0(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n (n!)^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Αν $s > 1$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της J_0 είναι

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-sx} J_0(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{\Gamma(2n+1)}{(2n)! s^{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\,.$$

Λύση. Είναι $\binom{-1/2}{0} = 1$ και επαγωγικά αποδεικνύεται ότι

$$\left|\binom{-1/2}{n}\right| = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} < 1\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

Επομένως, για κάθε $x \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \mathrm{e}^{-sx}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \mathrm{e}^{-sx} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)!} \mathrm{e}^{-sx} = \mathrm{e}^{(1-s)x}\,.$$

Από το Θεώρημα 4.13

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left|\binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \mathrm{e}^{-sx}\right| \mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left|\binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \mathrm{e}^{-sx}\right| \mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{(1-s)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-s} < \infty\,.\end{aligned}$$

Επειδή
$$\mathrm{e}^{-sx}J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\mathrm{e}^{-sx}\,, \quad x\in\mathbb{R}\,,$$
έχουμε
$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-sx}J_0(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{1}{(2n)!}\int_0^{\infty}x^{2n}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x && \text{(θεώρημα B. Levi)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{1}{(2n)!s^{2n+1}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{2n}\,\mathrm{d}t && \text{(αντικατάσταση } x=t/s\text{)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{\Gamma(2n+1)}{(2n)!s^{2n+1}} \\
&= \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(\frac{1}{s^2}\right)^n \\
&= \frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-1/2} && \text{(διωνυμική σειρά)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\,.
\end{aligned}$$

Ας σημειωθεί ότι επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα της $f(x) = \mathrm{e}^{-sx}J_0(x)$ συγκλίνει απόλυτα στο $[0,\infty)$, από το Θεώρημα 4.91 η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,\infty)$ και τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα. ■

Παράδειγμα 4.63. *Έστω $1 < k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και έστω*
$$f_N(x) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x}\,.$$

(α′) Να αποδειχθεί ότι
$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left|f_{m^2}(x)\right|^2dx = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} < \infty\,.$$

(β′) Αν $m^2 \le N < (m+1)^2$, να αποδειχθεί ότι
$$\left|f_N(x) - \frac{m^2}{N}f_{m^2}(x)\right| < \frac{2}{\sqrt{N}}\,. \tag{4.24}$$

(γ′) Χρησιμοποιώντας τις (α′) και (β′) να αποδειχθεί ότι $\lim_{N\to\infty} f_N(x) = 0$ σ.π.

Απόδειξη. (α΄) Επειδή

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_r-k_s)x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{αν } r = s\ , \\ 0 & \text{αν } r \neq s\ , \end{cases}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_{m^2}(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{m^2}\sum_{r=1}^{m^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_r x}\right)\left(\frac{1}{m^2}\sum_{s=1}^{m^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_s x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{m^4}\sum_{r=1}^{m^2}\sum_{s=1}^{m^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_r-k_s)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m^2}\,.\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}|f_{m^2}(x)|^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} < \infty$$

και αυτό αποδεικνύει την (α΄). Από το θεώρημα B. Levi η σειρά $\sum_{m=1}^{\infty}|f_{m^2}(x)|^2$ συγκλίνει $\sigma.\pi.$ και επομένως $\lim_{m\to\infty} f_{m^2}(x) = 0$ $\sigma.\pi.$

(β΄) Για $N = m^2$ η (4.24) προφανώς ισχύει. Αν $m^2 < N < (m+1)^2$, τότε

$$\begin{aligned}\left|f_N(x) - \frac{m^2}{N}f_{m^2}(x)\right| &= \frac{1}{N}\left|\sum_{n=m^2+1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x}\right| \\ &\leq \frac{N-m^2}{N} \\ &\leq \frac{(m+1)^2-1-m^2}{N} \\ &= \frac{2m}{N} < \frac{2\sqrt{N}}{N} = \frac{2}{\sqrt{N}}\,.\end{aligned}$$

(γ΄) Από τη διπλή ανισότητα $m^2 \leq N < (m+1)^2$ έπεται ότι

$$1 - \frac{1}{N} - \frac{2}{\sqrt{N}} < \frac{m^2}{N} \leq 1\,.$$

Επομένως, $\lim_{N\to\infty}\frac{m^2}{N} = 1$. Επειδή από την (α΄) έχουμε ότι $\lim_{m\to\infty} f_{m^2}(x) = 0$ $\sigma.\pi.$, η (4.24) συνεπάγεται ότι $\lim_{N\to\infty} f_N(x) = 0$ $\sigma.\pi.$

□

Για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις έχει αποδειχθεί, βλέπε Πρόταση 4.9, ότι $\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$ $\sigma.\pi.$ Γενικά αυτό δεν ισχύει για πραγματικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Έστω για παράδειγμα $f(x) = \chi_{[0,\pi]}(x)\cos x$. Τότε η f δεν είναι μηδέν $\sigma.\pi.$ ενώ

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,\pi]}(x)\cos x \,\mathrm{d}m(x) = \int_0^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Αν όμως $f \in L_1(\mathbb{R})$, τότε θα αποδείξουμε ότι $f = 0$ $\sigma.\pi.$ αν και μόνο αν $\int_E f \,\mathrm{d}m = 0$, για κάθε $E \in \mathcal{M}$.

Λήμμα 4.64. *Αν $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες*

(i) $f = g$ $\sigma.\pi.$

(ii) $\int_{\mathbb{R}} |f-g| \,\mathrm{d}m = 0$.

(iii) $\int_E f \,\mathrm{d}m = \int_E g \,\mathrm{d}m\,,$ *για κάθε $E \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Από την Πρόταση 4.9

$$\int_{\mathbb{R}} |f-g| \,\mathrm{d}m = 0 \Leftrightarrow |f-g| = 0 \;\sigma.\pi. \Leftrightarrow f = g \;\sigma.\pi.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Είναι

$$\left|\int_E f \,\mathrm{d}m - \int_E g \,\mathrm{d}m\right| = \left|\int_E (f-g) \,\mathrm{d}m\right| \leq \int_E |f-g| \,\mathrm{d}m \leq \int_{\mathbb{R}} |f-g| \,\mathrm{d}m = 0\,,$$

οπότε

$$\int_E f \,\mathrm{d}m = \int_E g \,\mathrm{d}m\,.$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Έστω $E = \{x \in \mathbb{R} : f(x) - g(x) \geq 0\}$. Τότε $E, E^c \in \mathcal{M}$ και επομένως

$$\int_{\mathbb{R}} |f-g| \,\mathrm{d}m = \int_E |f-g| \,\mathrm{d}m + \int_{E^c} |f-g| \,\mathrm{d}m = \int_E (f-g) \,\mathrm{d}m - \int_{E^c} (f-g) \,\mathrm{d}m = 0\,.$$

□

Σκοπός μας τώρα είναι να ορίσουμε μία νόρμα στο χώρο $L_1(E)$, όπου $E \in \mathcal{M}$.

Ορισμός 4.65. *Έστω X ένας πραγματικός (ή μιγαδικός) διανυσματικός χώρος. Η συνάρτηση $x \mapsto \|x\|$ από το X στο $\mathbb{R}$ είναι μία* **νόρμα** *στο X αν ικανοποιεί:*

(i) $\|x\| \geq 0$, *για κάθε $x \in X$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$,*

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, *για κάθε* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ή* $\mathbb{C}$*),* $x \in X$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *για κάθε* $x, y \in X$.

Ο χώρος X εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|$ λέγεται **χώρος με νόρμα**. Η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$, με $d(x,y) := \|x - y\|$, είναι προφανώς μία μετρική στο X.
Είναι φυσικό να ορίσουμε τη νόρμα στον $L_1(E)$ ως εξής

$$\|f\|_1 := \int_E |f| \, \mathrm{d}m \, .$$

Τότε η

$$d(f,g) = \int_E |f - g| \, \mathrm{d}m$$

θα ήταν μία μετρική στον $L_1(E)$. Δεν είναι όμως μία μετρική επειδή $d(f,g) = 0$ συνεπάγεται ότι $f = g$ $\sigma.\pi$ στο E (επίσης $\|f\|_1 = 0$ συνεπάγεται ότι $f = 0$ $\sigma.\pi.$ στο E). Επομένως, προκειμένου η $\|\cdot\|_1$ να είναι μία νόρμα θα πρέπει να ταυτίσουμε τις συναρτήσεις που είναι ίσες σχεδόν παντού στο E.
Ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας στον $L_1(E)$ ως εξής

$$f \sim g \;\text{ αν και μόνο αν }\; f = g \;\; \sigma.\pi. \;\text{ στο }\; E \, .$$

Έστω $f, g, h \in L_1(E)$. Είναι προφανές ότι $f \sim f$ και $f \sim g \Rightarrow g \sim f$. Επίσης $f \sim g$ και $g \sim h$ συνεπάγεται $f \sim h$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι της μορφής $[f] = \{g \in L_1(E) : \; g = f \;\; \sigma.\pi.\}$. Αν $[f]$ και $[g]$ είναι δύο κλάσεις ισοδυναμίας, τότε είτε $[f] = [g]$ ή $[f] \cap [g] = \emptyset$. Η οικογένεια $\{[f] : \; f \in L_1(E)\}$ αποτελεί μία διαμέριση του $L_1(E)$ και εύκολα φαίνεται ότι είναι ένας διανυσματικός χώρος αν ορίσουμε

$$[f] + [g] := [f + g] \;\text{ και }\; a[f] := [af] \, , \;\; \forall a \in \mathbb{R} \, (\text{ή } \mathbb{C}) \, .$$

Τώρα, η

$$\|[f]\|_1 := \int_E |f| \, \mathrm{d}m$$

είναι μία νόρμα στο διανυσματικό χώρο των κλάσεων ισοδυναμιών. Στο εξής θα θεωρούμε τον $L_1(E)$ σαν το χώρο των κλάσεων ισοδυναμιών των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, όπου οι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ανήκουν στην ίδια κλάση διαφέρουν ανά δύο μεταξύ τους μόνο σ' ένα σύνολο μέτρου μηδέν. Για συντομία, όταν θα λέμε ότι η f είναι ένα στοιχείο του $L_1(E)$

θα εννοούμε την κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκει η συνάρτηση f. Δηλαδή ταυτίζουμε την ολοκληρώσιμη συνάρτηση f με την $[f]$ και ορίζουμε

$$\|f\|_1 = \|[f]\|_1 = \int_E |f| \,\mathrm{d}m \,.$$

Έστω ο διανυσματικός χώρος X με νόρμα $\|\cdot\|_X$. Λέμε ότι η ακολουθία $(x_n) \in X$ είναι Cauchy αν

$$\forall \varepsilon > 0 \,,\; \exists N \in \mathbb{N}^* : \, m, n \geq N \Rightarrow \|x_m - x_n\|_X < \varepsilon \,.$$

Αν κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει σε κάποιο διάνυσμα του χώρου X, τότε λέμε ότι ο χώρος με νόρμα X είναι **πλήρης (Banach)**. Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στο $x \in X$, αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\sum_{n=1}^{N} x_n$ συγκλίνει στο $x \in X$, δηλαδή αν

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n - x \right\|_X = 0 \,.$$

Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε, ως συνήθως, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$. Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας χώρος με νόρμα πλήρης.

Θεώρημα 4.66. *Ο χώρος με νόρμα X είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε σειρά που συγκλίνει απόλυτα στο X συγκλίνει. Δηλαδή ο X είναι πλήρης αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στο X όταν $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < \infty$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο χώρος με νόρμα X είναι πλήρης και ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει απόλυτα, δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < \infty$. Αν $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_X$, η (σ_n) είναι πραγματική συγκλίνουσα ακολουθία και επομένως είναι ακολουθία Cauchy. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $m > n > n_0$ είναι:

$$\sigma_m - \sigma_n = \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\|_X < \varepsilon \,.$$

Επομένως, αν $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ έχουμε

$$\|S_m - S_n\|_X = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right\|_X \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\|_X < \varepsilon \,,$$

δηλαδή η (S_n) είναι μία ακολουθία Cauchy στο χώρο X. Άρα η (S_n) θα συγκλίνει σε κάποιο διάνυσμα του X. Ισοδύναμα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ θα συγκλίνει σε κάποιο διάνυσμα του X.

Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι ο χώρος X δεν είναι πλήρης. Τότε υπάρχει ακολουθία Cauchy (x_n) που δεν συγκλίνει στο χώρο X. Επειδή η (x_n) είναι Cauchy, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $k_n \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για $m, p \geq k_n$ είναι

$$\|x_m - x_p\|_X < \frac{1}{2^n}\,. \tag{4.25}$$

Μπορούμε να πάρουμε: $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$. Τότε η υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) δεν συγκλίνει στο X. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x \in X$, επειδή η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy θα είναι και $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ (γιατί;) πού είναι άτοπο. Είναι $\sum_{n=1}^{N} \left(x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\right) = x_{k_{N+1}} - x_{k_1}$, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\right)$ δεν συγκλίνει στο X. Όμως από την (4.25)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\right\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1\,.$$

Δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\right)$ συγκλίνει απόλυτα και επομένως θα συγκλίνει, άτοπο. Άρα, ο χώρος X είναι πλήρης. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε ότι ο χώρος $L_1(E)$ είναι πλήρης.

Θεώρημα 4.67. *Ο χώρος $L_1(E)$ είναι πλήρης, δηλαδή είναι ένας χώρος Banach.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.66 αρκεί να αποδείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$ συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει, ως πρός τη νόρμα του $L_1(E)$, σ' ένα στοιχείο του $L_1(E)$. Όμως αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n|\,\mathrm{d}m < \infty\,,$$

από το θεώρημα B. Levi η σειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο E, η $f \in L_1(E)$

και

$$\begin{aligned}\left\|f - \sum_{n=1}^{N} f_n\right\|_1 &= \int_E \left|f - \sum_{n=1}^{N} f_n\right| \mathrm{d}m \\ &= \int_E \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n\right| \mathrm{d}m \\ &\le \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_E |f_n| \,\mathrm{d}m \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_1 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0\,.\end{aligned}$$

Δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει, ως πρός τη νόρμα του $L_1(E)$, στην $f \in L_1(E)$. □

4.3 Σύγκριση των Ολοκληρωμάτων Riemann και Lebesgue

Αρχίζουμε με μια σύντομη επισκόπηση του ολοκληρώματος Riemann, οι ορισμοί και τα αποτελέσματα που θα αναφέρουμε υπάρχουν στα περισσότερα εισαγωγικά βιβλία Πραγματικής Ανάλυσης ή Απειροστικού Λογισμού.

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία φραγμένη πραγματική συνάρτηση, όπου a, b, με $a < b$, είναι πραγματικοί αριθμοί. Μια **διαμέριση** του $[a, b]$ είναι ένα πεπερασμένο διατεταγμένο σύνολο $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, όπου

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\,.$$

Έστω

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad \text{και} \quad M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}\ ,$$

για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$. Το **κάτω άθροισμα** της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση P ορίζεται ως εξής

$$L(f, P) := \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})\ .$$

Παρόμοια, το **άνω άθροισμα** της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση P ορίζεται ως εξής

$$U(f, P) := \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})\ .$$

Προκειμένου να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Riemann της f, πρώτα αποδεικνύεται ότι για οποιαδήποτε διαμέριση P του $[a, b]$, $L(f, P) \le U(f, P)$ και στη συνέχεια ότι για κάθε διαμέριση P' η οποία είναι **λεπτότερη** της P, δηλαδή $P' \supset P$, είναι $L(f, P) \le L(f, P')$ και $U(f, P') \le U(f, P)$.

Τέλος, αν P_1 και P_2 είναι δύο διαμερίσεις του $[a, b]$, τότε η διαμέριση $P_1 \cup P_2$ είναι λεπτότερη των P_1, P_2 και επομένως $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$ για οποιεσδήποτε διαμερίσεις P_1, P_2 του $[a, b]$. Επομένως, κάθε άνω άθροισμα είναι ένα άνω φράγμα για την οικογένεια όλων των κάτω αθροισμάτων και παρόμοια, κάθε κάτω άθροισμα είναι ένα κάτω φράγμα για την οικογένεια όλων των άνω αθροισμάτων. Άρα, το σύνολο

$$\{L(f, P) : P \text{ είναι μια διαμέριση του } [a, b]\}$$

είναι άνω φραγμένο στο $\mathbb{R}$ και το σύνολο

$$\{U(f, P) : P \text{ είναι μια διαμέριση του } [a, b]\}$$

είναι κάτω φραγμένο στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 4.68. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία φραγμένη συνάρτηση. Τότε, το* **κάτω ολοκλήρωμα** *της f στο $[a, b]$ ορίζεται ως εξής*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x := \sup \{L(f, P) : P \textit{ είναι μια διαμέριση του } [a, b]\} \,.$$

Παρόμοια, το **άνω ολοκλήρωμα** *της f στο $[a, b]$ ορίζεται ως εξής*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x := \inf \{U(f, P) : P \textit{ είναι μια διαμέριση του } [a, b]\} \,.$$

Θα λέμε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη κατά Riemann ή Riemann ολοκληρώσιμη** *στο $[a, b]$, αν*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x \,.$$

Σ' αυτή την περίπτωση η κοινή τιμή των λέγεται **ολοκλήρωμα Riemann** *της f στο $[a, b]$ και συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$.*

Δίνουμε τώρα ένα χαρακτηρισμό για την ολοκληρωσιμότητα κατά Riemann μιας συνάρτησης η οποία είναι γνωστή και σαν συνθήκη του Riemann. Η απόδειξη προκύπτει σχετικά εύκολα από τον προηγούμενο ορισμό.

Θεώρημα 4.69 (1ο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας). *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a, b]$ τέτοια ώστε*

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon .$$

Παράδειγμα 4.70. *Η συνάρτηση Dirichlet*

$$D(x) := \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} , \\ 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$. Πράγματι, για κάθε διαμέριση P του $[0, 1]$ είναι $L(D, P) = 0$ και $U(D, P) = 1$. Τότε, $U(D, P) - L(D, P) = 1$ για κάθε διαμέριση P του $[0, 1]$ και επομένως η D δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

Η **λεπτότητα ή νόρμα** μιας διαμέρισης $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ενός διαστήματος $[a, b]$, $a < b$, ορίζεται ως εξής

$$\|P\| := \max_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1}) .$$

Θα δώσουμε στη συνέχεια ένα δεύτερο χαρακτηρισμό για την ολοκληρωσιμότητα κατά Riemann μιας πραγματικής συνάρτησης. Για την απόδειξη χρειαζόμαστε την παρακάτω βοηθητική πρόταση.

Λήμμα 4.71. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω*

$$M = \sup\{f(x) : a \le x \le b\} , \quad m = \inf\{f(x) : a \le x \le b\} .$$

Αν P, Q είναι δύο διαμερισεις του $[a, b]$ και η Q έχει r σημεία στο (a, b), τότε

(*i*) $U(f, P) - U(f, P \cup Q) \le r(M - m)\|P\|$,

(*ii*) $L(f, P \cup Q) - L(f, P) \le r(M - m)\|P\|$.

Απόδειξη. (i) Έστω $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ και έστω η διαμέριση Q έχει ένα σημείο $y \in (a, b)$, με $y \notin P$. Υποθέτουμε ότι $x_{k-1} < y < x_k$. Αν $M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$, $M_k' = \sup\{f(x) : x_{k-1} \le x \le y\}$ και $M_k'' = \sup\{f(x) : y \le x \le x_k\}$, τότε

$$\begin{aligned} U(f, P) - U(f, P \cup Q) &= M_n(x_k - x_{k-1}) - M_k'(y - x_{k-1}) - M_k''(x_k - y) \\ &\le M(x_k - x_{k-1}) - m(y - x_{k-1}) - m(x_k - y) \\ &= (M - m)(x_k - x_{k-1}) \\ &\le (M - m)\|P\| \,. \end{aligned}$$

Επομένως, αν η Q έχει r σημεία στο (a, b), τότε $U(f, P) - U(f, P \cup Q) \le r(M - m)\|P\|$.

(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια.

□

Θεώρημα 4.72 (2ο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας). *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ με $\|P\| \le \delta$ είναι*

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon \,.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο διάστημα $[a, b]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3} \,.$$

Αν P είναι μια οποιαδήποτε διαμέριση του $[a, b]$, τότε η διαμέριση $P \cup P_\varepsilon$ είναι λεπτότερη της P_ε και επομένως

$$U(f, P \cup P_\varepsilon) - L(f, P \cup P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3} \,.$$

Υποθέτουμε ότι η διαμέριση P_ε έχει r σημεία στο (a, b). Αν πάρουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{3r(M-m)}$, όπου $M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$ και $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$, τότε για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$, με $\|P\| < \delta$, από το προηγούμενο λήμμα έχουμε

$$U(f, P) - U(f, P \cup P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{και} \quad L(f, P \cup P_\varepsilon) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{3} \,.$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
&U(f,P)-L(f,P)\\
&\quad=(U(f,P)-U(f,P\cup P_\varepsilon))+(U(f,P\cup P_\varepsilon)-L(f,P\cup P_\varepsilon))+(L(f,P\cup P_\varepsilon)-L(f,P))\\
&\quad<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\,,
\end{aligned}
$$

για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$, με $\|P\|<\delta$.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι για κάποια διαμέριση P, με $\|P\|<\delta$, είναι $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$. Τότε

$$0\le\overline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x\le U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon\,,$$

για κάθε $\varepsilon>0$. Επομένως $\overline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x$, δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο διάστημα $[a,b]$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι πόρισμα του προηγούμενου κριτηρίου ολοκληρωσιμότητας, μας δίνει ένα χρήσιμο προσεγγιστικό τύπο για την ολοκληρωσιμότητα κατά Riemann.

Θεώρημα 4.73. *Υποθέτουμε ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση και ότι η (P_n) είναι ακολουθία διαμερίσεων του $[a,b]$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty}\|P_n\|=0$.*

(α') Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε

$$\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(β') Αν $\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=I$, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=I$.

Ορισμός 4.74. *Μια* **κλιμακωτή συνάρτηση** *στο $\mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση της μορφής*

$$\varphi=\sum_{k=1}^n a_k\chi_{I_k}\,,$$

όπου $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ και η $(I_k)_{k=1}^n$ είναι μία πεπερασμένη ακολουθία φραγμένων και ξένων ανά δύο διαστημάτων. Τα διαστήματα I_k μπορεί να είναι ανοικτά, κλειστά, ή ημιανοικτά (μπορεί να είναι και μονοσύνολα) .

Έστω η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μία φραγμένη συνάρτηση και έστω $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$ μία διαμέριση του $[a,b]$. Αν $m_k=\inf\{f(x):x_{k-1}\le x\le x_k\}$ και $M_k=\sup\{f(x):x_{k-1}\le x\le x_k\}$, τότε οι

$$\varphi=\sum_{k=1}^{n}m_k\chi_{[x_{k-1},\,x_k)}\quad \text{και}\quad \psi=\sum_{k=1}^{n}M_k\chi_{[x_{k-1},\,x_k)}$$

είναι δύο κλιμακωτές συναρτήσεις οι οποίες είναι Lebesgue ολοκληρώσιμες. Μάλιστα, είναι

$$\int_{[a,b]}\varphi\,\mathrm{d}m=\sum_{k=1}^{n}m_k\int_{[a,b]}\chi_{[x_{k-1},\,x_k)}\,\mathrm{d}m=\sum_{k=1}^{n}m_k\,(x_k-x_{k-1})=L\,(f,P)$$

και παρόμοια

$$\int_{[a,b]}\psi\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}M_k\,(x_k-x_{k-1})=U\,(f,P)\ .$$

Θα αποδείξουμε τώρα ένα σημαντικό θεώρημα, το οποίο οφείλεται στον Lebesgue και είναι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για μια φραγμένη πραγματική συνάρτηση, ορισμένη σ' ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, να είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε την παρακάτω βοηθητική πρόταση η οποία συνδέει τις κλιμακωτές συναρτήσεις με την συνέχεια και την ολοκληρωσιμότητα κατά Riemann μιας συνάρτησης.

Λήμμα 4.75. *Μια συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής σ.π., αν και μόνο αν υπάρχουν ακολουθίες (φ_n) και (ψ_n) κλιμακωτών συναρτήσεων τέτοιες ώστε*

$$\varphi_1\le\varphi_2\le\cdots\le\varphi_n\le\cdots\le f\le\cdots\le\psi_n\le\cdots\le\psi_2\le\psi_1$$

και $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)$ σ.π. στο $[a,b]$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει υποσύνολο N του $[a,b]$ μέτρου μηδέν, τέτοιο ώστε

$$\varphi_n(x)\nearrow f(x)\ \text{και}\ \psi_n(x)\searrow f(x)\ \text{για κάθε}\ x\in[a,b]\setminus N\,.$$

Εξ' ορισμού, κάθε κλιμακωτή συνάρτηση είναι ασυνεχής σε πεπερασμένο το πλήθος σημεία. Αν D είναι το σύνολο των σημείων του $[a,b]$ στα οποία οι ακολουθίες των κλιμακωτών συναρτήσεων (φ_n) και (ψ_n) είναι ασυνεχείς, τότε το σύνολο D είναι αριθμήσιμο και έχει μέτρο μηδέν. Έστω $x_0\in[a,b]\setminus(N\cup D)$, όπου $m(N\cup D)=0$. Επειδή $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=f(x_0)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x_0)$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\psi_n(x_0) - \varphi_n(x_0) < \varepsilon\,.$$

Επίσης, επειδή οι φ_n και ψ_n είναι κλιμακωτές συναρτήσεις, υπάρχει ανοικτό υποδιάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ του $[a, b]$, τέτοιο ώστε $\varphi_n(x) = \varphi_n(x_0)$ και $\psi_n(x) = \psi_n(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Επομένως, αν $|x - x_0| < \delta$, τότε

$$\varphi_n(x_0) - \psi_n(x_0) = \varphi_n(x) - \psi_n(x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq \psi_n(x) - \varphi_n(x_0) = \psi_n(x_0) - \varphi_n(x_0)$$

και ισοδύναμα

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \psi_n(x_0) - \varphi_n(x_0) < \varepsilon\,.$$

Δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0. Άρα, η f ειναι συνεχής $\sigma.\pi.$ στο $[a, b]$.

Αντίστροφα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έστω $P_n = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2^n}\}$ μία διαμέριση η οποία διαιρεί το $[a, b]$ σε 2^n υποδιαστήματα, δηλαδή $x_k = a + k(b-a)2^{-n}$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n$. Είναι $\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = \lim_{n\to\infty}(b-a)2^{-n} = 0$. Ορίζουμε

$$\varphi_n(x) := \sum_{k=1}^{2^n} m_k \chi_{[x_{k-1}, x_k)}(x) \quad \text{και} \quad \psi_n(x) := \sum_{k=1}^{2^n} M_k \chi_{[x_{k-1}, x_k)}(x)\,,$$

με $\varphi_n(b) = \psi_n(b) = f(b)$, όπου

$$m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \text{ και } M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}\,.$$

Οι φ_n, ψ_n είναι κλιμακωτές συναρτήσεις. Επειδή κάθε υποδιάστημα του $[a, b]$ που αντιστοιχεί στην διαμέριση P_n διαιρείται σε δύο ίσα υποδιαστήματα από την διαμέριση P_{n+1}, είναι

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq \varphi_n \leq \cdots \leq f \leq \cdots \leq \psi_n \leq \cdots \leq \psi_2 \leq \psi_1\,.$$

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής για κάθε $x \in [a, b] \setminus N$, με $m(N) = 0$. Αν $x_0 \in [a, b] \setminus N$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

για κάθε $x \in [a, b]$, $|x - x_0| < \delta$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ είναι τέτοιο ώστε $(b-a)2^{-n} < \delta$ και έστω P_n η αντίστοιχη διαμέριση του $[a, b]$. Είναι $\|P_n\| < \delta$. Τότε για κάποιο υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$

του $[a,b]$ που αντιστοιχεί στη διαμέριση P_n είναι $x_0 \in [x_{k-1}, x_k)$ ($x_0 \in [x_{2^n-1}, x_{2^n}]$ αν $k = 2^n$). Επειδή $x_k - x_{k-1} = (b-a)\,2^{-n} < \delta$,

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon\,, \quad \text{για κάθε}\, x \in [x_{k-1}, x_k]\,.$$

Επομένως,

$$f(x_0) - \varepsilon \leq m_k = \varphi_n(x_0) \leq \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_0) \leq f(x_0) \leq \lim_{n\to\infty} \psi_n(x_0) \leq \psi_n(x_0) = M_k \leq f(x_0) + \varepsilon\,.$$

Δηλαδή, $f(x_0) - \varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_0) \leq f(x_0) \leq \lim_{n\to\infty} \psi_n(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, τελικά έχουμε $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_0) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x_0)$. Άρα, $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)$ $\sigma.\pi.$ στο $[a,b]$. □

Θεώρημα 4.76. *Έστω η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη.*

(α') Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν η f είναι συνεχής σχεδόν παντού στο $[a,b]$.

(β') Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε είναι και Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα. Δηλαδή

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}m(x)\,. \tag{4.26}$$

Απόδειξη. (α') Ορίζουμε ακολουθία διαμερίσεων (P_n) του διαστήματος $[a,b]$, με $\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$ και δύο μονότονες ακολουθίες (ϕ_n) και (ψ_n) κλιμακωτών συναρτήσεων όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 4.75. Έστω $\varphi_n(x) \nearrow \varphi(x)$ και $\psi_n(x) \searrow \psi(x)$.

Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Επειδή οι συναρτήσεις φ_n, ψ_n είναι μετρήσιμες και ομοιόμορφα φραγμένες, τότε και οι συναρτήσεις φ, ψ είναι μετρήσιμες και φραγμένες με

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)\,, \quad \text{για κάθε } x \in [a,b].$$

Επειδή

$$\int_{[a,b]} \varphi_n\,\mathrm{d}m = L(f, P_n) \quad \text{και} \quad \int_{[a,b]} \psi_n\,\mathrm{d}x = U(f, P_n)\,,$$

από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης (ή το Θεώρημα 4.42) και το Θεώρημα 4.73 έχουμε

$$\int_{[a,b]} \varphi \, \mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n \, \mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} L\left(f, P_n\right) = \int_a^b f\left(x\right) \, \mathrm{d}x$$

και παρόμοια

$$\int_{[a,b]} \psi \, \mathrm{d}m = \int_a^b f\left(x\right) \, \mathrm{d}x \, .$$

Δηλαδή

$$\int_{[a,b]} \left(\psi - \varphi\right) \, \mathrm{d}m = \int_{[a,b]} \psi \, \mathrm{d}m - \int_{[a,b]} \varphi \, \mathrm{d}m = 0$$

και επομένως

$$\varphi\left(x\right) = f\left(x\right) = \psi\left(x\right) \, , \quad \sigma.\pi. \text{ στο } [a,b] \, . \tag{4.27}$$

Άρα, από το Λήμμα 4.75 συνεπάγεται ότι η f είναι συνεχής $\sigma.\pi.$

Αντίστροφα, αν η f είναι συνεχής $\sigma.\pi.$ στο $[a,b]$, τότε από το Λήμμα 4.75 η (4.27) ισχύει. Όμως από την Πρόταση 4.33(α΄) είναι $\int_{[a,b]} \psi \, \mathrm{d}m = \int_{[a,b]} \varphi \, \mathrm{d}m$, οπότε από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης (ή το Θεώρημα 4.42) έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[a,b]} \psi \, \mathrm{d}m - \int_{[a,b]} \varphi \, \mathrm{d}m \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \psi_n \, \mathrm{d}m - \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n \, \mathrm{d}m \\ &= \lim_{n\to\infty} U\left(f, P_n\right) - \lim_{n\to\infty} L\left(f, P_n\right) \, . \end{aligned}$$

Επομένως, από το Θεώρημα 4.73 η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

(β΄) Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.33(α΄), από την (4.27) έχουμε $\int_{[a,b]} \varphi \, \mathrm{d}m = \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}m$. Επειδή η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης (ή το Θεώρημα 4.42) και το Θεώρημα 4.73 έχουμε

$$\int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}m = \int_{[a,b]} \varphi \, \mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n \, \mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} L\left(f, P_n\right) = \int_a^b f\left(x\right) \, \mathrm{d}x \, .$$

□

Από το Θεώρημα 4.76 και την Πρόταση 3.7 προκύπτει ότι:

Πόρισμα 4.77. *Αν η φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι Lebesgue μετρήσιμη.*

Παράδειγμα 4.78. *Αποδείξαμε στο Παράδειγμα 4.70 ότι η συνάρτηση Dirichlet $D : [0, 1] \to \mathbb{R}$, με $D(x) = 1$ αν ο x είναι ρητός αριθμός και $D(x) = 0$ αν ο x είναι άρρητος αριθμός δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Επειδή η D είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του $[0, 1]$, αυτό προκύπτει άμεσα και από το Θεώρημα 4.76. Όμως η συνάρτηση Dirichlet είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Πράγματι, επειδή $D = 0$ $\sigma.\pi.$, η D είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη με*

$$\int_{[0,1]} D \, \mathrm{d}m = 0 \, .$$

Το προηγούμενο θεώρημα μας επιτρέπει να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue συναρτήσεων που είναι Riemann ολοκληρώσιμες.

Παράδειγμα 4.79. *Αν C είναι το τριαδικό σύνολο Cantor, να αποδειχθεί ότι η χ_C είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ και ότι $\int_0^1 \chi_C(x) \, \mathrm{d}x = 0$.*

Απόδειξη. Η χ_C είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου $[0, 1] \setminus C$ και ασυνεχής σε κάθε σημείο του C. Επειδή $m(C) = 0$, από το Θεώρημα 4.76 η χ_C είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$. Επειδή $\chi_C = 0$ $\sigma.\pi.$, είναι

$$\int_0^1 \chi_C(x) \, \mathrm{d}x = \int_{[0,1]} \chi_C \, \mathrm{d}m = 0 \, .$$

$\square$

Παράδειγμα 4.80. *Αν*

$$f = \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right)} \, ,$$

να αποδειχθεί ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x$.

Απόδειξη. Η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου $[0, 1] \setminus A$, όπου το σύνολο

$$A = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right)$$

έχει μέτρο μηδέν. Από το Θεώρημα 4.76 η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{[0,1]} f\,\mathrm{d}m \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,1]} \chi_{(\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n})}\,\mathrm{d}m \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m\left(\left(\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}\,.\end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος της σειράς παρατηρούμε ότι αν

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}\,,\ \text{τότε}\ g'(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n} = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)\,,\ \text{για κάθε}\ |x|<1\,.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$g(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x \ln(1-t^2)\,\mathrm{d}t = x + \frac{1}{2}(1-x)\ln(1-x) - \frac{1}{2}(1+x)\ln(1+x)\,,$$

για κάθε $|x|<1$. Άρα,

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} = \lim_{x\to 1^-} g(x) = 1-\ln 2\,.$$

□

Παράδειγμα 4.81. *Αν η φραγμένη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ έχει πεπερασμένο όριο σε κάθε σημείο του $[a,b]$, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ έχει πεπερασμένο όριο σε κάθε σημείο του $[a,b]$, τότε $f=g+h$, όπου η g είναι συνεχής, η $h=0$ σε όλα τα σημεία όπου η h είναι συνεχής και $\lim_{x\to x_0} h(x)=0$, για κάθε $x_0\in[a,b]$. Ως γνωστόν $h=h^+-h^-$, όπου οι h^+ και h^- είναι μη αρνητικές συναρτήσεις. Έστω

$$E_n := \left\{x\in[a,b] : h^+(x)\ge 1/n\right\}\,,\qquad n\in\mathbb{N}^*\,.$$

Υποθέτουμε ότι το φραγμένο σύνολο E_n έχει άπειρο το πλήθος στοιχεία. Τότε, από το θεώρημα Bolzano–Weierstrass το E_n θα έχει κάποιο οριακό σημείο x_0 με $\lim_{x\to x_0} h^+(x)\ge 1/n$. Όμως $\lim_{x\to x_0} h(x)=0$ συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to x_0} h^+(x)=0$ και επομένως

$$0 = \lim_{x\to x_0} h^+(x) \ge 1/n\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ το E_n έχει πεπερασμένο το πλήθος στοιχεία. Επειδή

$$E_n \subseteq E_{n+1} \quad \text{και} \quad \big\{x \in [a,b] : h^+(x) > 0\big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\,,$$

είναι

$$m\left(\big\{x \in [a,b] : h^+(x) > 0\big\}\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n) = 0\,.$$

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι $m\left(\{x \in [a,b] : h^-(x) > 0\}\right) = 0$. Δηλαδή το σύνολο των σημείων του $[a,b]$ στα οποία η h είναι ασυνεχής έχει μέτρο μηδέν. Άρα, η f είναι συνεχής σχεδόν παντού στο $[a,b]$ και κατά συνέπεια είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Παράδειγμα 4.82. *Έστω δύο συναρτήσεις $f, g : [0,1] \to [0,1]$. Αν η f είναι συνεχής και η g είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η $g \circ f$ δεν είναι κατανάγκη Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Ως γνωστόν, βλέπε Παράδειγμα 2.55, το γενικευμένο σύνολο Cantor C_a είναι μετρήσιμο και έχει θετικό μέτρο για $0 < a < 1$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$ με $f(x) = d\,(x, C_a)$ (η απόσταση του x από το C_a). Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$ και επειδή το C_a είναι συμπαγές υποσύνολο του $[0,1]$, είναι $f(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in C_a$. Ορίζουμε και τη συνάρτηση $g : [0,1] \to [0,1]$ με $g(x) = \chi_{\{0\}}(x)$. Η g είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και μάλιστα

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \chi_{\{0\}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} \chi_{\{0\}}\,\mathrm{d}m = 0\,.$$

Επειδή $g \circ f = \chi_{C_a}$, η $g \circ f$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου $[0,1] \setminus C_a$ και ασυνεχής σε κάθε σημείο του C_a. Όμως το σύνολο C_a έχει θετικό μέτρο οπότε από το Θεώρημα 4.76(α') η $g \circ f = \chi_{C_a}$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. □

4.4 Γενικευμένο Ολοκλήρωμα Cauchy–Riemann

Αν η $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[a,\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ και το $\lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\,\mathrm{d}x$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε λέμε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη κατά Cauchy-Riemann** στο διάστημα $[a,\infty)$. Το

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\,\mathrm{d}x$$

είναι το **γενικευμένο ολοκλήρωμα της** f στο $[a,\infty)$. Λέμε επίσης ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει. Στην αντίθετη περίπτωση, θα λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο $[a,\infty)$ αποκλίνει. Υπενθυμίζεται ότι αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f συγκλίνει απόλυτα, δηλαδή $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει. Παρόμοια ορίζεται και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει αν και μόνο αν τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$ και $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνουν, όπου $a \in \mathbb{R}$. Τότε, το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο $(-\infty,\infty)$ ορίζεται ως εξής

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Το παρακάτω κριτήριο για τα γενικευμένα ολοκληρώματα είναι άμεση συνέπεια του κριτηρίου του Cauchy για την ύπαρξη του ορίου μιας συνάρτησης.

Πρόταση 4.83 (Κριτήριο Cauchy για γενικευμένα ολοκληρώματα). *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$, για κάθε $b \geq a$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $M > a$ τέτοιο ώστε για κάθε $c > b > M$ είναι*

$$\left|\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon\,.$$

Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει, από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι

$$\lim_{b\to\infty} \int_b^{b+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad \text{για κάθε σταθερό } \varepsilon > 0\,.$$

Όμως αυτό δεν συνεπάγεται ότι $f(x) \to 0$ καθώς το $x \to \infty$. Ένα αντιπαράδειγμα είναι το **ολοκλήρωμα Fresnel**: $\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x$ το οποίο ως γνωστόν συγκλίνει και ισούται με $\sqrt{2\pi}/4$. Η συνάρτηση $y = \sin x^2$ δεν τείνει στο 0 καθώς το $x \to \infty$. Αν όμως το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,\infty)$, τότε $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Πρόταση 4.84. *Αν η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,\infty)$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει, τότε $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x)\neq 0$. Τότε υπάρχει $\varepsilon>0$ και αύξουσα ακολουθία (x_n), με $\lim_{x\to\infty} x_n=\infty$, για την οποία είτε $f(x_n)\geq\varepsilon$ για όλα τα n ή $f(x_n)\leq\varepsilon$ για όλα τα n. Έστω $f(x_n)\geq\varepsilon$ για όλα τα n (διαφορετικά θεωρούμε τη $-f$). Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε αν $|x-y|<\delta$, τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$. Επομένως, για $x\in[x_n-\delta/2,x_n+\delta/2]$ είναι $f(x)>f(x_n)-\varepsilon/2\geq\varepsilon-\varepsilon/2=\varepsilon/2$. Άρα,

$$\int_{x_n-\delta/2}^{x_n+\delta/2} f(x)\,\mathrm{d}x\geq\frac{\varepsilon\delta}{2}\,. \tag{4.28}$$

Όμως, επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει, από το κριτήριο του Cauchy για γενικευμένα ολοκληρώματα υπάρχει $M>a$ τέτοιο ώστε για κάθε $c>b>M$ είναι

$$\left|\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon\delta}{2}\,.$$

Άτοπο, λόγω της (4.28). Άρα, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. □

Αν η συνάρτηση $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και το $\lim_{x\to\infty} f(x)$ υπάρχει, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι η f θα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,\infty)$. Επομένως, αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει, από την προηγούμενη πρόταση το $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. Αυτό όμως ισχύει και στην περίπτωση που η $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ δεν είναι κατανάγκη συνεχής. Αφήνουμε σαν άσκηση την απόδειξη της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 4.85. *Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει και το $\lim_{x\to\infty} f(x)$ υπάρχει, τότε $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.*

Παρατήρηση 4.86. *Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει, τότε το ολοκλήρωμα Riemann $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ υπάρχει για κάθε διάστημα $[a,b]$. Από το Θεώρημα 4.76 η f θα είναι συνεχής σ.π. σε κάθε διάστημα $[a,b]$ και επομένως συνεχής σ.π. στο $\mathbb{R}$. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.*

Παράδειγμα 4.87. *Έστω*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in [n, n+1), \text{ ο } n \text{ είναι άρτιος}, \\ -1 & \text{αν } x \in [n, n+1), \text{ ο } n \text{ είναι περιττός}. \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής σ.π. Όμως,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{2n}^{2n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{2n-1}^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x = -1\,.$$

Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ δεν συγκλίνει.

Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ ή $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει, γενικά η f δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη χωρίς επιπλέον συνθήκες.

Παράδειγμα 4.88. *Έστω η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n+1} & \text{αν } x \in [n, n+1),\ n \geq 0\,, \\ 0 & \text{αν } x < 0\,. \end{cases}$$

Τότε $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$, δηλαδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει. Όμως $f \notin L_1(\mathbb{R})$ επειδή από το Θεώρημα 4.15 έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|\,\mathrm{d}m = \int_{\bigcup_{n=0}^{\infty}[n,n+1)} |f|\,\mathrm{d}m = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[n,n+1)} |f|\,\mathrm{d}m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty\,.$$

Παράδειγμα 4.89. *Έστω η συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, με*

$$f(x) = (-1)^n \frac{1}{n}\,, \quad \text{αν } n-1 \leq x < n,\ n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα $[a, b]$ του $[0, \infty)$ και είναι

$$\int_0^N f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{1}{n}\,.$$

Τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^N f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -\ln 2$$

και μπορεί εύκολα να αποδειχθεί (αφήνουμε σαν άσκηση την απόδειξη) ότι

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_0^r f(x)\,\mathrm{d}x = -\ln 2\,,$$

δηλαδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει. Όμως η $f \notin L_1[0,\infty)$. *Πράγματι, αν* $f \in L_1[0,\infty)$, *επειδή* $|f\chi_{[0,n)}| \in L_1[0,\infty)$ *και* $|f\chi_{[0,n)}| \leq |f|$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}^*$, *από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue θα είχαμε*

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)} |f|\,\mathrm{d}m &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} |f\chi_{[0,n)}|\,\mathrm{d}m \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n)} |f|\,\mathrm{d}m \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{[k-1,\,k)} |f|\,\mathrm{d}m \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty\,. \qquad \text{(άτοπο)}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.90. *Το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ *συγκλίνει. Πράγματι, αν* $0 < a < r$, *επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ *συγκλίνει, χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε*

$$\int_a^r \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos r}{r} + \frac{\cos a}{a} - \int_a^r \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{\cos a}{a} - \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Άρα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ *συγκλίνει. Όμως η* $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ *δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο* $[0,\infty)$. *Πράγματι,*

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}m(x) &= \int_{\bigcup_{n=1}^\infty [(n-1)\pi,\,n\pi)} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}m(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[(n-1)\pi,\,n\pi)} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}m(x) \qquad \text{(Θεώρημα 4.15)} \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \int_{[(n-1)\pi,\,n\pi)} |\sin x|\,\mathrm{d}m(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi |\sin x|\,\mathrm{d}x \qquad \text{(η } y = |\sin x| \text{ είναι } \pi\text{-περιοδική)} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty\,.\end{aligned}$$

Αν όμως το γενικευμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης συγκλίνει απόλυτα, τότε η συνάρτηση είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Το παρακάτω θεώρημα είναι χρήσιμο στις εφαρμογές.

Θεώρημα 4.91. *Υποθέτουμε ότι η $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[a,\infty)$. Τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει. Επιπλέον, σ' αυτή την περίπτωση*

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,\infty)} f\,\mathrm{d}m \quad \textit{και} \quad \int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{[a,\infty)} |f|\,\mathrm{d}m\,.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[a,\infty)$. Τότε και η f^+ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[a,\infty)$. Έστω (a_n) ακολουθία στο $[a,\infty)$ με $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{[a,a_n]} = \chi_{\lim_{n\to\infty}[a,a_n]} = \chi_{[a,\infty)}\,,$$

αν $f_n := f^+\chi_{[a,a_n]}$, τότε η f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,a_n]$, $0 \le f_n(x) \le f^+(x)$ και $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f^+(x)$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,\infty)} f_n\,\mathrm{d}m = \int_{[a,\infty)} f^+\,\mathrm{d}m\,.$$

Όμως

$$\begin{aligned}\int_{[a,\infty)} f_n\,\mathrm{d}m &= \int_{[a,\infty)} f^+\chi_{[a,a_n]}\,\mathrm{d}m \\ &= \int_{[a,a_n]} f^+\,\mathrm{d}m = \int_a^{a_n} f^+(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{(Θεώρημα 4.76)}\end{aligned}$$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{a_n} f^+(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,\infty)} f^+\,\mathrm{d}m.$$

Δηλαδή ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f^+(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει και ισούται με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα Lebesgue $\int_{[a,\infty)} f^+\,\mathrm{d}m$. Παρόμοια, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f^-(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει και είναι $\int_a^\infty f^-(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,\infty)} f^-\,\mathrm{d}m$. Επειδή $f = f^+ - f^-$ και $|f| = f^+ + f^-$, έχουμε αποδείξει ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ και $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ συγκλίνουν και ισχύει

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,\infty)} f\,\mathrm{d}m \quad \text{και} \quad \int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{[a,\infty)} |f|\,\mathrm{d}m\,.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία στο $[a,\infty)$ με $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Αν $g_n = |f|\chi_{[a,a_n]}$, η ακολουθία (g_n) είναι αύξουσα με $\lim_{n\to\infty} g_n = |f|$. Επειδή η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, a_n]$, είναι $\int_{[a,a_n]} |f| \,\mathrm{d}m = \int_a^{a_n} |f(x)| \,\mathrm{d}x$. Τότε, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης

$$\begin{aligned}
\int_{[a,\infty)} |f| \,\mathrm{d}m &= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,\infty)} |f| \chi_{[a,a_n]} \,\mathrm{d}m \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,a_n]} |f| \,\mathrm{d}m \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^{a_n} |f(x)| \,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^{\infty} |f(x)| \,\mathrm{d}x < \infty \,.
\end{aligned}$$

Επομένως η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[a, \infty)$. □

Παράδειγμα 4.92. *Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[1, \infty)$ και το ολοκλήρωμα $\int_{[1,\infty)} f \,\mathrm{d}m = 1$.*

Λύση. Επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$, από το Θεώρημα 4.91 αρκεί να αποδείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}x$ συγκλίνει. Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\int_1^r \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}x = -\frac{\ln r}{r} + \int_1^r \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x = 1 - \frac{\ln r}{r} - \frac{1}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 1 \,.$$

Επομένως, $\int_{[1,\infty)} f \,\mathrm{d}m = 1$. ■

Παράδειγμα 4.93. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \,\mathrm{d}x < \infty$. Αν $\alpha > 0$, τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| n^{-\alpha} f(nx) \right| \,\mathrm{d}x < \infty$$

και $\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Λύση. Είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| n^{-\alpha} f(nx) \right| \,\mathrm{d}x = n^{-1-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \,\mathrm{d}t \,. \qquad \text{(αντικατάσταση } t = nx\text{)}$$

Επειδή $1 + \alpha > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\alpha}$ συγκλίνει και επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| n^{-\alpha} f(nx) \right| \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \,\mathrm{d}t < \infty \,.$$

Από το Θεώρημα B. Levi η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |n^{-\alpha} f(nx)|$ συγκλίνει $\sigma.\pi.$ και επομένως

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0 \quad \sigma.\pi.$$

■

Παράδειγμα 4.94. *Να υπολογιστεί το όριο*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \sqrt[n]{x}} \, \mathrm{d}x \,.$$

Λύση. Αν για κάθε $x > 0$

$$f_n(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \sqrt[n]{x}} \,,$$

τότε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Επειδή για κάθε $n > 1$ και για κάθε $x > 0$ είναι

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \cdots > x^2\frac{n-1}{2n} \geq \frac{1}{4}x^2 \,,$$

αν ορίσουμε

$$g(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^2} & \text{αν } x \geq 1 \,, \\ x^{-1/2} & \text{αν } 0 < x < 1 \,, \end{cases}$$

τότε $f_n(x) \leq g(x)$, για κάθε $n > 1$ και για κάθε $x > 0$. Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει, από το Θεώρημα 4.91 η g είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0,\infty)$. Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \sqrt[n]{x}} \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 \,.$$

■

Έστω η $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[a,b)$. Αν $\varepsilon > 0$ και το $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Cauchy-Riemann στο διάστημα $[a,b)$. Το

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x \,.$$

είναι **το γενικευμένο ολοκλήρωμα της** f **στο** $[a,b)$. Λέμε επίσης ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει. Στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο $[a,b)$ αποκλίνει. Υπενθυμίζεται ότι αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f συγκλίνει απόλυτα, δηλαδή $\int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x < \infty$, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει.

Ανάλογο ορισμό έχουμε όταν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο φραγμένο διάστημα $(a, b]$ και είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $(a, b]$.

Η απόδειξη του παρακάτω αποτελέσματος είναι ανάλογη με αυτή του Θεωρήματος 4.91.

Θεώρημα 4.95. *Υποθέτουμε ότι η $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[a, b)$. Τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει. Επιπλέον, σ' αυτή την περίπτωση*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b)} f\,\mathrm{d}m \quad \textit{και} \quad \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b)} |f|\,\mathrm{d}m\,.$$

Παρατήρηση 4.96. *Ανάλογο θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που η $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $(a, b]$.*

Παράδειγμα 4.97. *(α') Υποθέτουμε ότι η μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$ και τέτοια ώστε $\int_0^T |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. Να αποδειχθεί ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left| n^{-2} f(nx) \right| \,\mathrm{d}x < \infty$$

και στη συνέχεια ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} n^{-2} f(nx) = 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

(β') Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = (\ln|\cos x|)^2$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0, \pi]$.

Εφαρμογή. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} |\cos(nx)|^{1/n}\,.$$

Απόδειξη. (α') Επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$, είναι $f(x - (k-1)T) = f(x)$,

$k \in \mathbb{N}^*$. Επομένως, βλέπε άσκηση 24, είναι

$$\begin{aligned}\int_{[0,T]} \left|n^{-2} f(nx)\right| \, \mathrm{d}m(x) &= \frac{1}{n^3} \int_{[0,\, nT]} |f(x)| \, \mathrm{d}m(x) \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \int_{[(k-1)T,\, kT]} |f(x)| \, \mathrm{d}m(x) \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \int_{[(k-1)T,\, kT]} |f(x-(k-1)T)| \, \mathrm{d}m(x) \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \int_{[0,\, T]} |f(x)| \, \mathrm{d}m(x) \\ &= \frac{1}{n^2} \int_{[0,\, T]} |f(x)| \, \mathrm{d}m(x)\,.\end{aligned}$$

Από την υπόθεση και το γεγονός ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1/n^2\right)$ συγκλίνει, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,\, T]} \left|n^{-2} f(nx)\right| \, \mathrm{d}m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{[0,\, T]} |f(x)| \, \mathrm{d}m(x) < \infty\,.$$

Άρα, από το θεώρημα B. Levi η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} f(nx)$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ και κατά συνέπεια $\lim_{n\to\infty} n^{-2} f(nx) = 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

(β΄) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x) = (\ln|\cos x|)^2$ είναι π-περιοδική. Αν αποδείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} (\ln|\cos x|)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\ln(\cos x))^2 \, \mathrm{d}x$ συγκλίνει, τότε

$$\int_0^{\pi} (\ln|\cos x|)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\ln|\cos x|)^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{\pi/2} (\ln|\cos x|)^2 \, \mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} (\ln|\cos x|)^2 \, \mathrm{d}x$$

και από το Θεώρημα 4.95 η συνάρτηση f θα είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,\pi]$. Όμως για $0 < 2\lambda < 1$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} (\pi/2 - x)^{-2\lambda} \, \mathrm{d}x$ συγκλίνει και

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\frac{\ln(\cos x)}{(\pi/2 - x)^{-\lambda}}\right)^2 \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} 0\,.$$

Άρα, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} (\ln|\cos x|)^2 \, \mathrm{d}x$ θα συγκλίνει.

<u>*Εφαρμογή*</u>. Εφαρμόζοντας την (α΄) με $f(x) = (\ln|\cos x|)^2$, είναι $\lim_{n\to\infty} n^{-2} (\ln|\cos(nx)|)^2 = 0$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$ και επομένως $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln|\cos(nx)| = 0$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} |\cos(nx)|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{n^{-1}\ln|\cos(nx)|} = 1 \quad \sigma.\pi. \text{ στο } \mathbb{R}.$$

□

4.5 Προσέγγιση Ολοκληρώσιμων Συναρτήσεων

Είναι γνωστό ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σ' ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα προσεγγίζεται από κλιμακωτές συναρτήσεις στο διάστημα αυτό. Επίσης εύκολα αποδεικνύεται, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.29, ότι κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ προσεγγίζεται από απλές συναρτήσεις. Μπορούμε να προσεγγίσουμε μία συνάρτηση $f \in L_1(\mathbb{R})$ με συνεχείς συναρτήσεις;

Θεώρημα 4.98. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $f \in L_1(\mathbb{R})$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε:*

(i) Υπάρχει ολοκληρώσιμη απλή συνάρτηση s, τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}} |f - s| \,\mathrm{d}m < \varepsilon$.

(ii) Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $g = 0$ έξω από κάποιο φραγμένο διάστημα και τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}} |f - g| \,\mathrm{d}m < \varepsilon$.

(iii) Υπάρχει ολοκληρώσιμη κλιμακωτή συνάρτηση φ, τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}} |f - \varphi| \,\mathrm{d}m < \varepsilon$.

4.6 Εφαρμογές στις Σειρές Fourier

Μία **τριγωνομετρική σειρά** είναι μία σειρά της μορφής

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

όπου $c_n \in \mathbb{C}$. Αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Euler

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \cos nx + \mathrm{i} \sin nx \iff \cos nx = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2\mathrm{i}},$$

τότε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right),$$

όπου

$$\begin{cases} a_0 &= 2c_0, \\ a_n &= c_n + c_{-n}, \\ b_n &= \mathrm{i}\left(c_n - c_{-n}\right), \end{cases} \quad \text{και αντίστροφα} \quad c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} a_0 & n = 0, \\ \frac{1}{2}\left(a_n - \mathrm{i} b_n\right) & n > 0, \\ \frac{1}{2}\left(a_{-n} + \mathrm{i} b_{-n}\right) & n < 0. \end{cases} \tag{4.29}$$

Ορισμός 4.99. *Αν $f \in L_1[0,2\pi]$, τότε το*

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x$$

είναι ο n-**οστός συντελεστής Fourier της** *f.* **Η εκθετική(ή μιγαδική) μορφή της σειράς Fourier της** *f είναι η σειρά*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,.$$

Η τριγωνομετρική μορφή της σειράς Fourier της *f είναι η σειρά*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,,$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\,,\quad n\in\mathbb{N}$$

και

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\,,\quad n\in\mathbb{N}^*\,.$$

Αν $f\in L_1(\mathbb{R})$, **ο μετασχηματισμός Fourier της** *f είναι η συνάρτηση $\widehat{f}$ η οποία ορίζεται ως εξής*

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x\,,\quad (\xi\in\mathbb{R})\,.$$

Θεώρημα 4.100 (Λήμμα Riemann-Lebesgue). *Αν $f\in L_1(\mathbb{R})$ και $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x$, τότε*

$$\lim_{|\xi|\to\infty}|\widehat{f}(\xi)| = 0\,. \tag{4.30}$$

Απόδειξη. Αν $f = \chi_{[a,b)}$, τότε

$$\lim_{|\xi|\to\infty}|\widehat{f}(\xi)| = \lim_{|\xi|\to\infty}\left|\frac{\mathrm{e}^{-i\xi b}-\mathrm{e}^{-i\xi a}}{i\xi}\right| = 0\,.$$

Λόγω γραμμικότητας η (4.30) ισχύει και στην περίπτωση που η f είναι κλιμακωτή συνάρτηση. Στη γενική περίπτωση, αν $f\in L_1(\mathbb{R})$ τότε από το Θεώρημα 4.98 (iii) υπάρχει ολοκληρώσιμη κλιμακωτή συνάρτηση φ, με

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Επειδή η (4.30) ισχύει για τη φ, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \forall\ |\xi| \geq M\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x\right| &\leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} (f(x)-\varphi(x))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x + \left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,, \quad \forall\ |\xi| \geq M\,.\end{aligned}$$

Άρα, η (4.30) ισχύει για κάθε $f \in L_1(\mathbb{R})$. □

Παρατήρηση 4.101. *Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$, από την (4.30) συνεπάγεται ότι*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\xi x\,\mathrm{d}x = \lim_{|\xi|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\xi x\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

πού είναι μια ισοδύναμη μορφή του λήμματος Riemann-Lebesgue. Στην περίπτωση των σειρών Fourier είναι

$$\lim_{|n|\to\infty} \left|\widehat{f}(n)\right| = 0 \ \text{ και ισοδύναμα } \lim_{n\to\pm\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\pm\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

όπου $f \in L_1[0, 2\pi]$.

Παράδειγμα 4.102. *Έστω το $E \subset \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E) < \infty$. Αν (k_n) είναι μια γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και (a_n) είναι μια οποιαδήποτε πραγματική ακολουθία, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \cos^2(k_n x + a_n)\,\mathrm{d}m(x) = \frac{1}{2}m(E)\,.$$

Λύση. Για τον υπολογισμό του ορίου θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα των Riemann-Lebesgue.

Πράγματι, επειδή

$$\begin{aligned}
&\int_E \cos^2(k_n x + a_n)\,\mathrm{d}m(x) \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} [1+\cos(2k_n x + 2a_n)]\,\chi_E(x)\,\mathrm{d}m(x) \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\,\mathrm{d}m(x) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \cos(2k_n x + 2a_n)\chi_E(x)\,\mathrm{d}m(x) \\
&\quad = \frac{1}{2}m(E) + \frac{\cos 2a_n}{2}\cdot\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\cos 2k_n x\,\mathrm{d}m(x) - \frac{\sin 2a_n}{2}\cdot\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\sin 2k_n x\,\mathrm{d}m(x)\,,
\end{aligned}$$

από το λήμμα των Riemann-Lebesgue έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left|\int_E \cos^2(k_n x + a_n)\,\mathrm{d}m(x) - \frac{1}{2}(E)\right| \\
&\quad \leq \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\cos 2k_n x\,\mathrm{d}m(x)\right| + \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\sin 2k_n x\,\mathrm{d}m(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 4.103. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε $\varphi(0) = 1$ και $\varphi, \varphi' \in L_1[0,\infty)$. Αν $a > 0$, να αποδειχθεί ότι*

$$\int_0^\infty \varphi(ax)\cos x\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \varphi'(t)\sin(t/a)\,\mathrm{d}t\,.$$

Στη συνέχεια να υπολογιστεί το όριο $\lim_{a\to 0^+}\int_0^\infty \varphi(ax)\cos x\,\mathrm{d}x$.

Λύση. Επειδή $\varphi, \varphi' \in L_1[0,\infty)$, από το Θεώρημα 4.91 τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_0^\infty \phi(t)\,\mathrm{d}t$ και $\int_0^\infty \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ συγκλίνουν απόλυτα. Ως γνωστόν $\varphi(x) - \phi(0) = \int_0^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ και επομένως το

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 1 + \lim_{x\to\infty}\int_0^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^\infty \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

υπάρχει. Επειδή το $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)$ υπάρχει, από την Πρόταση 4.85 η σύγκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_0^\infty \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi(ax)\cos x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\int_0^\infty \varphi(t)\cos(t/a)\,\mathrm{d}t && \text{(αντικατάσταση } t = ax\text{)} \\
&= \lim_{t\to\infty}\varphi(t)\sin(t/a) - \int_0^\infty \phi'(t)\sin(t/a)\,\mathrm{d}t && \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\
&= -\int_0^\infty \phi'(t)\sin(t/a)\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Όμως $\varphi' \in L_1[0,\infty)$ και από το λήμμα των Riemann-Lebesgue $\lim_{a\to 0^+}\int_0^\infty \varphi'(t)\sin(t/a)\,\mathrm{d}t = 0$. Επομένως, $\lim_{a\to 0^+}\int_0^\infty \varphi(ax)\cos x\,\mathrm{d}x = 0$. ■

Παράδειγμα 4.104. *Να αποδειχθεί ότι*

$$\lim_{y\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^3}\sin(xy)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,.$$

Λύση. Ορίζουμε τη συνάρτηση f στο $(0,\infty)$, με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x^3} - \frac{1}{x} & \text{αν } 0 < x < 1\ , \\ \frac{\sin(x^2)}{x^3} & \text{αν } x \geq 1\ . \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η στοιχειώδης ανισότητα

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x\,, \quad \forall x \geq 0\,,$$

συνεπάγεται ότι για κάθε $x > 0$ είναι

$$-\frac{x^3}{6} < \frac{\sin x^2}{x^3} - \frac{1}{x} < 0\,.$$

Επομένως,

$$\int_0^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^3}{6}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x < \infty\,,$$

δηλαδή η $f \in L_1\,[0,\infty)$. Άρα,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^3}\sin(xy)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty f(x)\sin(xy)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\sin(xy)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty f(x)\sin(xy)\,\mathrm{d}x + \int_0^y \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(αντικατάσταση } t = xy\text{)} \end{aligned}$$

και από το λήμμα των Riemann-Lebesgue έχουμε

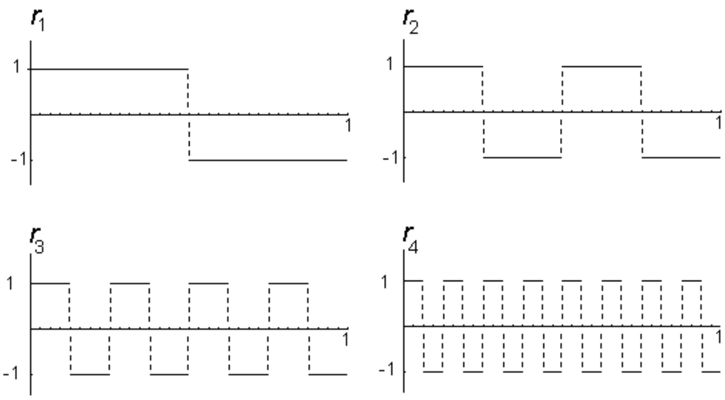
$$\begin{aligned} \lim_{y\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^3}\sin(xy)\,\mathrm{d}x &= \lim_{y\to\infty}\int_0^\infty f(x)\sin(xy)\,\mathrm{d}x + \lim_{y\to\infty}\int_0^y \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

■

Με (r_n) συμβολίζουμε την ακολουθία των **συναρτήσεων Rademacher**, $r_n : [0,1] \to \{-1,1\}$, οι οποίες ορίζονται ως εξής:

- $r_n(1) = -1$.
- $r_n(t) = (-1)^{k-1}$, $t \in [\frac{k-1}{2^n},\ \frac{k}{2^n})$, όπου $k = 1,\ldots,2^n$.

Οι πρώτες τέσσερις συναρτήσεις Rademacher φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι οι συναρτήσεις Rademacher είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα στο χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων που ορίζονται στο $[0,1]$. Δηλαδή,

$$\int_0^1 r_m(t)\, r_n(t)\ \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{αν } m \neq n\ , \\ 1 & \text{αν } m = n\ . \end{cases}$$

Η απόδειξη είναι προφανής αν $m = n$. Αν $m \neq n$ και υποθέσουμε ότι $m < n$, τότε σε κάθε ένα από τα 2^m υποδιαστήματα $[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m})$ στα οποία η r_m είναι σταθερή, η r_n αλλάζει πρόσημο άρτιο το πλήθος φορές (η r_n παίρνει τις τιμές 1 και -1 καθεμιά με πιθανότητα $1/2$) . Επομένως,

$$\int_{(k-1)/2^m}^{k/2^m} r_m(t)\, r_n(t)\ \mathrm{d}t = 0\,, \quad k = 1, \ldots, 2^m\,.$$

Άρα, $\int_0^1 r_m(t)\, r_n(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

Είναι αξιοσημείωτο ότι το λήμμα των Riemann-Lebesgue που ισχύει για το τριγωνομετρικό σύστημα, ισχύει και για το ορθοκανονικό σύστημα Rademacher.

Παράδειγμα 4.105. *Αν $f \in L_1[0,1]$, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t) r_n(t)\, \mathrm{d}m(t) = 0\,. \tag{4.31}$$

Απόδειξη. Πρώτα θα αποδείξουμε την (4.31) στην περίπτωση που είναι $f = \chi_{[a,b)}$, όπου το $[a,b)$ είναι ένα υποδιάστημα του $[0,1]$. Επειδή $\int_0^1 \chi_{[a,b)}(t) r_n(t)\, \mathrm{d}m(t) = \int_a^b r_n(t)\, \mathrm{d}m(t)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b r_n(t)\, \mathrm{d}m(t) = 0\,, \quad \text{για κάθε } 0 \le a < b \le 1\,.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Παίρνουμε $n_0 \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε $2^{-n_0} < \varepsilon/3$ και $2^{-n_0} \leq (b-a)/4$ (τότε το διάστημα $[a, b)$ θα περιέχει τουλάχιστον τέσσερα διαδοχικά διαστήματα της μορφής $[\frac{i-1}{2^{n_0}}, \frac{i}{2^{n_0}})$). Για $n \geq n_0$ θεωρούμε τη διαμέριση $\{0, 1/2^n, 2/2^n \ldots, (2^n - 1)/2^n, 1\}$. Αν $x_k = k/2^n$, $0 \leq k \leq 2^n$, τότε τα a και b συνδέονται με τα x_k ως εξής :

$$0 < \cdots < x_{p-1} \leq a < x_p < x_{p+1} < \cdots < x_{q-1} < x_q \leq b < x_{q+1} < \cdots < 1\,.$$

Επειδή $\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} r_n(t)\,\mathrm{d}m(t) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} r_n(t)\,\mathrm{d}m(t) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} r_n(t)\,\mathrm{d}m(t) = 0$, αν $c = x_{q-1}$ (όταν έχουμε άρτιο αριθμό υποδιαστημάτων μεταξύ x_p και x_{q-1}) ή $c = x_q$ (όταν έχουμε άρτιο αριθμό υποδιαστημάτων μεταξύ x_p και x_q), τότε

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b r_n(t)\,\mathrm{d}m(t)\right| &= \left|\int_a^{x_p} r_n(t)\,\mathrm{d}m(t) + \int_c^b r_n(t)\,\mathrm{d}m(t)\right| \\
&\leq \int_a^{x_p} |r_n(t)|\,\mathrm{d}m(t) + \int_c^b |r_n(t)|\,\mathrm{d}m(t) \\
&= (x_p - a) + (b - c) \\
&< 2^{-n} + 2 \cdot 2^{-n} \\
&\leq 3 \cdot 2^{-n_0} < \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

δηλαδή $\lim_{n\to\infty} \int_a^b r_n(t)\,\mathrm{d}m(t) = 0$. Λόγω γραμμικότητας η (4.31) ισχύει και στην περίπτωση που η f είναι κλιμακωτή συνάρτηση. Στη γενική περίπτωση, αν $f \in L_1[0,1]$ τότε από το Θεώρημα 4.98 (iii) υπάρχει ολοκληρώσιμη κλιμακωτή συνάρτηση φ, με

$$\int_0^1 |f(t) - \varphi(t)|\,\mathrm{d}m(t) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Επειδή η (4.31) ισχύει για τη φ, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\left|\int_0^1 \varphi(t) r_n(t)\,\mathrm{d}m(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \forall\, n \geq N\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(t) r_n(t)\,\mathrm{d}m(t)\right| &\leq \left|\int_0^1 (f(t) - \varphi(t))\, r_n(t)\,\mathrm{d}m(t)\right| + \left|\int_0^1 \varphi(t) r_n(t)\,\mathrm{d}m(t)\right| \\
&\leq \int_0^1 |f(x) - \varphi(x)|\,\mathrm{d}m(t) + \left|\int_0^1 \varphi(t) r_n(t)\,\mathrm{d}m(t)\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,, \quad \forall\, n \geq N\,.
\end{aligned}$$

Άρα, η (4.31) ισχύει για κάθε $f \in L_1[0,1]$. □

Έστω ότι μας δίνεται η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$. Αν η σειρά συγκλίνει απόλυτα για $x = x_0$, τότε η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ συγκλίνει, δηλαδή η σειρά

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \tag{4.32}$$

συγκλίνει απόλυτα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως ορίζει μία περιοδική συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής επειδή από το M-κριτήριο του Weierstrass η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Η ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς μας επιτρέπει να ολοκληρώσουμε κάθε όρο της σειράς χωριστά (μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue). Επομένως, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ είναι

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \right\} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)x}\, \mathrm{d}x = c_k \,.
\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το εξής αποτέλεσμα:

Πρόταση 4.106. *Αν η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ συγκλίνει, τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ είναι σειρά Fourier. Δηλαδή, υπάρχει $f \in L_1[0, 2\pi]$ (μάλιστα η f είναι συνεχής), τέτοια ώστε $c_n = \widehat{f}(n)$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

Σε αντίθεση με ότι συμβαίνει με τη σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, η τριγωνομετρική σειρά

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

μπορεί να συγκλίνει απόλυτα σ' ένα σημείο x_0, δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0|$ να συγκλίνει, χωρίς όμως η σειρά να είναι σειρά Fourier. Μπορεί ακόμη η σειρά να συγκλίνει απόλυτα σε άπειρα το πλήθος σημεία και όμως η σειρά να μην είναι σειρά Fourier.

Παράδειγμα 4.107. *Έστω η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n!x)$. Αν το x είναι της μορφής $x = 2\pi p/q$, όπου p και q είναι ακέραιοι, $q > 0$, τότε όλοι οι όροι της σειράς μηδενίζονται για $n \geq q$*

και επομένως η σειρά συγκλίνει απόλυτα γι' αυτά τα x. Η σειρά λοιπόν συγκλίνει απόλυτα σ' ένα σύνολο σημείων που είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ και έχει μέτρο Lebesgue μηδέν. Οι συντελεστές όμως αυτής της τριγωνομετρικής σειράς είναι: $a_n = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = k!\ , \\ 0 & \text{αν } n \neq k!\ . \end{cases}$$

Επομένως, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ και από το λήμμα των Riemann-Lebesgue η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n!x)$ δεν είναι σειρά Fourier κάποιας $f \in L_1[0, 2\pi]$. Όμως, όπως θα αποδείξουμε στο επόμενο θεώρημα, η κατάσταση αλλάζει αν η σειρά συγκλίνει απόλυτα σ' ένα υποσύνολο του $[0, 2\pi]$ θετικού μέτρου.

Θεώρημα 4.108 (Θεώρημα Lusin-Denjoy). *Έστω $E \subset [0, 2\pi]$ είναι ένα μετρήσιμο σύνολο, τέτοιο ώστε $m(E) > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in E$ η τριγωνομετρική σειρά*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ \text{συγκλίνει απόλυτα}\,.$$

Τότε, η σειρά $\frac{1}{2}|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ συγκλίνει και επομένως η τριγωνομετρική σειρά είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης $f \in L_1[0, 2\pi]$.

Απόδειξη. Επειδή $a_n = \Re a_n + i\Im a_n$ και $b_n = \Re b_n + i\Im b_n$, χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, $a_n = r_n \cos\theta_n$, $b_n = r_n \sin\theta_n$, όπου $r_n = \left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2}$ και $0 \leq \theta_n < 2\pi$, είναι $a_n \cos nx + b_n \sin nx = r_n \cos(nx - \theta_n)$ και από την υπόθεση

$$\phi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} r_n |\cos(nx - \theta_n)| < \infty\,, \quad x \in E\,.$$

Αν $E_k := \{x \in E : \phi(x) \leq k\}$, $k \in \mathbb{N}$, τότε $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Επειδή $m(E) > 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}^*$

τέτοιο ώστε $m(E_{k_0}) > 0$. Επομένως

$$\begin{aligned} k_0 m(E_{k_0}) &\geq \int_{E_{k_0}} \phi(x)\,\mathrm{d}m(x) \\ &= \int_{E_{k_0}} \sum_{n=1}^{\infty} r_n \left|\cos\left(nx-\theta_n\right)\right|\,\mathrm{d}m(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} r_n \int_{E_{k_0}} \left|\cos\left(nx-\theta_n\right)\right|\,\mathrm{d}m(x) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} r_n \int_{E_{k_0}} \cos^2\left(nx-\theta_n\right)\,\mathrm{d}m(x)\,. \end{aligned}$$

Όμως, χρησιμοποιώντας το λήμμα των Riemann-Lebesgue, στο Παράδειγμα 4.102 έχουμε αποδείξει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_{k_0}} \cos^2\left(nx-\theta_n\right)\,\mathrm{d}m(x) = \frac{1}{2} m(E_{k_0})\,.$$

Κατά συνέπεια, υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ είναι

$$\int_{E_{k_0}} \cos^2\left(nx-\theta_n\right)\,\mathrm{d}m(x) \geq \frac{1}{4} m(E_{k_0})\,.$$

Τότε όμως

$$k_0 m(E_{k_0}) \geq \sum_{n=N}^{\infty} r_n \int_{E_{k_0}} \cos^2\left(nx-\theta_n\right)\,\mathrm{d}m(x) \geq \sum_{n=N}^{\infty} r_n \frac{1}{4} m(E_{k_0})\,.$$

Επειδή $m(E_{k_0}) > 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2} < \infty\,.$$

Άρα οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ συγκλίνουν και αυτό συνεπάγεται ότι η σειρά $\frac{1}{2}|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| + |b_n|\right)$ θα συγκλίνει. □

Όπως έχουμε παρατηρήσει, κάθε τριγωνομετρική σειρά που συγκλίνει απόλυτα σε κάποια συνάρτηση f είναι η σειρά Fourier της f. Αντίστροφα, μία σειρά Fourier δεν συγκλίνει κατανάγκη απόλυτα ακόμη και στην περίπτωση που η σειρά συγκλίνει παντού. Έστω για παράδειγμα η σειρά Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sin nx$ της $f\left(x\right) = \left(\pi - x\right)/2$, για $0 < x < 2\pi$.

Αν μία τριγωνομετρική σειρά συγκλίνει, τότε δεν συνεπάγεται ότι η σειρά είνα σειρά Fourier. Για παράδειγμα, αποδεικνύεται ότι η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ συγκλίνει και δεν είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης $f \in L_1[0, 2\pi]$(παραπέμπουμε στο [36, Corollary 4.2]). Αν η

τριγωνομετρική σειρά $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ είναι σειρά Fourier, από το λήμμα των Riemann-Lebesgue $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Τίθεται τώρα το ερώτημα:
Η σύγκλιση της τριγωνομετρικής σειράς $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, συνεπάγεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0;$$

Ο G. Cantor (1872) απέδειξε ότι αν η σειρά συγκλίνει για κάθε x σ' ένα κλειστό διάστημα, τότε $a_n, b_n \to 0$, καθώς το $n \to \infty$. Ο Lebesgue γενίκευσε το αποτέλεσμα του Cantor στην περίπτωση που η σειρά συγκλίνει σε σύνολα θετικού μέτρου.

Θεώρημα 4.109 (Θεώρημα Cantor-Lebesgue). *Έστω $E \subset [0, 2\pi]$ είναι ένα μετρήσιμο σύνολο, τέτοιο ώστε $m(E) > 0$. Αν $\lim_{n\to\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$, για κάθε $x \in E$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.*

Απόδειξη. Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος των Lusin-Denjoy, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι συντελεστές $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, η υπόθεσή μας είναι ότι

$$\lim_{n\to\infty} r_n \cos(nx - \theta_n) = 0\,, \quad \text{για κάθε}\; x \in E\,. \tag{4.33}$$

Αν λοιπόν αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2} = 0$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} r_n \neq 0$. Τότε υπάρχει γνήσια αύξουσα ακολουθία (k_n) φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $r_{k_n} > \delta > 0$. Όμως από την (4.33) είναι $\lim_{n\to\infty} r_{k_n} \cos(k_n x - \theta_{k_n}) = 0$, για κάθε $x \in E$ και επειδή $\delta\,|\cos(k_n x - \theta_{k_n})| < r_{k_n}\,|\cos(k_n x - \theta_{k_n})|$, θα είναι $\lim_{n\to\infty} \cos(k_n x - \theta_{k_n}) = 0$, για κάθε $x \in E$. Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} \cos^2(k_n x - \theta_{k_n}) = 0\,, \quad \text{για κάθε}\; x \in E\,.$$

Τότε όμως από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue και το Παράδειγμα 4.102 έχουμε

$$0 = \int_E \lim_{n\to\infty} \cos^2(k_n x - \theta_{k_n})\, \mathrm{d}m(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E \cos^2(k_n x - \theta_{k_n})\, \mathrm{d}m(x) = \frac{1}{2} m(E)\,.$$

Άτοπο, επειδή $m(E) > 0$. □

4.7 Ασκήσεις

1. Έστω $E_1, \dots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$. Αν κάθε σημείο του $[0,1]$ ανήκει σε τρία τουλάχιστον από αυτά τα σύνολα, να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον ένα από τα σύνολα έχει μέτρο Lebesgue μεγαλύτερο ή ίσο του $3/n$.

   Υπόδειξη. Είναι $\chi_{E_1}(x) + \cdots + \chi_{E_n}(x) \geq 3$, για κάθε $x \in [0,1]$.

2. Να αποδειχθεί ότι αν η πραγματική συνάρτηση f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $E \in \mathcal{M}$ και
$$\left| \int_E f \, \mathrm{d}m \right| = \int_E |f| \, \mathrm{d}m \,,$$
τότε είτε $f \geq 0$ $\sigma.\pi.$ στο E ή $f \leq 0$ $\sigma.\pi.$ στο E.

3. Έστω
$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -2n^2\left(x - \frac{1}{n}\right) & \text{αν } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{αν } x \geq \frac{1}{n} \,. \end{cases}$$
Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα και ότι
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \, \mathrm{d}m = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}m \,.$$

4. Αν $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[n,\infty)}$, δείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}m \neq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}m$. Γιατί δεν ισχύει το Θεώρημα 4.23;

5. Έστω $f : E \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση στο $E \in \mathcal{M}$. Αν $\int_E f \, \mathrm{d}m < \infty$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebyshev δείξτε ότι $f < \infty$ $\sigma.\pi.$

6. Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών και ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $[0,1]$. Αν $\int_0^1 f_n(x) \, \mathrm{d}x = c_n$, με $\sum_{n=1}^\infty c_n < \infty$ και $\sum_{n=1}^\infty \sqrt{c_n} < \infty$, δείξτε ότι σχεδόν για όλα τα $x \in [0,1]$ είναι $f_n(x) \leq \sqrt{c_n}$ για μεγάλα $n \in \mathbb{N}^*$.

   Υπόδειξη.

   (i) Αν $E_n = \left\{x : f_n(x) > \sqrt{c_n}\right\}$, δείξτε ότι $\lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{n=N}^\infty E_n\right) = 0$.

   (ii) Έστω $E = \bigcap_{N=1}^\infty \bigcup_{n=N}^\infty E_n$. Αν $x \notin E$, τότε υπάρχει $N = N(x) \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ είναι $f_n(x) \leq \sqrt{c_n}$.

7. Έστω ϕ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$ με

$$\int_0^1 \phi(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \qquad \int_0^1 x\phi(x)\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

   (i) Αν $E := \{x \in [0,1] : |\phi(x)| \geq 4\}$, τότε $m(E) > 0$.

   (ii) Αν $F := \{x \in [0,1] : |\phi(x)| \leq 4\}$, με $m(F) > 0$, τότε $|\phi(x)| = 4$, σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

   Υπόδειξη. (*i*) Αν $|\phi(x)| < 4$, σχεδόν παντού στο $[0,1]$, τότε $\int_0^1 (4 - |\phi(x)|)|x - 1/2|\,\mathrm{d}x > 0$ και αυτό οδηγεί σε άτοπο.

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση.

   (α') Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f\,\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m$.

   (β') Αν $f_n = \min\{f, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,\mathrm{d}m = \int_E f\,\mathrm{d}m$, για κάθε $E \in \mathcal{M}$.

9. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ είναι μετρήσιμη με $\int_{[0,\infty)} f\,\mathrm{d}m < \infty$. **Ο μετασχηματισμός Laplace της** f ορίζεται ως εξής

$$F(t) := \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}m(x)\,, \quad t \geq 0\,.$$

   Να αποδειχθεί ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής στο $[0,\infty)$ και ότι $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$.

10. (α') Αν το G είναι ένα ανοικτό σύνολο, να αποδειχθεί ότι

$$m(G) = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m : 0 \leq f \leq \chi_G \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής}\right\}.$$

   Υπόδειξη. Να θεωρήσετε την ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων

$$f_n(x) := \left(\frac{d(x, G^c)}{1 + d(x, G^c)}\right)^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

   (β') Αν το F είναι ένα κλειστό σύνολο, να αποδειχθεί ότι

$$m(F) = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m : f \geq \chi_F \text{ και η } f \text{ είναι συνεχής}\right\}.$$

   Υπόδειξη. Αν $m(F) < \infty$ και $\varepsilon > 0$, τότε ως γνωστόν υπάρχει ανοικτό σύνολο $G \supset F$, τέτοιο ώστε $m(G) < m(F) + \varepsilon$. Θεωρείστε τη συνεχή συνάρτηση

$$g(x) := \frac{d(x, G^c)}{d(x, G^c) + d(x, F)}$$

ή την ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων

$$f_n(x) := \left(\frac{d(x, G^c)}{d(x, G^c) + d(x, F)} \right)^n \,, \quad n \in \mathbb{N}^* \,.$$

11. Έστω η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \\ \frac{1}{n} & \text{αν } x \in I_{n,k} \ (1 \le k \le 2^{n-1}) \,, \end{cases}$$

όπου C είναι το τριαδικό σύνολο Cantor και $I_{n,k}$ $(1 \le k \le 2^{n-1})$ είναι τα ανοικτά και ξένα ανά δύο διαστήματα, μήκους $1/3^n$, που αφαιρούνται από το σύνολο C_{n-1} για την κατασκευή του συνόλου C_n (βλέπε παράγραφο 1.2.1). Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη και ότι

$$\int_{[0,1]} f \, \mathrm{d}m = \ln \sqrt{3} \,.$$

12. Έστω η συνάρτηση $f : (0, 1) \to [0, 1)$ με $f(x) := d(x, C)$, όπου

$$d(x, C) = \inf \{ |x - t| : t \in C \}$$

είναι η απόσταση του x από το τριαδικό σύνολο Cantor C. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{(0,1)} f \, dm = \frac{1}{28} \,.$$

13. Έστω η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{a} & \text{αν } x \text{ περιττός και } a \text{ το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο} \\ & \text{στο δεκαδικό ανάπτυγμα του } x \,. \end{cases}$$

Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το ολοκλήρωμα $\int_{[0,1]} f \, \mathrm{d}m$.

14. Έστω η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{αν } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \,. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι μετρήσιμη και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{[0,1]} f \, \mathrm{d}m$. Είναι η f Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$;

15. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \text{ είναι ρητός} \\ \mathrm{e}^{-|x|} & \text{αν } x \text{ είναι άρρητος}\,. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}m$.

16. Έστω η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n & \text{αν } \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{αν } x \in \left(0,\, \frac{1}{2n}\right) \cup \left(\frac{1}{n},\, 1\right)\,. \end{cases}$$

Να υπολογιστούν τα

$$\int_{[0,1]} \underline{\lim}\, f_n\,\mathrm{d}m \quad \text{και} \quad \underline{\lim} \int_{[0,1]} f_n\,\mathrm{d}m\,.$$

17. Έστω η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n = \begin{cases} \chi_{[0,1]} & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \\ \chi_{(1,2)} & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος}\,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} \underline{\lim}\, f_n\,\mathrm{d}m = 0 < 1 = \underline{\lim} \int_{\mathbb{R}} f_n\,\mathrm{d}m\,.$$

18. Έστω (A_n) ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα Fatou, να αποδειχθεί ότι

$$m(\underline{\lim}\, A_n) \le \underline{\lim}\, m(A_n)\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Είναι $\underline{\lim}\, \chi_{A_n} = \chi_{\underline{\lim}\, A_n}$.

19. Έστω $1 \le p < \infty$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, όπου $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n|^p\,\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} |f|^p\,\mathrm{d}m < \infty\,,$$

δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f|^p\,\mathrm{d}m = 0\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $g_n = 2^{p-1}\left(|f_n|^p + |f|^p\right) - |f_n - f|^p$, τότε $g_n \ge 0$ και $\lim_{n\to\infty} g_n = 2^p|f|^p$.

20. Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $g \in L_1(E)$, τέτοια ώστε $f_n(x) \geq g(x)$, $\sigma.\pi.$ στο E και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε
$$\int_E \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}m \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}m\,.$$

21. Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $g \in L_1(E)$, τέτοια ώστε $f_n(x) \leq g(x)$, $\sigma.\pi.$ στο E και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε
$$\int_E \left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}m \geq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}m\,.$$

22. Αν $f_n = -\frac{1}{n}\chi_{[0,n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} f_n \, \mathrm{d}m = -1 < 0 = \int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}m\,.$$
Τι συμπεραίνετε από τις ασκήσεις 20 και 21;

23. Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$. Υπόθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ και $f_n(x) \leq f(x)$ $\sigma.\pi.$ στο E. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}m = \int_E f \, \mathrm{d}m$.

24. Έστω η συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$, όπου $E \in \mathcal{M}$, είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και έστω $a \in \mathbb{R}$.

   (α΄) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι
$$\chi_A(x+a) = \chi_{A-a}(x) \quad \text{και} \quad \chi_A(ax) = \chi_{a^{-1}A}(x)\,, \quad a \neq 0\,.$$

   (β΄) Να αποδειχθεί ότι
$$\int_E f(x+a) \, \mathrm{d}m(x) = \int_{a+E} f(x) \, \mathrm{d}m(x)$$
και
$$\int_E f(ax) \, \mathrm{d}m(x) = \frac{1}{|a|} \int_{aE} f(x) \, \mathrm{d}m(x)\,,\ a \neq 0\,.$$
Υπόδειξη. Να θεωρήσετε πρώτα την περίπτωση $f = \chi_A$. Είναι
$$A \cap (a+E) = a + (A-a) \cap E \quad \text{και} \quad A \cap aE = a\left((a^{-1}A) \cap E\right)\,,\ a \neq 0\,.$$

25. Έστω $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $E \in \mathcal{M}$ και έστω $E_n := \{x \in E : |f(x)| \geq n\}$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.29 να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} n \cdot m(E_n) = 0$.

26. Έστω $f(x) = \frac{1}{x}\chi_{[-1,1)\setminus\{0\}}(x) + \chi_{\{0\}}(x)$. Δείξτε ότι τα ολοκληρώματα $\int_{[-1,0)} f\,\mathrm{d}m$ και $\int_{[0,1)} f\,\mathrm{d}m$ υπάρχουν ενώ το ολοκλήρωμα $\int_{[-1,1)} f\,\mathrm{d}m$ δεν υπάρχει.

27. Να αποδειχθεί η Πρόταση 4.39.

28. Έστω ϕ θετική και μετρήσιμη συνάρτηση στο $(0,\infty)$. Να αποδειχθεί ότι
$$\int_{(0,\infty)} \phi(x)e^{-x}\,\mathrm{d}m(x) = \lim_{n\to\infty} n \int_{(0,1)} \phi(nx)(1-x)^n\,\mathrm{d}m(x)\,.$$
Αν το $\int_{(0,1)} (\lim_{n\to\infty} n\phi(nx)(1-x)^n)\,\mathrm{d}m(x)$ υπάρχει, τότε γενικά είναι
$$\lim_{n\to\infty} n\int_{(0,1)} \phi(nx)(1-x)^n\,\mathrm{d}m(x) \neq \int_{(0,1)} \Big(\lim_{n\to\infty} n\phi(nx)(1-x)^n\Big)\,\mathrm{d}m(x)\,.$$
Υπόδειξη. Αν $n+x>0$, η ακολουθία $a_n := (1+x/n)^n$ είναι γνήσια αύξουσα.

29. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη, $E \in \mathcal{M}$. Αν το ολοκλήρωμα $\int_E f\,\mathrm{d}m$ υπάρχει και (E_n) είναι αύξουσα ακολουθία στο $\mathcal{M}$ με $\lim_{n\to\infty} E_n = E$, τότε
$$\int_E f\,\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,\mathrm{d}m\,.$$

30. Έστω $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη συνάρτηση, $E \in \mathcal{M}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία (E_n) στο $\mathcal{M}$ με $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$, τέτοια ώστε
$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} |f|\,\mathrm{d}m < \infty\,.$$
Να αποδειχθεί ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο E με
$$\int_E f\,\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,\mathrm{d}m\,.$$

31. (α΄) Έστω $f_n = \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Δείξτε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει στο 0 ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και ότι
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,\mathrm{d}m \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}m\,,$$
δηλαδή δεν ισχύει το Θεώρημα 4.43. Γιατί;

    (β΄) Έστω $f_n(x) = n^{-1}\left(1 - n^{-1}|x|\right)\chi_{[-n,n]}(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Δείξτε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει στο 0 ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και ότι
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,\mathrm{d}m \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}m\,.$$
Γιατί δεν εφαρμόζεται το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue;

(γ΄) Έστω $g_n = n\chi_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,2]} g_n \,\mathrm{d}m \neq \int_{[0,2]}\Big(\lim_{n\to\infty} g_n\Big)\,\mathrm{d}m\,.$$

Υπάρχει $\varphi \in L_1\,[0,2]$ τέτοιο ώστε $g_n \leq \varphi$ στο $[0,2]$;

32. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, $E \in \mathcal{M}$ και έστω

$$E_k := \Big\{x \in E : 2^k < |f(x)| \leq 2^{k+1}\Big\}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

(α΄) Δείξτε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k \chi_{E_k}(x) \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(x)|\chi_{E_k}(x) \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{k+1}\chi_{E_k}(x)\,.$$

(β΄) Δείξτε ότι $f \in L_1\,(E)$ αν και μόνο αν $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(E_k) < \infty\,.$

33. Υποθέτουμε ότι η Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f: E\to\mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε

$$m\left(\{x\in E:\,|f(x)|\geq t\}\right) < \frac{1}{1+t^2}\,, \quad \text{για κάθε } t>0\,.$$

Αν $0<p<2$, να αποδειχθεί ότι η $|f|^p \in L_1(E)$, δηλαδή η $|f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη.

Υπόδειξη. Βλέπε Παράδειγμα 4.41.

34. Έστω $f: E\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $E\in\mathcal{M}$, Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση και έστω

$$E_n := \{x\in E:\, n-1 \leq |f(x)| < n\}\,, \quad n\in\mathbb{N}^*\,.$$

Υποθέτουμε ότι $m(E_n) > 0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.

(α΄) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g: E\to\mathbb{R}$ με $g(x) = \big(n^2 m(E_n)\big)^{-1}$ αν $x\in E_n$, $n\in\mathbb{N}^*$, είναι ολοκληρώσιμη στο E.

(β΄) Δείξτε ότι η συνάρτηση fg δεν είναι ολοκληρώσιμη στο E.

35. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-nx}\cos x\,\mathrm{d}x\,.$$

Υπόδειξη. Για $x\in[0,\infty)$ είναι $0\leq\frac{x}{\mathrm{e}^x}<1$ και επομένως $0\leq\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^n\leq\frac{x}{\mathrm{e}^x}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$. Άρα, $|x^n\mathrm{e}^{-nx}\cos x|\leq(x\mathrm{e}^{-x})^n\leq x\mathrm{e}^{-x}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ και για κάθε $x\in[0,\infty)$.

36. **(Μια γενίκευση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue)** Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο μετρήσιμο σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}$ με $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ $\sigma.\pi.$ Υποθέτουμε ότι (g_n) είναι ακολουθία μη αρνητικών Lebesgue ολοκληρώσιμων συνάρτησεων στο X με $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ $\sigma.\pi.$ και ότι η g είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Αν

$$|f_n| \leq g_n \ \sigma.\pi., \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^* \quad \text{και} \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, dm = \int_X g \, dm \,,$$

δείξτε ότι $f \in L_1(\mathbb{R})$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, dm = \int_X f \, dm \,.$$

37. **(Θεώρημα Arzelà)** Έστω (f_n) ακολουθία Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$ με $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

38. Αν $f \in L_1(0,1)$, να αποδειχθεί ότι $x^n f(x) \in L_1(0,1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} x^n f(x) \, \mathrm{d}m(x) = 0 \,.$$

39. Να υπολογιστεί το

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{x/2} \, \mathrm{d}x \,.$$

40. Έστω J_α η συνάρτηση Bessel τάξης $\alpha \in \mathbb{R}$, με

$$J_\alpha(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha t - x \sin t) \, \mathrm{d}t \,, \quad x \in \mathbb{R} \,.$$

Αν (x_n) είναι πραγματική ακολουθία με $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} J_\alpha(x_n) = J_\alpha(x)$. Δηλαδή ότι η J_α είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

41. Αν $f \in L_1(\mathbb{R})$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) := \int_{(-\infty,x]} f \, \mathrm{d}m$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

42. **(Απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος- 1η μορφή)** Έστω $f \in L_1(E)$, όπου $E \in \mathcal{M}$.

    (α') Αν $E_c = \{x \in E : |f(x)| \geq c\}$, $c \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{c\to\infty} \int_{E_c} |f| \, \mathrm{d}m = 0$.

(β΄) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$ με $m(A) < \delta$ είναι $\int_A |f|\,\mathrm{d}m < \varepsilon$.

43. **(Απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος- 2η μορφή)** Υποθέτουμε ότι η μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη, δηλαδή

$$\forall\, E \in \mathcal{M}, \quad m(E) < \infty \Rightarrow \int_E |f|\, dm < \infty\,.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε για κάθε } A \in \mathcal{M} \text{ με } m(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f|\, dm < \varepsilon\,. \tag{4.34}$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Έστω ότι δεν ισχύει η (4.34). Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists A_n \in \mathcal{M} \text{ με } m(A_n) < \frac{1}{2^n} \text{ και } \int_{A_n} |f|\, dm \geq \varepsilon\,.$$

Αν $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, δείξτε ότι

$$\int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n} |f|\, dm \geq \varepsilon \quad \text{και} \quad m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 0\,.$$

44. Έστω $f \in L_1(E)$, $E \in \mathcal{M}$ και έστω $a > 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{a\to\infty} am(\{|f| > a\}) = 0\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν (a_n) είναι ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, θεωρείστε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων (g_n) με $g_n := |f|\chi_{\{|f|>a_n\}}$.

45. Έστω (f_n) ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ σχεδόν παντού. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο A με $m(A) < \infty$, μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g \geq 0$ και ένας φυσικός αριθμός n_0 τέτοιος ώστε

$$\int_{\mathbb{R}\setminus A} |f_n|\,\mathrm{d}m < \varepsilon \text{ και } |f_n| \leq g \text{ στο } A\,, \quad \text{για κάθε } n \geq n_0\,.$$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,\mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}m\,.$$

46. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $X \subset \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο με $m(X) < \infty$. Έστω

$$\mathcal{H} := \{f \in L_1(X) : |f| \leq g\},$$

όπου $g \in L_1(X)$.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $f \in \mathcal{H}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq X$,

$$\int_A |f|\, dm \leq \int_{\{g>n\}} g\, dm + nm(A).$$

(ii) Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g\chi_{\{g>n\}}\, dm = 0.$$

(iii) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq X$ με $m(A) < \delta$ είναι

$$\sup\left\{\int_A |f|\, dm : \ f \in \mathcal{H}\right\} \leq \varepsilon.$$

47. Έστω

$$f_n(x) = \frac{n \sin x}{1 + n^2 x^{1/2}}, \quad x \in (0,1).$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} f_n\, \mathrm{d}m = \int_{(0,1)} \lim_{n\to\infty} f_n\, \mathrm{d}m = 0.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Για κάθε $x \in (0,1)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$\left|\frac{n \sin x}{1 + n^2 x^{1/2}}\right| \leq \frac{n}{1 + n^2 x^{1/2}} \leq \frac{n}{n^2 x^{1/2}} \leq \frac{1}{x^{1/2}}.$$

48. Έστω $f_n(x) = \frac{nx \ln x}{1+n^2x^2}$, $x \in (0,1]$. Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1]} f_n(x)\, \mathrm{d}m(x).$$

49. Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1 + nx^3}\, \mathrm{d}x.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Είναι

$$\frac{\sqrt{x}}{1 + nx^3} \leq x^{-3/2}, \quad \text{για κάθε } x \geq 1.$$

50. Έστω $f_n(x) := \frac{n^2 x}{(1+n^2x^2)\ln n}$, για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ και για κάθε $0 \leq x \leq 1$.

(ι) Να υπολογιστεί το
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(ιι) Υπάρχει $\varphi \in L_1\,[0,1]$ τέτοια ώστε $f_n \leq \varphi$ στο $[0,1]$;

51. Υποθέτουμε ότι η
$$g(t) := \int_{[0,\infty)} e^{tx} f(x)\,dm(x)$$
είναι πεπερασμένη για κάθε $t \geq 0$, όπου f είναι μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στο $[0,\infty)$.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι η g είναι συνεχής για $t > 0$, αποδεικνύοντας ότι για κάθε ακολουθία (h_n) με $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ είναι
$$\lim_{n\to\infty} g(t+h_n) = g(t)\,.$$

(β΄) Να αποδειχθεί ότι η g είναι παραγωγίσιμη για $t > 0$, αποδεικνύοντας ότι για κάθε ακολουθία (h_n) μη μηδενικών όρων με $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ το όριο
$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(t+h_n)-g(t)}{h_n}$$
υπάρχει και είναι το ίδιο (για κάθε τέτοια ακολουθία). Ποια είναι η παράγωγος $g'(t)$;
<u>*Υπόδειξη*</u>. Ισχύει η ανισότητα
$$\left|\frac{e^{h_n x}-1}{h_n}\right| < e^{(1+|h_n|)x}\,, \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

52. Υποθέτουμε ότι η $f \in L_1\,(\mathbb{R})$ και η φ είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση. Έστω
$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{d}m(y)\,.$$

(α΄) Να αποδειχθεί ότι η F είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση.

(β΄) Αν επιπλέον η φ' είναι φραγμένη και συνεχής συνάρτηση, να αποδειχθεί ότι η F είναι παραγωγίσιμη και ότι
$$F'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi'(x-y)\,\mathrm{d}m(y)\,.$$

53. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $[a, b]$, με $m(E) > 0$ και έστω η συνάρτηση

$$F(x) := \int_a^b \chi_E(t)\chi_E(x+t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Να αποδειχθεί ότι:

(i) Η F είναι συνεχής στο 0, με $F(0) > 0$.

(ii) Υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $F(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\delta,\, \delta)$.

(iii) Αν $x \in (-\delta,\, \delta)$, τότε υπάρχει t_0 (που εξαρτάται από το x) τέτοιο ώστε

$$\chi_E(t_0)\chi_E(x+t_0) > 0\,.$$

Το $t_0 \in E$, το $x + t_0 \in E$ και κατά συνέπεια το διάστημα $(-\delta,\, \delta) \subset E - E$. Επομένως, η διαφορά $E - E$ θα περιέχει μια περιοχή $(-\delta,\, \delta)$ του μηδενός.

Η παραπάνω απόδειξη του θεωρήματος του Steinhaus (βλέπε Θεώρημα 2.71) οφείλεται στον A. Calderon.

54. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E) < \infty$. Αν τα A, B είναι Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του E, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$d(A, B) := m\left(A \setminus B\right) + m\left(B \setminus A\right)\,.$$

Λέμε ότι το A είναι *ισοδύναμο* του B, συμβολισμός $A \sim B$, αν $d(A, B) = 0$.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι
$$d(A, B) = \int_E |\chi_A - \chi_B|\, dm\,.$$

(β΄) Αν X είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμιών των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E, να αποδειχθεί ότι ο (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος.

(γ΄) Ο μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρης. Δηλαδή αν (A_n) είναι ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E με $\lim_{m,n\to\infty} d(A_m, A_n) = 0$, τότε υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq E$ τέτοιο ώστε $\lim_{n\to\infty} d(A_n, A) = 0$.

55. Δίνεται ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων (f_n) με $f_n \in L_1(X)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, όπου $X \subset \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(X) < \infty$. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (f_n)

ικανοποιεί την εξής συνθήκη:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } M > 0 \text{ τέτοιο ώστε } \int_X |f_n|\chi_A \, dm < \varepsilon \,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^* \,,$$

όπου $A = \{x \in X : |f_n(x)| > M\}$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ σχεδόν παντού στο X. Δείξτε ότι η $f \in L_1(X)$ και ότι η σημειακή σύγκλιση της (f_n) συνεπάγεται την ισχυρή σύγκλιση, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0 \,.$$

56. Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

$$(\alpha) \ \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \frac{\sin(\mathrm{e}^x)}{1+nx^2} \, \mathrm{d}m(x) \qquad (\beta) \ \lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} \frac{\ln(x+n)}{n} \mathrm{e}^{-x} \cos x \, \mathrm{d}m(x) \,.$$

57. Αν $\alpha < 1$, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n)} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{\alpha x} \, \mathrm{d}m(x) \,.$$

58. (α΄) Έστω (a_n) πραγματική ακολουθία και έστω $a \in \mathbb{R}$. Δώστε ένα παράδειγμα συναρτήσεων $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n, f \in L_1(\mathbb{R})$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τέτοιων ώστε

- $f_n \longrightarrow f$ κατά σημείο καθώς το $n \to \infty$,
- $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = a_n \,,$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$,
- $\int_{\mathbb{R}} f \, dm = a$.

Εφαρμογή. Δώστε ένα παράδειγμα συναρτήσεων $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n, f \in L_1(\mathbb{R})$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τέτοιων ώστε

- $f_n \longrightarrow f$ κατά σημείο καθώς το $n \to \infty$,
- $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = \frac{1}{n} \,,$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$,
- $\int_{\mathbb{R}} f \, dm = 1$.

(β΄) Υπάρχουν μετρήσιμες και μη αρνητικές συναρτήσεις f_n, f, $n \in \mathbb{N}^*$, στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

- $f_n \longrightarrow f$ κατά σημείο καθώς το $n \to \infty$,
- $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = \frac{1}{n} \,,$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$,
- $\int_{\mathbb{R}} f \, dm = 1$;

59. Έστω οι ακολουθίες συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{αν } 0 \le x \le \sqrt{n} \\ 0 & \text{αν } x > \sqrt{n} \end{cases}$$

και

$$g_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n+1/2} & \text{αν } 0 \le x \le \sqrt{n} \\ 0 & \text{αν } x > \sqrt{n}\,. \end{cases}$$

(α΄) Δείξτε ότι

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx = \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{4}\,,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

(β΄) Δείξτε ότι η $y = e^{-x^2}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, +\infty)$ και ότι

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Υπόδειξη. (α΄) Είναι

$$\int_0^{\pi/2} \sin^k x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^k x\,dx$$
$$= \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{αν } k = 2n, \\ \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} & \text{αν } k = 2n+1. \end{cases}$$

60. (α΄) Αν $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδειχθεί ότι $0 < \left[1 - (1 - t/n)^n\right]/t \le 1$, για κάθε $t \in (0,1]$ και $0 \le (1 - t/n)^n \le \mathrm{e}^{-t}$, για κάθε $t \in [0, n]$.

(β΄) Αν

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{t}\left[1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \mathrm{d}t \quad \text{και} \quad J_n = \int_1^n \frac{1}{t}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t,$$

να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} J_n = \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(γ΄) Να αποδειχθεί ότι

$$I_n - J_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left[1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \mathrm{d}t - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Να συμπεράνετε ότι
$$\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-1/t}}{t}\,\mathrm{d}t = \gamma,$$
όπου $\gamma = \lim_{n\to\infty}(1+1/2+\cdots+1/n-\ln n)$ είναι **η σταθερά του Euler** ($\gamma = 0,577215\ldots$).

61. Να βρεθεί η μικρότερη σταθερά c τέτοια ώστε
$$\ln(1+\mathrm{e}^t) < c+t\,, \quad \text{για κάθε } t>0\,.$$
Υπάρχει το
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left(1+\mathrm{e}^{nf(x)}\right)\,\mathrm{d}x$$
για κάθε πραγματική συνάρτηση $f \in L_1\,[0,1]$; Αν υπάρχει να υπολογιστεί.

62. Με τεχνικές "Μιγαδικής Ανάλυσης" αποδεικνύεται ότι
$$\int_0^{2\pi} \ln|1+ae^{i\theta}|\,d\theta = 0\,, \quad |a|<1\,.$$
Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue, δείξτε ότι $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln|1+e^{i\theta}|\,d\theta = 0.$

63. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x=\mathrm{e}^{-t}$ να αποδειχθεί ότι
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty \left\{\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}t^n\mathrm{e}^{-nt}\right\}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n-1)!}n^{-n}\Gamma(n) = \sum_{n=1}^\infty n^{-n}\,.\end{aligned}$$

64. Δείξτε ότι
$$\int_{[0,\,\infty)} \frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}m(x) = \frac{\pi^2}{6}\,.$$
Υπόδειξη. Να αποδειχθεί ότι $x/(\mathrm{e}^x-1) = \sum_{n=1}^\infty x\mathrm{e}^{-nx}$, για κάθε $x>0$. Ως γνωστόν $\sum_{n=1}^\infty(1/n^2) = \pi^2/6$.

65. Αν $u_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}-2\mathrm{e}^{-2nx}$, δείξτε ότι
$$\sum_{n=1}^\infty u_n(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x+1} \ \text{ και } \ \sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty u_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \neq \ln 2 = \int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty u_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
Τι συμπεραίνετε για τη σειρά $\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty |u_n(x)|\,\mathrm{d}x$;

66. Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$. Αν υπάρχει $g \in L_1(\mathbb{R})$, τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq g(x)$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}m(x)\,.$$

67. (α΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\left|\mathrm{e}^{-sx}\frac{\sin x}{x}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,\mathrm{e}^{-sx}\right| \leq \mathrm{e}^{(1-s)x}\,, \quad \text{για } x > 0\,.$$

(β΄) Να αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός Laplace

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-sx}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)\,, \quad s > 1\,.$$

68. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \Gamma\left(x\right)\zeta\left(x\right)\,, \quad x > 1\,,$$

όπου $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$, $x > 1$, είναι η **ζ- συνάρτηση του Riemann**.

Υπόδειξη. $1/\left(\mathrm{e}^t - 1\right) = \mathrm{e}^{-t}/\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nt}$.

69. Έστω $\psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2\pi t}$, $t > 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{\infty} \psi(t)t^{x/2-1}\,\mathrm{d}t = \pi^{-x/2}\Gamma(x/2)\zeta(x)\,, \quad x > 1\,,$$

όπου $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$, $x > 1$.

70. Έστω $p > 0$.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^{p+n}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(p+n+1)^2}\,.$$

(β΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\int_{(0,1)} \frac{x^p}{1-x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}m(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2}\,.$$

Υπόδειξη. Για $x \in (0,1)$ είναι $(x^p/\left(1-x\right))\ln(1/x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{p+n}\ln(1/x)$.

71. Για $x > 0$ είναι

$$\sin x \cdot \ln x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,, \quad \text{με } f_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}\ln x}{(2n+1)!}\,.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!(2n+2)} < \infty$$

και στη συνέχεια ότι

$$\int_0^1 \sin x \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n)}\,.$$

72. Αν $a \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}\,.$$

Υπόδειξη. Δείξτε ότι

$$\frac{\sin ax}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin ax\,, \quad \text{για κάθε } x > 0\,.$$

73. Αν $a \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos ax\,dx &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2a)^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n}\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2a)^{2n} \frac{(2n-1)!!}{2^n (2n)!} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}\,.\end{aligned}$$

74. Αν $r, s > 0$, δείξτε ότι

$$\int_0^1 \frac{x^{r-1}}{1 + x^s}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{r + ns}\,.$$

Εφαρμογή: Να αποδειχθεί ότι

(i) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$,

(ii) $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$.

75. Έστω η ακολουθία διαστημέτων $A_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \chi_{A_n} & \text{αν } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{αν } x = 0\,, \end{cases}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η $f \in L_1\,[0,1]$;

76. Έστω (f_n) ακολουθία πραγματικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, δηλαδή $f_n \in L_1(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f \in L_1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \, \mathrm{d}m \leq \frac{1}{n^2}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

(α΄) Δείξτε πρώτα ότι

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f_{n-1}| \, \mathrm{d}m < \infty$$

και στη συνέχεια ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} (f_n(x) - f_{n-1}(x))$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ και το άθροισμά της είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(β΄) Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

77. Έστω $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $|a_n| \leq \ln n$. Να αποδειχθεί ότι η $\sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[2, \infty)$ και ότι

$$\int_2^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^2 \ln n}.$$

78. Έστω $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ μια αρίθμηση των ρητών αριθμών στο διάστημα $[0,1]$ και έστω (a_n) πραγματική ακολουθία με $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n |x - r_n|^{-1/2}$ συγκλίνει απόλυτα $\sigma.\pi.$ στο $[0,1]$.

79. Να υπολογιστεί το

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,\pi/2]} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x \, \mathrm{d}m(x).$$

80. Έστω f ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και έστω $a > 0$. Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a} + 1\right)$ συγκλίνει απόλυτα σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ και ότι το άθροισμά της $F(x)$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $(0, a)$. Επίσης, να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{a} \int_{(0,a)} F(x) \, \mathrm{d}m(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mathrm{d}m(x).$$

81. Έστω $f \in L_1(\mathbb{R})$ και έστω $\phi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f\left(2^n x + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Δείξτε ότι η ϕ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και ότι $\int_{\mathbb{R}} f \, dm = \int_{\mathbb{R}} \phi \, dm$.

82. Έστω η συνάρτηση f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε a, b με $0 \leq a < b \leq 1$ είναι

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) \, dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x) \, dx.$$

Δείξτε ότι f είναι σταθερή $\sigma.\pi.$ στο $[0,1]$.

83. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,2\pi]$ και έστω $m \in \mathbb{N}^*$. Αν (k_n) είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και (a_n) είναι μια οποιαδήποτε πραγματική ακολουθία, να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$\cos^{2m} t = 2^{-2m}\binom{2m}{m} + 2^{1-2m}\sum_{k=1}^{m}\binom{2m}{m-k}\cos 2kt$$

και να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n\to\infty}\int_E \cos^{2m}(k_n x + a_n)\,\mathrm{d}m(x)$.

84. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε $\phi(0) = 1$ και $\varphi, \varphi' \in L_1[0,\infty)$. Αν $a > 0$, να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^\infty \varphi(ax)\sin x\,\mathrm{d}x = 1 + \int_0^\infty \varphi'(t)\cos(t/a)\,\mathrm{d}t\,.$$

Στη συνέχεια να υπολογιστεί το $\lim_{a\to 0^+}\int_0^\infty \varphi(ax)\sin x\,\mathrm{d}x$.

Υπόδειξη. Το $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = 1 + \lim_{x\to\infty}\int_0^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^\infty \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ υπάρχει. Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ συγκλίνει, θα είναι $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$.

85. (α΄) Αν $k \in \mathbb{N}^*$, να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos kt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}\,.$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kt = \Re\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{i}kt}\right) = \frac{\cos\left[(n+1)t/2\right]\cdot\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\,,\quad t \neq 0\,,$$

να αποδειχθεί ότι

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \int_0^\pi f(t)\sin(n+1/2)t\,\mathrm{d}t + \frac{\pi^2}{3}\,,$$

όπου

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^2-2\pi t}{2\pi\sin(t/2)} & \text{αν } 0 < t \leq \pi\,, \\ -2 & \text{αν } t = 0\,. \end{cases}$$

(γ΄) Να αποδειχθεί ότι $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2) = \pi^2/6$.

86. Υποθέτουμε ότι το $E \subset [0, 2\pi]$ είναι μετρήσιμο σύνολο και ότι $\int_E x^n \cos x \,\mathrm{d}x = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $m(E) = 0$.

87. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\int_0^1 x f(x) \,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^n f(x) \,\mathrm{d}x = 0$$

για $n = 0, 2, 3, 4 \ldots$;

<u>*Υπόδειξη*</u>. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x) \mathrm{e}^{-2\pi i n x} \,\mathrm{d}x = -2\pi n i$.

88. (α΄) Αν το σύνολο $E \subset [0, 2\pi]$ είναι μετρήσιμο, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \cos nx \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_E \sin nx \,\mathrm{d}x = 0\,.$$

(β΄) Έστω $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Θεωρούμε το σύνολο

$$E = \{x \in [0, 2\pi] : \text{η ακολουθία } (\sin(k_n x)) \text{ συγκλίνει}\}\ .$$

Δείξτε ότι $m(E) = 0$.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Επειδή $\lim_{n\to\infty} \int_E \cos(2k_n x) \,\mathrm{d}x = 0$, όπου E μετρήσιμο υποσύνολο του $[0, 2\pi]$, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $1 - 2\sin^2(k_n x) = \cos(2k_n x)$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \sin(k_n x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ σχεδόν παντού στο E.

Βιβλιογραφία

[1] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Principles of Real Analysis* (3rd edition), Harcourt/ Academic Press, 1998.

[2] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Problems in Real Analysis: A workbook with solutions* (2nd edition), Harcourt/ Academic Press, 1999.

[3] Σ. Αργυρός, *Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης*, Ε.Μ. Πολυτεχνείο, 2011.

[4] R. Ash and C. Doleans- Dade, *Probability & Measure Theory* (2nd edition), Academic Press, 1999.

[5] E. Asplund and L. Bungart, *A first course in integration*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1966.

[6] R. G. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure*, John Wiley & Sons, Inc., 1995.

[7] R. G. Bartle, *A Modern Theory of Integration*, American Mathematical Society, 2001.

[8] H. Bauer, *Measure and Integration theory (transl. by R. B. Burckel)*, Walter de Gruyter, Inc. (de Gruyter Studies in Mathematics 26), 2001.

[9] R. Beals, *Analysis: An Introduction*, Cambridge University Press, 2004.

[10] H. S. Bear, *A Primer of Lebesgue Integration*, Academic Press, Inc., 1995.

[11] S. Berberian, *Fundamentals of Real Analysis*, Springer- Verlag (Universitext), 1999.

[12] P. Billingsley, *Probability and Measure* (3rd edition), John Wiley & Sons, Inc., 1995.

[13] R. P. Boas, Jr., *A primer of real functions* (fourth edition), The Mathematical Association of America, Inc. (The Carus Math. Monographs, Number 13), 1996.

[14] V. I. Bogachev, *Measure theory. Vol. I, II*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[15] D. M. Bressoud, *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration*, Cambridge University Press, 2008.

[16] F. Burk, *Lebesgue Measure and Integration: An introduction* , John Wiley & Sons, Inc., 1998.

[17] F. Burk, *A Garden of Integrals*, Mathematical Association of America, 2007.

[18] J. C. Burkill, *The Lebesgue Integral (new edition)*, Cambridge University Press, 2004.

[19] A. Bouziad et J. Calbrix, *Théorie de la mesure et de l'intégration*, Publications des universités de Rouen et du Havre, 2010.

[20] W. J. Caczor and M. T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis III : Integration*, American Mathematical Society, 2003.

[21] M. Capiński and E. Kopp, *Measure, Integral and Probability* (2nd edition), Springer-Verlag (Springer Undergraduate Mathematics Series), 2004.

[22] N. L. Carothers, *Real Analysis*, Cambridge University Press, 2000.

[23] S. B. Chae, *Lebesgue integration* (2nd edition), Springer- Verlag (Universitext), 1995.

[24] B. D. Craven, *Lebesgue Measure & Integral*, Pitman, 1982.

[25] P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, *A*cta Math. **30** (1906) 335–400.

[26] J. Franks, *A (Terse) Introduction to Lebesgue Integration*, American Mathematical Society, 2009.

[27] A. Friedman, *Foundations of modern analysis*, Dover Publications, Inc. , 1982.

[28] T. Gälluet, R. Herbin, *Mesure, Intégration, Probabilités*, Ellipses, Paris, 2013.

[29] A. Gramain, *Intégration. Collection Méthodes*, Hermann, Paris, 1998.

[30] P. R. Halmos, *Measure Theory* (2nd Printing), Springer- Verlag (Graduate Texts in Mathematics, vol. 18), 1974.

[31] T. Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development (2nd edition)*, American Mathematical Society (Series: AMS Chelsea Publishing), 2002.

[32] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis: A Modern Treatment of the Theory of Functions of a Real Variable (3rd printing)*, Springer- Verlag (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 25), 1975.

[33] S. Igari, *Real Analysis - With an introduction to wavelet theory*, American Mathematical Society (Translations of Mathematical Monographs , vol. 177), 1998.

[34] P. K. Jain and V. P. Gupta, *Lebesgue Measure and Integration*, New Age International (P) Ltd., 2006.

[35] F. Jones, *Lebesgue Integration on Euclidean Space (revised edition)*, Jones and Bartlett Publishers International, 2001.

[36] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis (3rd edition)* , Cambridge University Press, 2004.

[37] H. Kestelman, *Modern Theories of Integration*, Dover Publications, Inc. , 1960.

[38] J. F. C. Kingman, S. J. Taylor, *Introdction to Measure and Probability*, Cambridge University Press, 2008.

[39] G. Klambauer, *Real Analysis*, Dover Publications, Inc., 2005.

[40] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Dover Publications, Inc., 1961.

[41] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover Publications, Inc., 1975.

[42] C. S. Kubrusly, *Measure Theory: A First Course*, Academic Press, 2007.

[43] H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives: Third Edition*, American Mathematical Society, 2003.

[44] Jean-François Le Gall, *Magistère MMFAI: Cours d'intégration et probabilités*, Département Mathématiques et Applications–Ecole normale Supérieure de Paris , 2003.

[45] B. Levi, Sopra l'integrazione delle serie, *R*end. Ist. Lombardo Sci. Lettere (2) **39** (1906) 775–780.

[46] J. Lukeš and J. Malý, *Measure and Integral*, Matfyzpress (Publishing House of the Faculty of Mathematics and Physics, Charles University Prague), 1995.

[47] B. Makarov and A. Podkorytov, *Real Analysis: Measures, Integrals and Applications*, Springer- Verlag (Universitext), 2013.

[48] J. N. McDonald and N. A. Weiss, *A Course in Real Analysis*, Academic Press, Inc., 1999.

[49] M. E. Munroe, *Introduction to Measure and Integration*, Addison–Wesley, 1959.

[50] I. P. Natanson, *Theory of functions of a real variable, vol. I, II* (translated from the Russian by Leo F. Boron , fourth printing), Frederick Ungar Publishing Co., 1974.

[51] S. Ovchinnikov, *A Course on Lebesgue's Theory*, Springer- Verlag (Universitext), 2013.

[52] E. R. Phillips, *An introduction to analysis and integration theory*, Dover Publications, Inc., 1984.

[53] H.A. Priestley, *Introduction to integration*, Oxford University Press, 1997.

[54] I. K. Rana, *An introduction to measure and integration* (2nd edition), American Mathematical Society (Graduate Studies in Mathematics , vol. 45), 2002.

[55] J. H. Randolph, *Basic Real and Abstract Analysis*, Academic Press, 1968.

[56] H. L. Royden, P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis* (Fourth Edition), Prentice Hall , 2010.

[57] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis* 3rd. ed., McGraw-Hill, 1976.

[58] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* 3rd. ed., McGraw-Hill, 1987.

[59] S. Saks, *Theory of the Integral (2nd revised edition)*, Dover Publications(Phoenix Edition), 2005.

[60] R. L. Schilling, *Measures, Integrals and Martingales*, Cambridge University Press, 2005.

[61] H. S. Sohrab, *Basic Real Analysis*, Birkhäuser, 2003.

[62] E. M. Stein and R. Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005.

[63] H. Steinhaus, Sur les distances des points des ensembles de mésure positive, *F*und. Math. **1** (1920) 93–104.

[64] K. R. Stromberg, *Introduction to Classical Real Analysis*, Chapman & Hall, 1981.

[65] A. E. Taylor, *General theory of functions and integration* , Dover Publications, Inc. , 1985.

[66] A. Torchinsky, *Problems in Real and Functional Analysis*, Amer. Math. Soc. (Graduate Studies in Mathematics, vol. 166), 2015.

[67] C. Wagschal, *Dérivation, intégration - Avec exercices corrigés*, Hermann, Paris, 2009.

[68] A. J. Weir, *Lebesgue Integration & Measure*, Cambridge University Press, 1973.

[69] A. J. Weir, *General Integration & Measure*, Cambridge University Press, 1979.

[70] R. L. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and integral*, Marcel Dekker, Inc., 1977.

[71] H. J. Wilcox and D. L. Myers, *An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series*, Dover Publications, Inc., 1994.

[72] J. Yeh, *Real analysis. Theory of measure and integration (Second edition)*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006.

[73] A. C. Zaanen, *Continuity, Integration and Fourier Theory*, Springer- Verlag (Universitext), 1989.