ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ασκήσεις και Θέματα στη Μιγαδική Ανάλυση

Γιάννης Σαραντόπουλος

Αθήνα

14 Νοεμβρίου 2020

Περιεχόμενα

Συμβολισμός και Ορολογία

- $\mathbb{R}$- το σύνολο των πραγματικών αριθμών
- $\mathbb{R}_+$- το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών
- $\mathbb{Z}$- το σύνολο των ακεραίων
- $\mathbb{N}$- το σύνολο των θετικών ακεραίων
- $\mathbb{Q}$- το σύνολο των ρητών
- Αν $n \in \mathbb{N}$,
  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$,
  $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)\,(2n)$ και
  $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\,(2n+1)$.
- Το **ακέραιο μέρος** του $x \in \mathbb{R}$, συμβολίζεται με $[x]$, είναι ο μοναδικός ακέραιος $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $k \leq x < k+1$.
- $\mathbb{C}$- το μιγαδικό επίπεδο
- $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$- το επεκταμένο μιγαδικό επίπεδο
- $\Re$- πραγματικό μέρος
- $\Im$- φανταστικό μέρος
- $\arg$- όρισμα
- $\overline{z}$- ο συζυγής του z

- $D(z_0, r)$- ανοικτός δίσκος με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$ και ακτίνα $r > 0$ (ο ανοικτός δίσκος $D(z_0, r)$ λέγεται και **περιοχή** του $z_0 \in \mathbb{C}$)

- $\overline{D}(z_0, r)$- κλειστός δίσκος με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$ και ακτίνα $r > 0$

- $C(z_0, r)$- κύκλος με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$ και ακτίνα $r > 0$

- $C^+(z_0, r)$- κύκλος με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$, ακτίνα $r > 0$ και θετική φορά διαγραφής

- $C^-(z_0, r)$- κύκλος με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$, ακτίνα $r > 0$ και αρνητική φορά διαγραφής

Αν το A είναι υποσύνολο του $\mathbb{C}$, τότε

- το $z_0 \in A$ είναι **εσωτερικό σημείο** του A, αν υπάρχει περιοχή $D(z_0, \delta)$ του z_0 τέτοια ώστε $D(z_0, \delta) \subseteq A$,

- το $z_0 \in \mathbb{C}$ λέγεται **σημείο συσσώρευσης (**$\sigma.\sigma$**)** του A, αν $D(z_0, \varepsilon) \cap (A \setminus \{z_0\}) \neq \emptyset$, για κάθε περιοχή $D(z_0, \varepsilon)$ του z_0.

- Η συνάρτηση f ορισμένη στο $A \subseteq \mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$, είναι **φραγμένη**, αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in A$.

- f'- παράγωγος της f

- $f^{(k)}$- k-παράγωγος της f

- $\exp$- εκθετική συνάρτηση

- $\log$- μιγαδικός λογάριθμος

- Log- κύριος ή πρωτεύον κλάδος λογαρίθμου

- γ- καμπύλη

- γ^*- πεδίο τιμών της καμπύλης

- $\int_\gamma f(z)\, dz$- επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στη καμπύλη γ

- $\oint_\gamma f(z)\, dz$- επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στη κλειστή καμπύλη γ

- $\ointctrclockwise_\gamma f\left(z\right)\,dz$- επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στη κλειστή καμπύλη γ με θετική φορά διαγραφής
- $\ointclockwise_\gamma f\left(z\right)\,dz$- επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στη κλειστή καμπύλη γ με αρνητική φορά διαγραφής
- $n\left(\gamma, z_0\right)$ ή $I\left(\gamma, z_0\right)$ ή $\mathrm{Ind}_\gamma\left(z_0\right)$- δείκτης στροφής της καμπύλης γ ως προς το $z_0 \notin \gamma^*$
- $\mathrm{Res}\left(f, z_0\right)$- ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0
- Γ- συνάρτηση γάμμα του Euler
- ζ- συνάρτηση ζήτα του Riemann

Κεφάλαιο 1

Λυμένες Ασκήσεις

1.1 Ακαδημαϊκό έτος 2016–17

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Έστω $n \in \mathbb{N}^*$.

   (α΄) Δείξτε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $z^{2n} = 1$ είναι οι

$$z_k = e^{\pm i \frac{k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \pm i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n\,.$$

   Οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης είναι $z_0 = 1$ και $z_n = -1$.

   (β΄) Δείξτε ότι

$$z^{2n} - 1 = (z^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(z - e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right) = (z^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)\,. \tag{1.1}$$

Λύση.

(α΄) Οι ρίζες της εξίσωσης $z^{2n} = 1$ είναι

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{2n}} = e^{i\frac{k\pi}{n}} , \quad k = 0, 1, \ldots, 2n - 1\,.$$

Όμως

$$z_{2n-1} = e^{i\frac{(2n-1)\pi}{n}} = e^{-i\frac{\pi}{n}}\,, \quad z_{2n-2} = e^{i\frac{(2n-2)\pi}{n}} = e^{-i\frac{2\pi}{n}}\,, \ldots, z_{n+1} = e^{i\frac{(n+1)\pi}{n}} = e^{-i\frac{(n-1)\pi}{n}}$$

και επομένως οι ρίζες της εξίσωσης $z^{2n} = 1$ είναι

$$z_k = e^{\pm i\frac{k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \pm i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n\,.$$

(β΄) Επειδή

$$\left(z - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(z - e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right) = z^2 - z\left[e^{i\frac{k\pi}{n}} + e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right] + 1 = z^2 - 2z\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\,,$$

είναι

$$\begin{aligned} z^{2n} - 1 &= (z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(z - e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right) \\ &= (z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(z - e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right) \\ &= (z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)\,. \end{aligned}$$

■

2. Έστω $n \in \mathbb{N}^*$. Για κάθε $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ δείξτε ότι

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\theta - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\,. \tag{i}$$

Παίρνοντας $\theta \to 0$, δείξτε ότι

$$n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\,. \tag{ii}$$

Υπόδειξη. Αν $z = \cos\theta + i\sin\theta$, από την (1.1) προκύπτει ότι

$$z^n - z^{-n} = (z - z^{-1})\prod_{k=1}^{n-1}\left(z + z^{-1} - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\,.$$

Λύση. Πολλαπλασιάζοντας με z^{-n}, από την (1.1) έχουμε

$$z^n - z^{-n} = (z - z^{-1})\prod_{k=1}^{n-1}\left(z + z^{-1} - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\,.$$

Αν $z = \cos\theta + i\sin\theta$, η παραπάνω ισότητα γράφεται στη μορφή

$$2i\sin n\theta = 2i\sin\theta\prod_{k=1}^{n-1}\left(2\cos\theta - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\theta - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

Επειδή $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 1$, από τη ($i$) έπεται ότι

$$\begin{aligned} n &= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) \\ &= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1} 2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \\ &= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1} 2\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{(n-k)\pi}{2n}\right) \\ &= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1} 2\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \qquad \left(\sin\left(\tfrac{(n-k)\pi}{2n}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{k\pi}{2n}\right) = \cos\left(\tfrac{k\pi}{2n}\right)\right) \\ &= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

■

3. Έστω $x > 1$. Δείξτε ότι $1 - 2x\cos t + x^2 > 0$ για κάθε $t \in [0,\pi]$ και θεωρείστε τη συνάρτηση

$$f(t) := \ln(1 - 2x\cos t + x^2)\,, \quad t \in [0,\pi]\,,$$

Αν $n \in \mathbb{N}^*$, χρησιμοποιώντας τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann δείξτε ότι

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos t + x^2)\,dt = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2\pi\ln x\,. \qquad \textbf{(ολοκλήρωμα Poisson)}$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Από την (1.1) έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \ln\left[\frac{x-1}{x+1}(x^{2n}-1)\right].$$

Λύση. Επειδή για κάθε $t \in [0,\pi]$

$$1 - 2x\cos t + x^2 = (x - \cos t)^2 + \sin^2 t \geq (x - \cos t)^2 > 0\,,$$

η συνάρτηση $f(t) = \ln(1 - 2x\cos t + x^2)$ είναι καλά ορισμένη στο διάστημα $\in [0, \pi]$. Από την (1.1) έχουμε

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right) = \frac{x^{2n}-1}{x^2-1},$$

οπότε

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right) = \frac{x-1}{x+1}(x^{2n}-1).$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right) &= \ln\left[\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)\right]\\ &= \ln\left[\frac{x-1}{x+1}(x^{2n}-1)\right]\end{aligned}$$

και επομένως

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \ln\left[\frac{x-1}{x+1}(x^{2n}-1)\right].$$

Επειδή το $\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ είναι ένα άθροισμα Riemann της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, \pi]$, ως γνωστόν

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\ln(1 - 2x\cos t + x^2)\,dt &= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{x-1}{x+1}(x^{2n}-1)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left[x^{2n}\frac{x-1}{x+1}\left(1-\frac{1}{x^{2n}}\right)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left[2n\ln x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\left(1-\frac{1}{x^{2n}}\right)\right)\right]\\ &= 2\pi\ln x + \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\left(1-\frac{1}{x^{2n}}\right)\right) = 2\pi\ln x.\end{aligned}$$

■

4. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4} & \text{αν } z \neq 0,\\ 0 & \text{αν } z = 0. \end{cases}$$

Δείξτε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0, 0)$. Είναι η f συνεχής στο 0; Είναι η f αναλυτική στο 0; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση. Για $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, είναι

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{e^{-1/x^4}}{x} = x^{-1}e^{-1/x^4}\,.$$

Επειδή $\left|x^{-1}e^{-1/x^4}\right| = |x|^{-1}e^{-1/x^4}$ και

$$\lim_{x\to 0}|x|^{-1}e^{-1/x^4} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{t^4}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{4t^3e^{t^4}} = 0\,,$$

είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}x^{-1}e^{-1/x^4} = 0\,.$$

Παρόμοια, για $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, είναι

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}y^{-1}e^{-1/y^4} = 0\,.$$

Άρα $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -i\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, δηλαδή ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η f δεν είναι συνεχής στο 0. Αν $z_n = 1/n$, $w_n = (1+i)/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, είναι $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} w_n = 0$ με

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} e^{-n^4} = 0$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f(w_n) = \lim_{n\to\infty} e^{-n^4/(1+i)^4} = \lim_{n\to\infty} e^{n^4/4} = \infty\,.$$

Επομένως από το θεώρημα μεταφοράς το όριο $\lim_{z\to 0} f(z)$ δεν υπάρχει και κατά συνέπεια η f δεν είναι συνεχής 0. Άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $z \neq 0$ με $f'(z) = 4e^{-1/z^4}/z^5$ και δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Η f δεν είναι αναλυτική στο 0. ■

5. Να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση $u(x,y) = axe^y\cos x + ye^y\sin x + x$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Στη συνέχεια να βρεθεί η συζυγής αρμονική v της u καθώς επίσης και η ακέραια συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, με $f(0) = i$. Να εκφράσετε την f σαν συνάρτηση του $z = x + iy$.

Λύση. Επειδή η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης στο $\mathbb{R}^2$, για να είναι η u αρμονική θα πρέπει να ισχύει η εξίσωση Laplace:

$$\begin{aligned} & u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ & \quad \Leftrightarrow (-2ae^y \sin x - axe^y \cos x - ye^y \sin x) + (axe^y \cos x + 2e^y \sin x + ye^y \sin x) = 0 \\ & \quad \Leftrightarrow 2(-a+1)e^y \sin x = 0\,, \quad \text{για κάθε } (x,y) \in \mathbb{R}^2\,. \end{aligned}$$

Επομένως $a = 1$ και κατά συνέπεια

$$u(x,y) = xe^y \cos x + ye^y \sin x + x\,.$$

Ως γνωστόν, στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C}$ υπάρχει συζυγής αρμονική v της u. Δηλαδή η $f = u + iv$ είναι ακέραια συνάρτηση. Από την εξίσωση Cauchy–Riemann $u_x = v_y$ έχουμε $v_y = e^y \cos x - xe^y \sin x + ye^y \cos x + 1$ και επομένως

$$\begin{aligned} v(x,y) &= e^y \cos x - xe^y \sin x + \cos x \int ye^y\, dy + y + c(x) \\ &= e^y \cos x - xe^y \sin x + (ye^y - e^y) \cos x + y + c(x) \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\ &= -xe^y \sin x + ye^y \cos x + y + c(x)\,. \end{aligned}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann $v_x = -u_y$ προκύπτει ότι

$$-e^y \sin x - xe^y \cos x - ye^y \sin x + c'(x) = -xe^y \cos x - e^y \sin x - ye^y \sin x \Leftrightarrow c'(x) = 0$$

και άρα $c(x) = c$. Δηλαδή

$$v(x,y) = -xe^y \sin x + ye^y \cos x + y + c\,.$$

και κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} f(z) &= u(z,0) + iv(z,0) \\ &= z\cos z + z + i(-z\sin z + c) \\ &= z(\cos z - i\sin z) + z + ic = ze^{-iz} + z + ic\,, \end{aligned}$$

$c \in \mathbb{R}$. Όμως $f(0) = i$, οπότε $c = 1$. Άρα,

$$f(z) = ze^{-iz} + z + i\,.$$

■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Έστω $|z| = R$ ο κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο 0 και ακτίνα $R > 1$. Αν γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου, δείξτε ότι
$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{z-1}{z+1}\, dz \right| \le \frac{R+1}{R-1} \cdot \pi R\,.$$

Λύση. Στο ημικύκλιο γ_R είναι $|z-1| \le |z| + 1 = R+1$ και $|z+1| \ge |z| - 1 = R-1$. Επομένως
$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \le \frac{R+1}{R-1}\,, \quad \text{για κάθε } z \in \gamma_R\,.$$
Άρα,
$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{z-1}{z+1}\, dz \right| \le \frac{R+1}{R-1} \times (\text{μήκος του ημικύκλιου } \gamma_R) = \frac{R+1}{R-1} \cdot \pi R\,.$$
■

2. Έστω $0 < r < R$.

(α΄) Δείξτε ότι
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{R+z}{(R-z)z}\, dz = 1\,.$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας το (α΄) δείξτε ότι
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}\, d\theta = 1\,.$$

Λύση.

(α΄) Είναι
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{R+z}{(R-z)z}\, dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{(R-z)+2z}{(R-z)z}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{1}{z}\, dz + \frac{1}{\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{1}{R-z}\, dz \\ &= 1 + \frac{1}{\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{1}{R-z}\, dz\,. \end{aligned}$$

Επειδή η συνάρτηση $f(z) = 1/(R-z)$ είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$, από το θεώρημα Cauchy το ολοκλήρωμα $\oint_{|z|=r} \frac{1}{R-z}\, dz = 0$ και επομένως
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{R+z}{(R-z)z}\, dz = 1\,.$$

(β') Η παραμετρική εξίσωση του κύκλου $|z| = r$ είναι $z = re^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Είναι $dz = ire^{i\theta}d\theta$ και επομένως

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{R+z}{(R-z)z}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R+re^{i\theta}}{(R-re^{i\theta})re^{i\theta}} ire^{i\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R+re^{i\theta}}{R-re^{i\theta}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R+re^{i\theta})(R-re^{-i\theta})}{|R-re^{i\theta}|^2}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2+rR(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}{|(R-r\cos\theta)-ir\sin\theta|^2}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2+2irR\sin\theta}{R^2+r^2-2rR\cos\theta}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos\theta}\,d\theta + i\frac{rR}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\theta}{R^2+r^2-2rR\cos\theta}\,d\theta\,.
\end{aligned}$$

Επειδή η συνάρτηση $f(\theta) = \sin\theta/(R^2+r^2-2rR\cos\theta)$ είναι περιττή, το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\theta}{R^2+r^2-2rR\cos\theta}\,d\theta = 0$$

και άρα από το (α') έπεται ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos\theta}\,d\theta = 1\,.$$

■

3. Έστω $|z| = r$ κύκλος με κέντρο 0, ακτίνα $r > 0$ και θετική φορά διαγραφής. Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos(re^{i\theta})}{r^{2n}e^{i2n\theta}}\,d\theta = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Λύση. Η παραμετρική εξίσωση του κύκλου $|z| = r$ είναι $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Επειδή

$dz = ire^{i\theta}d\theta = izd\theta$, είναι $d\theta = dz/iz$ και επομένως

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(re^{i\theta})}{r^{2n}e^{i2n\theta}}\,d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{2n}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{\cos z}{iz^{2n+1}}\,dz \\
&= \frac{1}{(2n)!}\left\{\frac{(2n)!}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{\cos z}{(z-0)^{2n+1}}\,dz\right\} \\
&= \frac{1}{(2n)!}\,(\cos z)^{(2n)}\Big|_{z=0}
\end{aligned}$$

(ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για παραγώγους)

$$= \frac{1}{(2n)!}\cos\left(0 + 2n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{(2n)!}\cos(n\pi) = \frac{1}{(2n)!}(-1)^n\,.$$

■

4. Χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τύπους Cauchy, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{z(z-1)^3}\,dz\,,$$

όπου η απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη γ με θετική φορά διαγραφής δεν διέρχεται από τα σημεία $z = 0$ και $z = 1$. Να εξεταστούν όλες οι δυνατές περιπτώσεις.

Λύση. (i) Η καμπύλη γ δεν περιέχει τα σημεία 0 και 1. Από το θεώρημα Cauchy $I = 0$.

(ii) Η καμπύλη γ περιέχει μόνο το σημείο 0. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\cos(\pi z)/(z-1)^3}{z}\,dz = \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^3}\bigg|_{z=0} = -1\,.$$

(iii) Η καμπύλη γ περιέχει μόνο το σημείο 1. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned}
I = \frac{1}{2}\cdot\frac{2!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\cos(\pi z)/z}{(z-1)^3}\,dz &= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(\pi z)}{z}\right)''\bigg|_{z=1} \\
&= \frac{(2-\pi^2z^2)\cos(\pi z) + 2\pi z\sin(\pi z)}{2z^3}\bigg|_{z=1} = \frac{\pi^2-2}{2}\,.
\end{aligned}$$

(iv) Η καμπύλη γ περιέχει τα σημεία 0 και 1. Έστω γ_1 και γ_2 δύο κλειστές και τμηματικά λείες καμπύλες με θετική φορά διαγραφής που δεν τέμνονται και βρίσκονται εσωτερικά της καμπύλης γ, έτσι ώστε η γ_1 περιέχει στο εσωτερικό της μόνο το σημείο 0 και η γ_2 περιέχει στο εσωτερικό της μόνο το σημείο 1. Τότε,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{\cos(\pi z)}{z(z-1)^3}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{\cos(\pi z)}{z(z-1)^3}\,dz && \text{(γενικευμένο θεώρημα Cauchy)} \\ &= -1 + \frac{\pi^2-2}{2} = \frac{\pi^2-4}{2}\,. && \text{(περιπτώσεις } (ii) \text{ και } (iii)\text{)} \end{aligned}$$

■

5. Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \left(\frac{z}{z+1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{1+z}\right)^2 = 1 - 2\frac{1}{1+z} + \frac{1}{(1+z)^2}\,.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα της f σε σειρά Taylor γύρω από το i, δηλαδή με κέντρο το $z_0 = i$, καθώς επίσης και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n\,, \quad |w| < 1\,.$$

Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά έχουμε

$$-\frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n w^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n w^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1) w^n\,, \quad |w| < 1\,.$$

Είναι

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+i+(z-i)} &= \frac{1}{(1+i)\left(1+\frac{z-i}{1+i}\right)} \\ &= \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{1+i}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n \\ &\quad (|(z-i)/(1+i)| < 1 \Leftrightarrow |z-i| < |1+i| = \sqrt{2}) \end{aligned}$$

και

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \frac{1}{(1+i+(z-i))^2} = \frac{1}{(1+i)^2\left(1+\frac{z-i}{1+i}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{(1+i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z-i}{1+i}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+2}}(n+1)(z-i)^n\,.$$
$$(|(z-i)/(1+i)|<1 \Leftrightarrow |z-i|<|1+i|=\sqrt{2})$$

Άρα, για $|z-i|<\sqrt{2}$ έχουμε

$$f(z) = 1-2\frac{1}{1+z}+\frac{1}{(1+z)^2} = 1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}\left(2-\frac{n+1}{1+i}\right)(z-i)^n\,.$$

Ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $R=\sqrt{2}$. ∎

6. Έστω

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

το ανάπτυγμα Taylor της ακέραιας συνάρτησης f. Υποθέτουμε ότι

$$|f(z)|\le M\cdot a^{|z|}\,,\quad \text{για κάθε } z\in\mathbb{C}\,,$$

όπου $a>1$. Από το θεώρημα Cauchy-Taylor για οποιοδήποτε $r>0$ οι συντελεστές της δυναμοσειράς δίνονται από τον τύπο

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\,.$$

Δείξτε ότι

$$|c_n|\le M\cdot\frac{a^r}{r^n}\,,\quad n\in\mathbb{N}\,.$$

Να συμπεράνετε ότι

$$|c_n|\le\begin{cases}M\cdot\left(\frac{e\ln a}{n}\right)^n & \text{αν } n\ge 1\\ M & \text{αν } n=0\,.\end{cases}$$

Λύση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$\begin{aligned}
|c_n| = \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}\,|dz| \\
&\le \frac{M}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{a^{|z|}}{|z|^{n+1}}\,|dz| && (|f(z)| \le M\cdot a^{|z|}) \\
&= \frac{M}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{a^r}{r^{n+1}}\,|dz| \\
&= \frac{Ma^r}{2\pi r^{n+1}}\oint_{|z|=r}|dz| \\
&= \frac{Ma^r}{2\pi r^{n+1}}2\pi r = M\cdot\frac{a^r}{r^n}\,.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για $n=0$ είναι $|c_0| \le Ma^r$, για κάθε $r>0$. Παίρνοντας το $r \to 0^+$ έχουμε ότι $|c_0| \le M$. Επειδή για $n \ge 1$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{a^r}{r^n}\right) = \frac{a^r r^n \ln a - nr^{n-1}a^r}{r^{2n}} = \frac{a^r}{r^{n+1}}(r\ln a - n)\,,$$

η $g(r) := a^r/r^n$, $r>0$, έχει ελάχιστη τιμή για $r = n/\ln a$ με $g(n/\ln a) = (e\ln a)^n/n^n$. Άρα,

$$|c_n| \le \begin{cases} M\cdot\left(\frac{e\ln a}{n}\right)^n & \text{αν } n \ge 1 \\ M & \text{αν } n = 0\,. \end{cases}$$

■

7. Έστω

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n\,, \quad a_n \ne 0\,,$$

πολυώνυμο βαθμού n. Αν $|p(z)| \le M$, για κάθε $|z| \le 1$, δείξτε ότι

$$|p(z)| \le M|z|^n\,, \quad \text{για κάθε } |z| \ge 1\,.$$

Υπόδειξη. Εφαρμογή της αρχής μεγίστου για το

$$q(\zeta) := \zeta^n \cdot p\left(\frac{1}{\zeta}\right)\,, \quad |\zeta| \le 1\,.$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι το

$$q(\zeta) = \zeta^n\cdot p\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \zeta^n\left(a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{\zeta^{n-1}} + \frac{a_n}{\zeta^n}\right) = a_0\zeta^n + a_1\zeta^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\zeta + a_n$$

είναι ένα πολυώνυμο του ζ βαθμού το πολύ n. Το q είναι ακέραια συνάρτηση, δηλαδή αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$. Ο μοναδιαίος δίσκος $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ είναι ένας φραγμένος τόπος με σύνορο το μοναδιαίο κύκλο $|\zeta| = 1$. Από την αρχή μεγίστου για το q έχουμε

$$\max_{|\zeta|\le 1} |q(\zeta)| = \max_{|\zeta|=1} |q(\zeta)| = \max_{|\zeta|=1} \left|\zeta^n \cdot p\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right| = \max_{|\zeta|=1} \left|p\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right| .$$

Επειδή $|p(z)| \le M$, για κάθε $|z| \le 1$, αν $z = 1/\zeta$, τότε $|\zeta| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ και επομένως

$$\max_{|\zeta|\le 1} |q(\zeta)| = \max_{|z|=1} |p(z)| \le M .$$

Δηλαδή

$$\left|\zeta^n \cdot p\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right| \le M , \quad \text{για κάθε } |\zeta| \le 1, \, \zeta \ne 0$$

και ισοδύναμα

$$\left|p\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right| \le M \left|\frac{1}{\zeta}\right|^n , \quad \text{για κάθε } |\zeta| \le 1, \, \zeta \ne 0 .$$

Αν $z = 1/\zeta$, $\zeta \ne 0$, τότε $|\zeta| \le 1 \Leftrightarrow |z| \ge 1$ και άρα

$$|p(z)| \le M|z|^n , \quad \text{για κάθε } |z| \ge 1 .$$

■

8. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση.

   (α΄) Αν $|f(z)| \ge 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

   (β΄) Αν

   $$\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{1 + |z|^{5/2}} = 0 ,$$

   δείξτε ότι η f είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2.

Υπόδειξη. Θεώρημα Liouville.

Λύση.

(α΄) Επειδή $|f(z)| \ge 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, η f δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{C}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g := 1/f$. Η g είναι ακέραια συνάρτηση με $|g(z)| \le 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, δηλαδή η g είναι φραγμένη. Από το θεώρημα Liouville η g είναι σταθερή και κατά συνέπεια η f θα είναι σταθερή.

(β΄) Επειδή $\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{1+|z|^{5/2}} = 0$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $R_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $|z| > R_0$ είναι

$$\left| \frac{f(z)}{1+|z|^{5/2}} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(z)| < \varepsilon + \varepsilon |z|^{5/2} .$$

Επειδή το ακέραιο μέρος του $5/2$ είναι 2, $[5/2] = 2$, από τη γενίκευση του θεωρήματος Liouville η ακέραια συνάρτηση f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2.

■

3η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Να βρεθεί η σειρά(ανάπτυγμα) Laurent της

$$f(z) = \frac{1}{(z-2i)(z^2+4)}$$

με κέντρο το $z_0 = -2i$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $-2+2i$.

Λύση. Είναι

$$f(z) = \frac{1}{(z-2i)(z^2+4)} = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)^2} .$$

Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι: $-2i$ και $2i$. Επομένως, το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $-2i$ μπορεί να γίνει στους δακτυλίους $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+2i| < 4\}$ και $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+2i| > 4\}$. Επειδή $|(-2+2i)+2i| = |-2+4i| = \sqrt{18} > 4$, το $-2+2i \in \Delta_2$. Θα αναπτύξουμε την f στο δακτύλιο Δ_2 που είναι ο μεγαλύτερος δακτύλιος που περιέχει το σημείο $-2+2i$. Επειδή ως γνωστόν

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n , \quad |w| < 1 , \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

παραγωγίζοντας έχουμε

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) w^n , \quad |w| < 1 .$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z+2i)(z-2i)^2} \\
&= \frac{1}{(z+2i)[(z+2i)-4i]^2} \\
&= \frac{1}{(z+2i)^3} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{4i}{z+2i}\right)^2} \\
&= \frac{1}{(z+2i)^3} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{4i}{z+2i}\right)^n \qquad \left(\left|\tfrac{4i}{z+2i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+2i| > 4\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(4i)^n \frac{1}{(z+2i)^{n+3}} \,.
\end{aligned}$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα ισχύει στο δακτύλιο $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+2i| > 4\}$ που είναι ο μεγαλύτερος δυνατός δακτύλιος που περιέχει το σημείο $-2+2i$. ■

2. (α΄) Δείξτε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $e^{i\pi z/2} + 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$, είναι

$$z_k = 4k+2\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

(β΄) Έστω $\dfrac{\cos(\pi z)}{e^{i\pi z/2}+1} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{e^{i\pi z/2}+1}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 6\} \text{ με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \leq 0$.

Λύση.

(α΄) Επειδή

$$e^{i\pi z/2} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{i\pi z/2} = -1 \Leftrightarrow e^{i\pi z/2} = e^{i\pi} \Leftrightarrow e^{i\pi(z-2)/2} = 1 \Leftrightarrow i\pi(z-2)/2 = 2k\pi i\,,$$

οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $z_k = 4k+2$, $k \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή,

$$z_0 = 2\,,\ z_{-1} = -2\,,\ z_1 = 6\,,\ z_{-2} = -6\,,\ z_2 = 10\,, \ldots\,.$$

(β΄) Τα $z_k = 4k+2$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f. Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{\cos(\pi z)/(e^{i\pi z/2}+1)}{z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{\cos(\pi z)}{z^{n+1}(e^{i\pi z/2}+1)}\, dz\,,$$

όπου ο κύκλος $|z| = r$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $2 < r < 6$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ. Τα σημεία 0, -2 και 2 βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$ και είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης

$$g(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z^{n+1}(e^{i\pi z/2}+1)}\,.$$

(i) <u>$n = 0$:</u> Τότε

$$g(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z(e^{i\pi z/2}+1)}$$

και τα $0, \pm 2$ είναι απλοί πόλοι της g. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{\cos(\pi z)}{z(e^{i\pi z/2}+1)}\,dz \\
&= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-1}\cos(\pi z)}{e^{i\pi z/2}+1},\,-2\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{\cos(\pi z)}{z(e^{i\pi z/2}+1)},\,0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-1}\cos(\pi z)}{e^{i\pi z/2}+1},\,2\right) \\
&= \left.\frac{z^{-1}\cos(\pi z)}{(e^{i\pi z/2}+1)'}\right|_{z=-2} + \lim_{z\to 0} z\frac{\cos(\pi z)}{z(e^{i\pi z/2}+1)} + \left.\frac{z^{-1}\cos(\pi z)}{(e^{i\pi z/2}+1)'}\right|_{z=2} \\
&= \frac{1}{i\pi} - \frac{1}{2} - \frac{1}{i\pi} = -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

(ii) <u>$n \le -1$:</u> Σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$g(z) = \frac{z^{-n-1}\cos(\pi z)}{e^{i\pi z/2}+1}\,, \quad \text{με } -n \ge 1 \Leftrightarrow -n-1 \ge 0\,.$$

Τα σημεία ± 2 είναι απλοί πόλοι της g ενώ το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z^{-n-1}\cos(\pi z)}{e^{i\pi z/2}+1}\,dz \\
&= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n-1}\cos(\pi z)}{e^{i\pi z/2}+1},\,-2\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n-1}\cos(\pi z)}{e^{i\pi z/2}+1},\,2\right) \\
&= \left.\frac{z^{-n-1}\cos(\pi z)}{(e^{i\pi z/2}+1)'}\right|_{z=-2} + \left.\frac{z^{-n-1}\cos(\pi z)}{(e^{i\pi z/2}+1)'}\right|_{z=2} \\
&= \left.\frac{z^{-n-1}\cos(\pi z)}{\frac{i\pi}{2}e^{i\pi z/2}}\right|_{z=-2} + \left.\frac{z^{-n-1}\cos(\pi z)}{\frac{i\pi}{2}e^{i\pi z/2}}\right|_{z=2} \\
&= \frac{2}{\pi}((-2)^{-n-1} + 2^{-n-1})i \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}\pi}i & \text{αν } -n \text{ περιττός} \\ 0 & \text{αν } -n \text{ άρτιος}\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

■

3. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{e^{1/z}}{z-1}\,dz = \begin{cases} 1-e & \text{αν } R<1 \\ 1 & \text{αν } R>1\,. \end{cases}$$

Λύση. Τα 0 και 1 είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z)=e^{1/z}/(z-1)$.

(i) $\underline{R<1}$: Το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $|z|=R$ και είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f. Επειδή

$$e^w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\,,\quad \text{για κάθε } w\in\mathbb{C} \quad \text{και} \quad \frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n\,,\quad |z|<1\,,$$

το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο $z_0=0$ στο διάτρητο δίσκο: $0<|z|<R$ είναι

$$\begin{aligned} e^{1/z}\cdot\frac{1}{z-1} &= \left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\cdots\right)(-1-z-z^2-z^3-\cdots) \\ &= \cdots-\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\right)\frac{1}{z}+\cdots\,. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{1/z}}{z-1},\,0\right)=a_{-1}=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1-e$$

και από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{e^{1/z}}{z-1}\,dz=\operatorname{Res}\left(\frac{e^{1/z}}{z-1},\,0\right)=1-e\,.$$

(ii) $\underline{R>1}$: Τα σημεία $0,1$ βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z|=R$ και το 1 είναι απλός πόλος της f. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{e^{1/z}}{z-1}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{e^{1/z}}{z-1},\,0\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{e^{1/z}}{z-1},\,1\right) \\ &= 1-e+\left.\frac{e^{1/z}}{(z-1)'}\right|_{z=1} \\ &= 1-e+\left.e^{1/z}\right|_{z=1}=1-e+e=1\,. \end{aligned}$$

■

4. Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $|a| < 1$ και $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{1 + a\cos\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{1 + a\cos\theta}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\Re\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{1 + a\cos\theta}\, d\theta\right) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\right)^n .$$

Λύση. Επειδή η συνάρτηση $f(\theta) = \frac{\cos n\theta}{1+a\cos\theta}$ είναι άρτια,

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{1 + a\cos\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{1 + a\cos\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\Re\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{1 + a\cos\theta}\, d\theta\right) .$$

Αν $z = e^{i\theta}$, $-\pi \le \theta \le \pi$, τότε $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ και $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \Leftrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$.

Επομένως

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{1 + a\cos\theta}\, d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{1 + \frac{a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz}$$
$$= \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{z^n}{az^2 + 2z + a}\, dz .$$

Τα $z_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-a^2}}{a}$ είναι απλές ρίζες του $az^2 + 2z + a$ και κατά συνέπεια απλοί πόλοι της $g(z) = \frac{z^n}{az^2+2z+a}$. Το $\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}$ βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$, ενώ το $\frac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}$ βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $|z| = 1$. Επομένως, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{z^n}{az^2 + 2z + a}\, dz = \frac{2}{i}2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{z^n}{az^2+2z+a}, \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)$$
$$= 4\pi \left.\frac{z^n}{(az^2+2z+a)'}\right|_{z=\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}}$$
$$= 2\pi \left.\frac{z^n}{az+1}\right|_{z=\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}}$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\right)^n .$$

Άρα,

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{1 + a\cos\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\right)^n .$$

■

5. Δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^5-1}\, dx = \frac{4\pi}{5}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) .$$

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση
$$f(z) = \frac{z-1}{z^5-1}\,.$$
Θα βρούμε της ρίζες του παρανομαστή $z^5 - 1$. Επειδή $z^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^5 = 1 = e^{i\cdot 0}$, οι $z_k = e^{2k\pi i/5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, είναι οι 5 απλές ρίζες του παρανομαστή. Δηλαδή
$$z_0 = 1\,, \quad z_1 = e^{2\pi i/5}\,, \quad z_2 = e^{4\pi i/5}\,, \quad z_3 = e^{6\pi i/5}\,, \quad z_4 = e^{8\pi i/5}\,.$$
Επομένως η συνάρτηση $f(z) = \frac{z-1}{z^5-1}$ έχει 5 μεμονωμένα ανώμαλα σημεία. Επειδή το $z_0 = 1$ είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f με $\lim_{z\to 1} f(z) = 1/5$, τα z_k, $1 \le k \le 4$, είναι απλοί πόλοι της f. Μόνο οι απλοί πόλοι $z_1 = e^{2\pi i/5}$ και $z_2 = e^{4\pi i/5}$ βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο. Είναι
$$\operatorname{Res}\left(f,\, e^{2\pi i/5}\right) = \left.\frac{z-1}{(z^5-1)'}\right|_{z=e^{2\pi i/5}} = \left.\frac{z-1}{5z^4}\right|_{z=e^{2\pi i/5}} = \frac{e^{2\pi i/5}-1}{5e^{8\pi i/5}} = \frac{e^{4\pi i/5}-e^{2\pi i/5}}{5}$$
και παρόμοια
$$\operatorname{Res}\left(f,\, e^{4\pi i/5}\right) = \frac{e^{8\pi i/5}-e^{4\pi i/5}}{5}\,.$$
Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελείται από το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου γ_R, με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[-R, R]$. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο έτσι ώστε το ανώμαλα σημεία $z_1 = e^{2\pi i/5}$, $z_2 = e^{4\pi i/5}$ της f να βρίσκονται στο εσωτερικό του ημικύκλιου γ_R. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε
$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} \frac{x-1}{x^5-1}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{z-1}{z^5-1}\,dz &= 2\pi i \left[\operatorname{Res}\left(\frac{z-1}{z^5-1},\, e^{2\pi i/5}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z-1}{z^5-1},\, e^{4\pi i/5}\right)\right] \\ &= \frac{2\pi i}{5}\left(e^{4\pi i/5} - e^{2\pi i/5} + e^{8\pi i/5} - e^{4\pi i/5}\right) \\ &= \frac{2\pi i}{5}\left(-e^{2\pi i/5} + e^{-2\pi i/5}\right) \\ &= \frac{4\pi}{5}\left(\frac{e^{2\pi i/5} - e^{-2\pi i/5}}{2i}\right) = \frac{4\pi}{5}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\,. \qquad (*)\end{aligned}$$
Όμως από γνωστή πρόταση
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z-1}{z^5-1}\,dz = 0$$
και άρα από την $(*)$ έπεται ότι
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^5-1}\,dx \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x-1}{x^5-1}\,dx = \frac{4\pi}{5}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\,.$$

■

6. Αν $a < 0$, δείξτε ότι
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+1}\, dx = -\pi e^a\,.$$

Λύση. Είναι
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+1}\, dx = \Im\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2+1}\, dx\right)\,.$$
Οι ρίζες του πολυωνύμου $Q(z) = z^2+1$ είναι $\pm i$. Παίρνουμε το $R > 1$ έτσι ώστε ο κύκλος $|z| = R$ να περιέχει τις ρίζες $\pm i$ του πολυωνύμου Q. Η συνάρτηση
$$f(z) = \frac{ze^{iaz}}{z^2+1}$$
έχει μεμονωμένα ανώμαλα σημεία τα $\pm i$ που είναι απλοί πόλοι της f. Το $-i$ βρίσκεται στο κάτω ημιεπίπεδο με
$$\operatorname{Res}(f,\, -i) = \left.\frac{ze^{iaz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=-i} = \frac{e^a}{2}\,.$$
Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $[-R, R]$ και το ημικύκλιο γ_R του κάτω ημιεπιπέδου με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $-\pi \le \theta \le 0$ και αρνητική φορά. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε
$$\int_{-R}^{R} \frac{xe^{iax}}{x^2+1}\, dx + \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2+1}\, dz = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f,\, i) = -2\pi i \cdot \frac{e^a}{2} = -\pi e^a i\,. \qquad (*)$$
Όμως από το λήμμα του Jordan είναι
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2+1}\, dz = 0\,.$$
Επομένως, από την $(*)$ προκύπτει ότι
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2+1}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{xe^{iax}}{x^2+1}\, dx = -\pi e^a i$$
και άρα
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+1}\, dx = \Im\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2+1}\, dx\right) = -\pi e^a\,.$$

■

1.2 Ακαδημαϊκό έτος 2015–16

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν την εξίσωση

$$e^z = -1 + i\sqrt{3}\,.$$

Λύση. Επειδή $-1 + i\sqrt{3} = 2e^{(2\pi/3)i}$, είναι

$$\begin{aligned} e^z = -1 + i\sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow \quad e^z = 2e^{(2\pi/3)i} \\ &\Leftrightarrow \quad e^z = e^{\ln 2 + (2\pi/3)i} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{z - \ln 2 - (2\pi/3)i} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad z - \ln 2 - (2\pi/3)i = 2k\pi i\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Επομένως η λύση της εξίσωσης $e^z = -1 + i\sqrt{3}$ είναι

$$z = \ln 2 + \left(2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right) i\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

■

2. Να βρεθεί το σύνολο των σημείων $z = x + iy$ του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία

$$\arg[z - (1 + 2i)] = -\frac{\pi}{3}\,.$$

Λύση. (α) Αν $w = z - (1 + 2i)$, τότε

$$w = x + iy - (1 + 2i) = (x - 1) + i(y - 2) = |w| \cos\theta + i|w| \sin\theta\,,$$

όπου $\theta = \arg w = \arg[z - (1 + 2i)] = -\pi/3$. Επειδή $\tan\theta = \frac{y-2}{x-1}$, είναι

$$\frac{y - 2}{x - 1} = \tan\theta = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}\,.$$

Επομένως, όλα τα σημεία $z = x + iy$ του μιγαδικού επιπέδου τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $\arg[z - (1 + 2i)] = -\pi/3$ είναι σημεία της ευθείας

$$y - 2 = -\sqrt{3}(x - 1)\,.$$

Η ευθεία διέρχεται από το σημείο $1 + 2i$ και έχει κλίση $-\sqrt{3}$. ■

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{αν } z \neq 0, \\ 0 & \text{αν } z = 0\,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$. Είναι η f παραγωγίσιμη στο 0; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση. Για $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, είναι

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \frac{x^5/|x|^4}{x} = 1$$

και επομένως

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 1\,.$$

Παρόμοια, για $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, είναι

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \frac{(iy)^5/|iy|^4}{y} = i$$

και επομένως

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = i\,.$$

Άρα $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -i\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, δηλαδή ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Για $z \neq 0$ είναι

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{z^5/|z|^4}{z} = \left(\frac{z}{|z|}\right)^4\,.$$

Αν $y = \lambda x$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \neq 0$, τότε

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{f(x+iy)}{x+iy} = \left(\frac{(1+i\lambda)x}{|(1+i\lambda)x|}\right)^4 = \frac{(1+i\lambda)^4}{(1+\lambda^2)^2}\,.$$

Επομένως, το όριο

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z = x + i\lambda x}} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = (1+i\lambda)^4$$

εξαρτάται από το λ και άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. ■

4. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους. Αν η $f(z) = h^3(x,y) + ih(x,y)$ είναι ακέραια συνάρτηση, δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

Λύση. Είναι $f = u + iv$, όπου $u = h^3$ και $v = h$. Επειδή η f είναι ακέραια συνάρτηση, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann:

$$\left\{\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3h^2h_x &= h_y \\ 3h^2h_y &= -h_x \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3h^2h_x &= h_y \\ 9h^4h_x &= -h_x \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3h^2h_x &= h_y \\ \left(1+9h^4\right)h_x &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Επομένως $h_x = h_y = 0$ στο $\mathbb{R}^2$ και κατά συνέπεια $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ στο $\mathbb{C}$. Τότε $f'(z) = f_x = u_x + iv_x = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και επειδή το $\mathbb{C}$ είναι ένας τόπος, από γνωστή πρόταση η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. ■

5. (α΄) Αν $\zeta = \xi + i\eta$, δείξτε ότι

$$|\sin\zeta| = |\sin(\xi + i\eta)| \leq \cosh\eta\,.$$

(β΄) Αν γ είναι τμηματικά λεία καμπύλη με αρχή το $z_1 = -a + ia$ και πέρας το $z_2 = a + ia$, $a > 0$, δείξτε ότι

$$\left|\int_\gamma \sin(z^2)\,dz\right| \leq 2a\cosh(2a^2)\,.$$

Λύση.

(α΄) Επειδή $|e^{i\xi}| = |e^{-i\xi}| = 1$, για κάθε $\eta \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned} |\sin\zeta| &= \left|\frac{e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}}{2i}\right| \\ &\leq \frac{|e^{i\zeta}| + |e^{-i\zeta}|}{2} \\ &= \frac{|e^{i\xi}|e^{-\eta} + |e^{-i\xi}|e^{\eta}}{2} = \frac{e^\eta + e^{-\eta}}{2} = \cosh\eta\,. \end{aligned}$$

(β΄) Από το (a') έχουμε

$$|\sin(z^2)| = |\sin(x+iy)^2| = |\sin(x^2 - y^2 + 2ixy)| \leq \cosh(2xy)\,.$$

Επειδή η συνάρτηση $w = \sin(z^2)$ είναι ακέραια και το $\mathbb{C}$ είναι απλά συνεκτικός τόπος, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $w = \sin(z^2)$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης και επομένως

$$\int_\gamma \sin(z^2)\,dz = \int_{[z_1,z_2]} \sin(z^2)\,dz\,.$$

Στο ευθ. τμήμα $[z_1, z_2]$ το $\cosh(2xy)$ γίνεται μέγιστο όταν το $|2xy|$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή για $(x, y) = (\pm a, a)$. Τότε, $|\sin(z^2)| \leq \cosh(2xy) \leq \cosh(2a^2)$ και

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma \sin(z^2)\,dz\right| &= \left|\int_{[z_1,z_2]} \sin(z^2)\,dz\right| \\ &\leq \int_{[z_1,z_2]} |\sin(z^2)|\,|dz| \\ &\leq \cosh(2a^2)\int_{[z_1,z_2]} |dz| \\ &= \cosh(2a^2) \times (\text{μήκος του } [z_1, z_2]) = 2a\cosh(2a^2)\,.\end{aligned}$$

■

6. (α') Να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση $u(x, y) = e^y \sin x + ax^2 + y^2$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Στη συνέχεια να βρεθεί η συζυγής αρμονική v της u καθώς επίσης και η ακέραια συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, με $f(0) = i$. Να εκφράσετε την f σαν συνάρτηση του $z = x + iy$.

(β') Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C \frac{f(z)}{z(z-i)^3}\,dz\,,$$

όπου C ο κύκλος: $|z - (1 + 2i)| = 2$

Λύση.

(α') Επειδή η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης στο $\mathbb{R}^2$, για να είναι η u αρμονική θα πρέπει να ισχύει η εξίσωση Laplace. Είναι $u_{xx} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow (-e^y \sin x + 2a) + (e^y \sin x + 2) = 0 \Leftrightarrow 2(a + 1) = 0$. Επομένως $a = -1$ και κατά συνέπεια

$$u(x, y) = e^y \sin x - x^2 + y^2\,.$$

Ως γνωστόν, στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C}$ υπάρχει συζυγής αρμονική v της u. Δηλαδή η $f = u + iv$ είναι ακέραια συνάρτηση. Από την εξίσωση Cauchy–Riemann $u_x = v_y$ έχουμε $v_y = e^y \cos x - 2x$ και επομένως $v(x, y) = e^y \cos x - 2xy + c(x)$. Από τη δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann $v_x = -u_y$ προκύπτει ότι

$$-e^y \sin x - 2y + c'(x) = -e^y \sin x - 2y \Leftrightarrow c'(x) = 1 \text{ και άρα } c(x) = c\,.$$

Δηλαδή

$$v(x,y) = e^y \cos x - 2xy + c$$

και κατά συνέπεια

$$f(z) = u(z,0)+iv(z,0) = \sin z - z^2 + i(\cos z + c) = i(\cos z - i\sin z) - z^2 + ic = ie^{-iz} - z^2 + ic\,,$$

$c \in \mathbb{R}$. Όμως $f(0) = i$, οπότε $c = 0$. Άρα,

$$f(z) = ie^{-iz} - z^2\,.$$

(β΄) Επειδή το i βρίσκεται εντός του κύκλου C και το 0 βρίσκεται εκτός του κύκλου C, από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned} I = \oint_C \frac{ie^{-iz} - z^2}{z(z-i)^3}\, dz &= \frac{2\pi i}{2!} \left\{ \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{iz^{-1}e^{-iz} - z}{(z-i)^3}\, dz \right\} \\ &= \frac{2\pi i}{2!} \left(iz^{-1}e^{-iz} - z\right)'' \Big|_{z=i} \\ &= \pi i\; e^{-iz} \left(2iz^{-3} - 2z^{-2} - iz^{-1}\right)\Big|_{z=i} = -\pi e i\,. \end{aligned}$$

■

7. Δείξτε ότι

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\sin\theta}\, d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 3iz - 1}\, dz = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\,.$$

Λύση. Αν $z = e^{i\theta}$, τότε

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \text{ και } dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta \Leftrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}\,.$$

Επομένως,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\sin\theta}\, d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{3 + \frac{2}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 3iz - 1}\, dz\,.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + 4iz - 1 = 0$ είναι $z_{1,2} = -(3 \pm \sqrt{5})i/2$. Επειδή μόνο το $-(3-\sqrt{5})i/2$ βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$, από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left[z+\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})i\right]\left[z+\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})i\right]}\,dz \\
&= 2\pi i\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{1/\left[z+\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})i\right]}{z+\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})i}\,dz\right\} \\
&= 2\pi i\left.\frac{1}{z+\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})i}\right|_{z=-\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})i} \\
&= 2\pi i\frac{1}{\sqrt{5}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\,.
\end{aligned}$$

■

8. Έστω η συνάρτηση $f(t) = e^{-it}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Τότε, από το *προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass* υπάρχει ακολουθία (P_n) πολυωνύμων τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty}\max_{t\in[0,2\pi]}|e^{-it} - P_n(t)| = 0\,.$$

Αυτό το αποτέλεσμα δεν ισχύει αν θεωρήσουμε πολυώνυμα του $z = e^{it}$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cauchy ή τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy, δείξτε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(z)$ είναι

$$\max_{|z|=1}|z^{-1} - P(z)| \geq 1\,.$$

Λύση. Έστω P ένα πολυώνυμο. Από το θεώρημα Cauchy $\int_{|z|=1} P(z)\,dz = 0$ και επομένως

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}(z^{-1} - P(z))\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\,dz = 1\,.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
1 = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}(z^{-1} - P(z))\,dz\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}|z^{-1} - P(z)|\,|dz| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\max_{|z|=1}|z^{-1} - P(z)|\int_{|z|=1}|dz| \\
&= \frac{1}{2\pi}\max_{|z|=1}|z^{-1} - P(z)| \times (\text{μήκος μοναδιαίου κύκλου}) \\
&= \max_{|z|=1}|z^{-1} - P(z)|\,.
\end{aligned}$$

■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση. Αν $f(x) = x^4 - 2x^2$, για κάθε $x \in (0,1)$, να υπολογιστεί το $f(i)$.

   Λύση. Θεωρούμε την ακέραια συνάρτηση $g(z) := z^4 - 2z^2$. Επειδή $f(x) = g(x) = x^4 - 2x^2$, για κάθε σημείο του ευθ. τμήματος $(0,1)$, από το θεώρημα μοναδικότητας έπεται ότι $f(z) = g(z) = z^4 - 2z^2$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επομένως, $f(i) = i^4 - 2i^2 = 3$. ■

2. Έστω $G \subseteq \mathbb{C}$ τόπος που περιέχει το 0. Υπάρχει αναλυτική συνάρτηση $f : G \to \mathbb{C}$, τέτοια ώστε
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\,, \quad \text{για κάθε } n \geq n_0,\ n_0 \in \mathbb{N}^*;$$

   Λύση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση f. Επειδή $\lim_{n\to 0} 1/n = 0 \in G$ και το G είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geq n_0$, τέτοιο ώστε $1/n \in G$ για κάθε $n \geq N$. Επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν, είναι $f(0) = \lim_{n\to 0} f(1/n) = \lim_{n\to 0} 1/n = 0$, δηλαδή το 0 είναι ρίζα της f. Αν $g(z) := f(z) - z$, τότε η g είναι αναλυτική συνάρτηση στο τόπο G και από την υπόθεση είναι $g(1/n) = 0$, για κάθε $n \geq N$. Όμως το σύνολο $\left\{\frac{1}{n} : n \geq N\right\}$ έχει σημείο συσσώρευσης ($\sigma.\sigma$) το $0 \in G$ και από το θεώρημα μοναδικότητας $g(z) = 0 \Leftrightarrow f(z) = z$, για κάθε $z \in G$. Τότε
$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} \neq \frac{1}{n}\,, \quad \text{για κάθε } n \geq n_0\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$
   Επομένως δεν υπάρχει τέτοια αναλυτική συνάρτηση.

   Παρατήρηση. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την υπόθεση της άσκησης. Πράγματι, η συνάρτηση $f(z) = |z|$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$ και τέτοια ώστε $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. ■

3. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$ που περιέχει τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

   (α΄) Αν
$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{(n+1)z - 1}\,dz = 0\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\,,$$
   δείξτε ότι $f \equiv 0$ στο G.

(β΄) Αν

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{((n+1)z-1)^3}\, dz = 0\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\,,$$

με $f'(0) = 0$, δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο G.

Λύση.

(α΄) Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-1/(n+1)}\, dz = \frac{n+1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{(n+1)z-1}\, dz = 0\,,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $f(1/(n+1)) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to 0} 1/(n+1) = 0 \in G$, από το θεώρημα ταυτοτισμού έπεται ότι $f \equiv 0$ στο G.

(β΄) Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned} f''\left(\frac{1}{n+1}\right) &= \frac{2!}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z-1/(n+1))^3}\, dz \\ &= \frac{(n+1)^3}{\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{((n+1)z-1)^3}\, dz = 0\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Επειδή $f''(1/(n+1)) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to 0} 1/(n+1) = 0 \in G$, από το θεώρημα ταυτοτισμού έπεται ότι $f''(z) = 0$ στο G. Τότε $f'(z) = c_1$ και επειδή $f'(0) = 0$, είναι $f'(z) = 0$ στο G. Επομένως, $f(z) = c$ στο G.

■

4. Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z^2+5-2i}{(z-2+i)(z+1)^2} = \frac{1}{z-2+i} - \frac{2}{(z+1)^2}\,.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα της f σε σειρά Taylor γύρω από το 1, δηλαδή με κέντρο το $z_0 = 1$, καθώς επίσης και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n\,, \quad |w| < 1\,.$$

Είναι

$$\frac{1}{z-2+i} = \frac{1}{(-1+i)\left(1+\frac{z-1}{-1+i}\right)} = \frac{1}{-1+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{-1+i}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{(-1+i)^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^{n+1}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}\,.$$
$$(|(z-1)/(-1+i)|<1 \Leftrightarrow |z-1|<|-1+i|=\sqrt{2})$$

Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά $\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w|<1$, παίρνουμε

$$\frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nw^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)w^n\,, \quad |w|<1\,.$$

Επομένως

$$\frac{2}{(z+1)^2} = \frac{2}{(2+(z-1))^2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{(z-1)^n}{2^n}\,.$$
$$(|(z-1)/2|<1 \Leftrightarrow |z-1|<2)$$

Άρα, για $|z-1|<\sqrt{2}$ έχουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\left[-(1+i)^{n+1}+2(-1)^n(n+1)\right](z-1)^n\,.$$

Ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $R=\sqrt{2}$. ■

5. Να βρεθεί το

$$\max_{|z|\le 1}|(z-1)(2z+1)|$$

Λύση. Στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $|z|\le 1$ είναι

$$|(z-1)(2z+1)| \le (|z|+1)(2|z|+1) \le 2\cdot 3 = 6\,.$$

Ομως η μέγιστη τιμή είναι μικρότερη του 6. Πράγματι, από την αρχή μεγίστου η μέγιστη του $|(z-1)(2z+1)|$ επιτυγχάνεται στο σύνορο του δίσκου που είναι ο κύκλος $|z|=1$ με παραμετρική εξίσωση $z(t)=e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$. Επομένως,

$$\begin{aligned}|(z-1)(2z+1)|^2 &= (z-1)(\overline{z}-1)(2z+1)(2\overline{z}+1)\\ &= (e^{it}-1)(e^{-it}-1)(2e^{it}+1)(2e^{-it}+1)\\ &= \left(2-(e^{it}+e^{-it})\right)\left(5+2(e^{it}+e^{-it})\right)\\ &= (2-2\cos t)\,(5+4\cos t) = 2(-4\cos^2 t-\cos t+5)\,.\end{aligned}$$

Όμως

$$(-4\cos^2 t - \cos t + 5)' = 0 \Leftrightarrow 8\cos t \sin t + \sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t(8\cos t + 1) = 0$$

και κατά συνέπεια

$$\max_{0\le t\le 2\pi} 2(-4\cos^2 t - \cos t + 5) = 2(-4\cos^2 t - \cos t + 5)\big|_{\cos t = -1/8} = \frac{81}{8}\,.$$

Άρα,

$$\max_{|z|\le 1} |(z-1)(2z+1)| = \sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}\,.$$

■

6. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ και συνεχής στο σύνορο $|z| = 1$. Αν $f(0) = 0$ και $|f(z)| \le |e^z|$ για $|z| = 1$, δείξτε ότι $|f(\ln 2)| \le \ln 4$.

   Υπόδειξη. Λήμμα του Schwarz για τη συνάρτηση $g(z) := f(z)e^{-z}$.

   Λύση. Η συνάρτηση $g(z) := f(z)e^{-z}$ είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ και συνεχής στο σύνορο $|z| = 1$ με $g(0) = f(0) = 0$. Επειδή $|g(z)| = |f(z)||e^{-z}| \le 1$ για $|z| = 1$, από την αρχή μεγίστου θα είναι $|g(z)| \le 1$ για $|z| \le 1$. Επομένως από το λήμμα του Schwarz

$$|g(z)| = |f(z)||e^{-z}| \le |z| \Leftrightarrow |f(z)| \le |z||e^z| \quad \text{για } |z| < 1\,.$$

   Επειδή $\ln 2 \in D(0,1)$, συμπεραίνουμε ότι $|f(\ln 2)| \le |\ln 2||e^{\ln 2}| = 2\ln 2 = \ln 4$. ■

3η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Αν $0 < a < b$, δείξτε ότι

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a\cos^2\theta + b}\, d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{a+b}}\,.$$

Λύση. Επειδή $\cos^2\theta = (1+\cos 2\theta)/2$,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{a}{2}(1+\cos 2\theta)+b}\, d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+2b+a\cos 2\theta}\, d\theta = \int_0^{4\pi} \frac{1}{a+2b+a\cos t}\, dt\,. \qquad \text{(αντικατάσταση } t = 2\theta) \end{aligned}$$

Αν $z = e^{it}$, $0 \le t \le 4\pi$, τότε $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ και $dz = ie^{it}dt = izdt \Leftrightarrow dt = \frac{dz}{iz}$. Επομένως

$$I = 2\oint_{|z|=1} \frac{1}{a+2b+\frac{a}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{dz}{iz} = \frac{4}{i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{az^2+2(a+2b)z+a}\, dz\,.$$

Η εξίσωση $az^2 + 2(a+2b)z + a = 0$ έχει απλές ρίζες τις

$$z_{1,2} = \frac{-a-2b \pm 2\sqrt{b}\sqrt{a+b}}{a}\,.$$

Επειδή $b > a > 0$, μόνο η $z_1 = (-a-2b+2\sqrt{b}\sqrt{a+b})/a$ βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ και είναι απλός πόλος της $f(z) = 1/(az^2 + 2(a+2b)z + a)$. Επομένως, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{az^2+2(a+2b)z+a}\, dz \\ &= \frac{4}{i}2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{az^2+2(a+2b)z+a},\, z_1\right) \\ &= 8\pi\, \frac{1}{(az^2+2(a+2b)z+a)'}\bigg|_{z=z_1} \\ &= 4\pi\frac{1}{az_1+a+2b} = \frac{2\pi}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{a+b}}\,. \end{aligned}$$

■

2. Αν $n \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n\sin(\pi/2n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\,.$$

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{1+z^{2n}}\,.$$

Επειδή $z^{2n}+1=0 \Leftrightarrow z^{2n}=-1=e^{i\pi}$, οι $z_k = e^{(2k\pi+\pi)i/2n}$, $k=0,1,2,\ldots,2n-1$, είναι οι $2n$ απλές ρίζες του παρανομαστή της f και επομένως είναι απλοί πόλοι της f. Μόνο οι απλοί πόλοι

$$z_k = e^{(2k\pi+\pi)i/2n}\,, \quad k=0,1,2,\ldots,n-1\,,$$

βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο.

Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελείται από το ημικύκλιο γ_R του άνω ημιεπιπέδου με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[-R,R]$. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο έτσι ώστε οι απλοί πόλοι $z_k = e^{(2k\pi+\pi)i/2n}$, $0 \le k \le n-1$, της f να βρίσκονται στο εσωτερικό του ημικύκλιου γ_R. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R}\frac{1}{1+x^{2n}}\,dx + \int_{\gamma_R}\frac{1}{1+z^{2n}}\,dz &= 2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^{2n}},\,z_k\right)\\ &= 2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\left.\frac{1}{(1+z^{2n})'}\right|_{z=z_k} = i\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z_k^{2n-1}}\,.\end{aligned}$$

Το άθροισμα

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z_k^{2n-1}} &= \sum_{k=0}^{n-1}e^{-\frac{2n-1}{2n}(2k\pi+\pi)i}\\ &= e^{\pi i/2n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-(2k\pi+\pi)i+k\pi i/n}\\ &= -e^{\pi i/2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\pi i/n}\right)^k\\ &= -e^{\pi i/2n}\frac{\left(e^{\pi i/n}\right)^n-1}{e^{\pi i/n}-1}\\ &= \frac{2}{e^{\pi i/2n}-e^{-\pi i/2n}} = -i\frac{1}{\sin(\pi/2n)}\end{aligned}$$

και επομένως

$$\int_{-R}^{R}\frac{1}{1+x^{2n}}\,dx + \int_{\gamma_R}\frac{1}{1+z^{2n}}\,dz = \frac{\pi}{n\sin(\pi/2n)}\,. \tag{$*$}$$

Επειδή από γνωστό λήμμα

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{1}{1+z^{2n}}\,dz = 0\,,$$

από την $(*)$ έπεται ότι

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n\sin(\pi/2n)}\,.$$

Όμως από το θεώρημα μεταφοράς

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n\sin(\pi/2n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi/2n}{\sin(\pi/2n)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}$$

και άρα

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n\sin(\pi/2n)} = 1\,.$$

■

3. Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin x}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-1/\sqrt{2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,.$$

Λύση. Είναι

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3\sin x}{1+x^4}\,dx = \Im\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3 e^{ix}}{1+x^4}\,dx\right)\,.$$

Επειδή $z^4+1=0 \Leftrightarrow z^4=-1=e^{\pi i}$, οι ρίζες του πολυωνύμου $Q(z)=1+z^4$ είναι

$$z_k = e^{(2k\pi+\pi)i/4} = e^{(2k\pi+\pi)i/4}\,, \quad k=0,1,2,3\,.$$

Δηλαδή $z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$. Παίρνουμε το $R_0>1$ έτσι ώστε ο κύκλος $|z|=R_0$ να περιέχει τις ρίζες $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1\pm i)$ του πολυωνύμου Q. Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{1+z^4}$$

έχει μεμονωμένα ανώμαλα σημεία τα $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1\pm i)$ που είναι απλοί πόλοι της f. Τα $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1+i)$ βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο με

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(f, \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1+i)\right) &= \left.\frac{z^3 e^{iz}}{(1+z^4)'}\right|_{z=\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1+i)} \\ &= \frac{1}{4}e^{i(\pm 1+i)/\sqrt{2}} = \frac{1}{4}e^{-1/\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \pm i\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\,.\end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελείται από το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου γ_R, με εξίσωση $z(\theta)=Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[-R, R]$. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο έτσι ώστε το ανώμαλα σημεία $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$ της f να βρίσκονται στο εσωτερικό του ημικύκλιου γ_R. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{-R}^{R} \frac{x^3 e^{ix}}{1+x^4}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{z^3 e^{iz}}{1+z^4}\,dz \\
&= 2\pi i \left[\mathrm{Res}\left(\frac{z^3 e^{iz}}{1+z^4}, \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \right) + \mathrm{Res}\left(\frac{z^3 e^{iz}}{1+z^4}, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) \right) \right] \\
&= 2\pi i \cdot \frac{1}{2} e^{-1/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi e^{-1/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) i\,. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Όμως από το λήμμα του Jordan είναι

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^3 e^{iz}}{1+z^4}\,dz = 0\,.$$

Επομένως, από την $(*)$ προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{1+x^4}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^3 e^{ix}}{1+x^4}\,dx = \pi e^{-1/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) i$$

και κατά συνέπεια

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{1+x^4}\,dx = \Im\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{1+x^4}\,dx \right) = \pi e^{-1/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,.$$

Άρα,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-1/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,.$$

■

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\sin z = \sqrt{2}\,.$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\sin z = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sqrt{2} \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 2\sqrt{2}\, ie^{iz} - 1 = 0\,.$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$e^{iz} = \sqrt{2}\, i \pm i = (\sqrt{2} \pm 1)i = (\sqrt{2} \pm 1)e^{i\pi/2}$$

και επομένως

$$iz = \log[(\sqrt{2} \pm 1)e^{i\pi/2}] = \ln(\sqrt{2} \pm 1) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Άρα, όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί z_k που ικανοποιούν την εξίσωση $\sin z = \sqrt{2}$ είναι

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2} \pm 1)\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

■

2. Έστω η απεικόνιση $w = \operatorname{Log} z$, όπου Log είναι ο *πρωτεύον κλάδος λογαρίθμου*. Δηλαδή

$$w = \operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z\,, \qquad -\pi \leq \operatorname{Arg} z < \pi\,.$$

(α) Να βρεθεί η εικόνα του ημικύκλιου

$$z = 2e^{i\theta}\,, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

(β) Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας γραμμής

$$z = 1 + iy\,, \quad y \in (-\infty, \infty)\,.$$

Λύση. (α) Αν $z = 2e^{i\theta}$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, τότε

$$w = \operatorname{Log}(2e^{i\theta}) = \ln(2) + i\theta\,, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Επομένως, η $w = \operatorname{Log} z$ απεικονίζει το ημικύκλιο $z = 2e^{i\theta}$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, στο ευθύγραμμο τμήμα

$$\left[\ln(2) - \frac{\pi}{2}i,\, \ln(2) + \frac{\pi}{2}i\right] .$$

(β) Θεωρούμε τώρα την ευθεία γραμμή $z = 1 + iy$, $y \in (-\infty, \infty)$. Επειδή

$$z = 1 + iy = \sqrt{1+y^2}\, e^{i\theta}, \text{ με } \tan\theta = y \Leftrightarrow \theta = \arctan y,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2\,,$$

έχουμε

$$w = \operatorname{Log} z = \operatorname{Log}(1+iy) = \ln\sqrt{1+y^2} + i\theta = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + i\arctan y\,, \quad y \in (-\infty, \infty)\,.$$

Ως γνωστόν η συνάρτηση $\theta = \arctan y$ είναι γνήσια αύξουσα με $-\pi/2 < \theta = \arctan y < \pi/2$. Επομένως, η εικόνα της ευθείας $z = 1 + iy$, $y \in (-\infty, \infty)$ μέσω της απεικόνισης $w = \operatorname{Log} z$ είναι η οριζόντια λωρίδα

$$\Omega = \left\{u + iv :\ 0 \leq u < \infty,\, -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}\right\} .$$

■

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(1+i)\Im(z^2)}{|z|^2} & \text{αν } z \neq 0, \\ 0 & \text{αν } z = 0\ . \end{cases}$$

Δείξτε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$. Είναι η f παραγωγίσιμη στο 0; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση. Είναι

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \frac{2(1+i)xy}{x^2+y^2} & \text{αν } z \neq 0, \\ 0 & \text{αν } z = 0\ . \end{cases}$$

Για $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, είναι

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \frac{0-0}{x} = 0$$

και επομένως

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0\,.$$

Παρόμοια, για $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, είναι

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \frac{0}{y} = 0$$

και επομένως

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0\,.$$

Άρα $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -i\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, δηλαδή ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, μάλιστα η f δεν είναι καν συνεχής στο 0. Πράγματι, αν $y = \lambda x$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \neq 0$, τότε

$$f(z) = f(x+iy) = \frac{2\lambda(1+i)x^2}{x^2+\lambda^2x^2} = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}(1+i)\,.$$

Επομένως, το όριο

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x+i\lambda x}} f(z) = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}(1+i)$$

εξαρτάται από το λ και άρα η f δεν είναι συνεχής στο 0. ■

4. Θεωρούμε την ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = f(x+iy) = e^{-y}(x\cos x - y\sin x) + iv(x,y)\,.$$

Να βρεθεί η συνάρτηση $v = v(x,y)$ και να εκφράσετε την f σαν συνάρτηση του $z = x+iy$.

Λύση. Επειδή η συνάρτηση $u(x,y) = e^{-y}(x\cos x - y\sin x)$ είναι το πραγματικό μέρος της ακέραιας συνάρτησης f, η u είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Πράγματι, η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης στο $\mathbb{R}^2$ και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace: $u_{xx}+u_{yy}=0$.

Επειδή $u_x = e^{-y}\cos x - e^{-y}x\sin x - ye^{-y}\cos x$, από την πρώτη εξίσωση Cauchy–Riemann: $v_y = u_x$ έχουμε $v_y = e^{-y}\cos x - e^{-y}x\sin x - ye^{-y}\cos x$ και επομένως

$$\begin{aligned}
v(x,y) &= -e^{-y}\cos x + e^{-y}x\sin x - \cos x\int ye^{-y}\,dy + c(x)\\
&= -e^{-y}\cos x + e^{-y}x\sin x + ye^{-y}\cos x + e^{-y}\cos x + c(x)\\
&= e^{-y}x\sin x + ye^{-y}\cos x + c(x)\,.
\end{aligned}$$

Τώρα, από τη 2η εξίσωση Cauchy–Riemann: $u_y = -v_x$ έχουμε

$$-e^{-y}x\cos x - e^{-y}\sin x + ye^{-y}\sin x = -(e^{-y}\sin x + e^{-y}x\cos x - ye^{-y}\sin x + c'(x))$$

η οποία συνεπάγεται $c'(x) = 0 \Leftrightarrow c(x) = c$. Δηλαδή,

$$v(x,y) = e^{-y}x\sin x + ye^{-y}\cos x + c\,.$$

Επομένως,

$$f(x+iy) = e^{-y}(x\cos x - y\sin x) + ie^{-y}(x\sin x + y\cos x + c)\,.$$

Τέλος, από γνωστό τύπο έχουμε

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = z\cos z + i(z\sin z + c) = ze^{iz} + ic\,.$$

■

5. Χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τύπους Cauchy υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z}{z^3 - 3z^2}\,dz\,,$$

όπου ο κύκλος C με θετική φορά διαγραφής δεν διέρχεται από τα σημεία $z = 0$ και $z = 3$. Εξετάστε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

Λύση. Είναι

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z}{z^2(z-3)}\,dz\,,$$

(i) <u>Ο κύκλος C δεν περιέχει τα σημεία 0 και 3</u>. Από το θεώρημα Cauchy $I = 0$.

(ii) <u>Ο κύκλος C περιέχει μόνο το σημείο 0</u>. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$I = \frac{1!}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z/(z-3)}{z^2}\,dz = \left(\frac{e^z}{z-3}\right)'\bigg|_{z=0} = \frac{ze^z - 4e^z}{(z-3)^2}\bigg|_{z=0} = -\frac{4}{9}\,.$$

(iii) <u>Ο κύκλος C περιέχει μόνο το σημείο 3</u>. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z/z^2}{z-3}\,dz = \frac{e^z}{z^2}\bigg|_{z=3} = \frac{e^3}{9}\,.$$

(iv) Ο κύκλος C περιέχει τα σημεία 0 και 3. Έστω C_1 και C_2 δύο κύκλοι που δεν τέμνονται και βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου C, έτσι ώστε ο C_1 περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο 0 και ο C_2 περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο 3. Τότε,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{e^z}{z^2(z-3)}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{e^z}{z^2(z-3)}\,dz && \text{(γενικευμένο θεώρημα Cauchy)} \\ &= -\frac{4}{9}+\frac{e^3}{9} = \frac{e^3-4}{9}\,. && \text{(περιπτώσεις } (ii) \text{ και } (iii)) \end{aligned}$$

■

6. (α) Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I_n = \oint_\gamma \frac{\cos 2z}{z^{n+1}}\,dz\,, \quad n\in\mathbb{N}\,,$$

όπου γ απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη που περιέχει το 0.

(β) Υπολογίστε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Σημείωση. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{d^n}{dz^n}\cos 2z = \begin{cases} (-1)^k 2^{2k}\cos 2z & \text{αν } n=2k \\ 0 & \text{αν } n=2k+1\,. \end{cases}$$

Λύση. (α) Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned} I_n &= \oint_C \frac{\cos 2z}{z^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\left\{\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{\cos 2z}{z^{n+1}}\,dz\right\} \\ &= \frac{2\pi i}{n!}\,\frac{d^n}{dz^n}\cos 2z\bigg|_{z=0} = \begin{cases} 2\pi(-1)^k\frac{2^{2k}}{(2k)!}i & \text{αν } n=2k \\ 0 & \text{αν } n=2k+1\,. \end{cases} \end{aligned}$$

(β) Από τον τύπο του Stirling $n!\sim\sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}e^{-n}$ έπεται ότι

$$\frac{2^{2k}}{(2k)!}\sim\frac{1}{2\sqrt{k\pi}}\left(\frac{e}{k}\right)^{2k}\xrightarrow[k\to\infty]{}0\,.$$

Άρα, $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Σημείωση. Για τον υπολογισμό του ορίου μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής: Θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\,, \quad \text{όπου } c_{2k} = 2\pi(-1)^k\frac{2^{2k}}{(2k)!}i\,.$$

Επειδή

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{2k+2}}{c_{2k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{2^{2k+2}}{(2k+2)!}\cdot\frac{(2k)!}{2^{2k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{4}{(2k+1)(2k+2)} = 0 < 1\,,$$

η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}$ συγκλίνει απόλυτα και κατά συνέπεια $\lim_{n\to\infty} c_{2k} = 0$. ■

7. Έστω $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $z_0 \in U$. Αν $f(z_0) = f'(z_0) = 0$ και $f''(z_0) \neq 0$, δείξτε ότι υπάρχει αναλυτική συνάρτηση ϕ σε μια περιοχή $D(z_0, \delta) \subset U$ του z_0 τέτοια ώστε

$$f(z) = \phi(z)^2\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0,\delta) \text{ με } \phi(z) \neq 0 \text{ για κάθε } z \neq z_0\,.$$

Λύση. Επειδή το z_0 είναι ρίζα τάξης 2 της f

$$f(z) = (z - z_0)^2 g(z)\,,$$

όπου g αναλυτική συνάρτηση στο U με $g(z_0) \neq 0$. Τότε ως γνωστόν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0,\delta) \subset U$. Επειδή ο ανοικτός δίσκος $D(z_0,\delta)$ είναι ένας απλά συνεκτικός τόπος στον οποίο η αναλυτική συνάρτηση g δεν μηδενίζεται, από γνωστό θεώρημα υπάρχει αναλυτική τετραγωνική ρίζα h της g στο $D(z_0,\delta)$. Δηλαδή υπάρχει αναλυτική συνάρτηση h στο $D(z_0,\delta)$ με

$$g(z) = h(z)^2\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0,\delta)\,.$$

Τότε η συνάρτηση $\phi(z) := (z - z_0)h(z)$ είναι αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $D(z_0,\delta)$ και τέτοια ώστε

$$f(z) = \phi(z)^2\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0,\delta) \text{ με } \phi(z) \neq 0 \text{ για κάθε } z \neq z_0\,.$$

■

8. Έστω $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραιες συναρτήσεις και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν

$$\Re(f(z)) \leq \lambda \Re(g(z))\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,,$$

δείξτε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε

$$f(z) = \lambda g(z) + c\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

Λύση. Επειδή τόσο η εκθετική όσο και οι συναρτήσεις f, g είναι ακέραιες, η συνάρτηση

$$h(z) := e^{f(z)-\lambda g(z)}$$

είναι ακέραια. Επειδή $f(z) - \lambda g(z) = \Re(f(z) - \lambda g(z)) + i\Im(f(z) - \lambda g(z))$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ είναι

$$\begin{aligned} |h(z)| = \left|e^{f(z)-\lambda g(z)}\right| &= e^{\Re(f(z)-\lambda g(z))} \cdot \left|e^{i\Im(f(z)-\lambda g(z))}\right| \\ &= e^{\Re(f(z))-\lambda\Re(g(z))} \leq e^0 = 1\,. \qquad \text{(από την υπόθεση)} \end{aligned}$$

Επομένως από το θεώρημα Liouville η h είναι σταθερή και κατά συνέπεια η

$$|h(z)| = e^{\Re(f(z)-\lambda g(z))}$$

θα είναι σταθερή. Τότε το $\Re(f(z) - \lambda g(z))$ θα είναι σταθερό και άρα από γνωστή πρόταση η ακέραια συνάρτηση $f(z) - \lambda g(z)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. Δηλαδή $f(z) = \lambda g(z) + c$ για κάποιο $c \in \mathbb{C}$. ■

9. Έστω D φραγμένος τόπος με $\overline{D} = D \cup \partial D \subset U$, όπου U ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{C}$. Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο U με

$$f(z) \neq 0\,, \text{ για κάθε } z \in D \text{ και } \inf_{z\in\partial D} |f(z)| = m < M = \sup_{z\in\partial D} |f(z)|\,,$$

δείξτε ότι $m < |f(z)| < M$ για κάθε $z \in D$.

Λύση. Επειδή το $\overline{D}$ είναι ένα συμπαγές σύνολο, η f θα παίρνει την ελάχιστη τιμή της m και τη μέγιστη τιμή της M στο $\overline{D}$. Από την αρχή μεγίστου η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο ∂D του D εκτός και αν η f είναι σταθερή. Επειδή $f(z) \neq 0$, για κάθε $z \in D$, από την αρχή ελαχίστου η f θα παίρνει και την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο ∂D του D εκτός και αν η f είναι σταθερή. Όμως από την υπόθεση είναι $\min_{z\in\partial D} |f(z)| = m < M = \max_{z\in\partial D} |f(z)|$ και επομένως η f δεν είναι σταθερή. Άρα,

$$m < |f(z)| < M\,, \quad \text{για κάθε } z \in D\,.$$

■

10. Να βρεθεί η σειρά(ανάπτυγμα) Laurent της

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z+i)}$$

με κέντρο το $z_0 = -i$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $1+i$.

Λύση. Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι: -1 και $-i$. Επομένως το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $-i$ μπορεί να γίνει στους δακτυλίους

$$\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+i| < \sqrt{2}\} \quad \text{και} \quad \Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| > \sqrt{2}\}.$$

Επειδή το $1+i \in \{z \in \mathbb{C} : |z+i| > \sqrt{2}\}$, θα αναπτύξουμε την f στο δακτύλιο Δ_2 που είναι ο μεγαλύτερος δακτύλιος που περιέχει το σημείο $1+i$.

Ως γνωστόν

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n, \quad |w| < 1. \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά παίρνουμε

$$-\frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n w^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n w^{n-1}, \quad |w| < 1.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z+1)^2(z+i)} \\ &= \frac{1}{(z+i+(1-i))^2(z+i)} \\ &= \frac{1}{(z+i)^3} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1-i}{z+i}\right)^2} \\ &= \frac{1}{(z+i)^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n \left(\frac{1-i}{z+i}\right)^{n-1} \qquad \left(\left|\tfrac{1-i}{z+i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+i| > |1-i| = \sqrt{2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(i-1)^{n-1} n \frac{1}{(z+i)^{n+2}}. \end{aligned}$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα ισχύει στο δακτύλιο $\Delta_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : |z+i| > \sqrt{2}\right\}$ που είναι ο μεγαλύτερος δυνατός δακτύλιος που περιέχει το σημείο $1+i$. ■

11. Έστω $\dfrac{\tan z}{z^2} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{\tan z}{z^2}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} < |z| < \frac{3\pi}{2}\right\} \text{ με κέντρο το } z_0 = 0.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \le -1$.

Λύση. Τα $z_k = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f. Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{\tan z/z^2}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{\tan z}{z^{n+3}}\,dz\,,$$

όπου ο κύκλος $|z| = r$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $\pi/2 < r < 3\pi/2$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ. Τα σημεία 0 και $\pm\pi/2$ βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$.

(i) $\underline{n = -1}$: Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{\tan z}{z^2}\,dz\,.$$

Τα σημεία 0 και $\pm\pi/2$ είναι απλοί πόλοι της $g(z) = \frac{\tan z}{z^2} = \frac{z^{-2}\sin z}{\cos z}$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z^{-2}\sin z}{\cos z}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-2}\sin z}{\cos z}, -\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-2}\sin z}{\cos z}, 0\right) \\
&\quad + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-2}\sin z}{\cos z}, \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \left.\frac{z^{-2}\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=-\frac{\pi}{2}} + \lim_{z\to 0} z\frac{z^{-2}\sin z}{\cos z} + \left.\frac{z^{-2}\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=\frac{\pi}{2}} \\
&= -\left.\frac{z^{-2}\sin z}{\sin z}\right|_{z=-\frac{\pi}{2}} + \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\frac{1}{\cos z} - \left.\frac{z^{-2}\sin z}{\sin z}\right|_{z=\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{4}{\pi^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2} = 1 - \frac{8}{\pi^2}\,.
\end{aligned}$$

(ii) $\underline{n \le -2}$: Σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$g(z) = \frac{\tan z}{z^{n+3}} = \frac{\sin z}{z^{n+3}\cos z}\,, \quad \text{με } n+3 \le 1\,.$$

Τα σημεία $\pm\pi/2$ είναι απλοί πόλοι της g ενώ το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z^{-n-3}\sin z}{\cos z}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n-3}\sin z}{\cos z}, -\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n-3}\sin z}{\cos z}, \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \left.\frac{z^{-n-3}\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=-\frac{\pi}{2}} + \left.\frac{z^{-n-3}\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=\frac{\pi}{2}} \\
&= -\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{-n-3} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-n-3}\,.
\end{aligned}$$

■

12. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_{|z-2|=\sqrt{5}} \frac{\sin z}{z^2(z^2-1)^2}\, dz\,.$$

Λύση. Τα σημεία $0, \pm 1$ είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z^2-1)^2} = \frac{\sin z}{z^2(z-1)^2(z+1)^2}\,.$$

Τα σημεία 0, 1 βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z-2| = \sqrt{5}$ και το -1 εξωτερικά του κύκλου. Επειδή το 0 είναι απλή ρίζα του αριθμητή και διπλή ρίζα του παρανομαστή της f, το 0 είναι απλός πόλος της f με

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z\frac{\sin z}{z^2(z-1)^2(z+1)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z}\cdot\frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2} = 1\,.$$

Το 1 είναι πόλος τάξης 2 της f με

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,1) &= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\frac{\sin z}{z^2(z-1)^2(z+1)^2}\right]' \\
&= \lim_{z\to 1}\left[\frac{\sin z}{(z^2+z)^2}\right]' \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{(z^2+z)\cos z - 2(2z+1)\sin z}{(z^2+z)^3} = \frac{\cos 1 - 3\sin 1}{4}\,.
\end{aligned}$$

Άρα, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\begin{aligned}
\oint_{|z-2|=\sqrt{5}} \frac{\sin z}{z^2(z^2-1)^2}\, dz &= 2\pi i[\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,1)] \\
&= 2\pi i\left[1 + \frac{\cos 1 - 3\sin 1}{4}\right] = \frac{4+\cos 1 - 3\sin 1}{2}\pi i\,.
\end{aligned}$$

■

13. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx\,.$$

Λύση. Επειδή

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx\,,$$

ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση $g(z) = e^{iz} f(z)$, όπου $f(z) = 1/(z^2+1)^2$, πάνω στην κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη $\gamma = [-R, R] \cup \gamma_R$, με θετική φορά, όπου γ_R είναι το ημικύκλιο στο άνω ημιεπίπεδο με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ και $R > 1$. Η συνάρτηση g είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό της γ εκτός από το $z = i$ που είναι πόλος τάξης 2 της g. Επειδή

$$\operatorname{Res}\big(e^{iz} f(z), i\big) = \lim_{z\to i}\left[(z-i)^2 \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\right]' = \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\right)' = \lim_{z\to i} e^{iz}\frac{iz-3}{(z+i)^3} = e^{-1}\frac{1}{2i}\,,$$

από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\int_{-R}^{R} e^{ix} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} e^{iz} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\big(e^{iz} f(z), i\big) = 2\pi i e^{-1}\frac{1}{2i} = \pi e^{-1}\,. \qquad (*)$$

Επειδή $f(z) = P(z)/Q(z)$, όπου $\mathrm{deg} Q(z) = 4 > 1 = \mathrm{deg} P(z) + 1$, από το λήμμα Jordan

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{iz} f(z)\,dz = 0\,.$$

Παίρνοντας στην $(*)$ το $R \to \infty$ έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx = \pi e^{-1}\,.$$

Επομένως,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{2e}\,.$$

■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

Στις παρακάτω ασκήσεις να **τσεκάρετε τις σωστές απαντήσεις**, *μπορεί να είναι και περισσότερες από μια.*

1. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$

$$(\alpha) \quad \overline{e^{iz}} = e^{-iz}\,. \quad (\beta) \quad |e^{iz}| = 1\,. \quad (\gamma) \quad |e^{iz}| = e^{|z|}\,. \quad (\delta) \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z\,.$$

Απάντηση. (α) και (δ). ■

2. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 με $|z_1| > |z_2|$ είναι

$$(\alpha) \quad |z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|\,. \quad (\beta) \quad |z_1 - z_2| < |z_1|\,. \quad (\gamma) \quad \left|\frac{z_1 + z_2}{z_1}\right| < 2\,.$$

$$(\delta) \quad \left|\Re\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\right| < 1\,.$$

Απάντηση. (α), (γ) και (δ). ■

3. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, οι συναρτήσεις $w = \sin z$ και $w = \cos z$ ικανοποιούν

$$(\alpha) \quad |\sin z|^2| + |\cos z|^2 < 2\,. \quad (\beta) \quad (\sin z + \cos z)^2 = 1 + \sin 2z\,. \quad (\gamma) \quad |\sin z| + |\cos z| \ge 1\,.$$

$$(\delta) \quad |\sin z|^2 + |\cos z|^2 = 1\,.$$

Απάντηση. (β) και (γ). ■

4. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. Η εξίσωση $|z - z_0| = |z - z_0\overline{z}|$

(α) ισχύει για κάθε $z \in \mathbb{C}$ αν $|z_0| = 1$. (β) δεν έχει λύση αν $|z_0| = 1$.

(γ) ισχύει για κάθε z στο μοναδιαίο κύκλο αν $|z_0| \ne 1$.

(δ) έχει μόνο πραγματικές λύσεις αν $z_0 = 1$.

Απάντηση. (α) και (γ). ■

5. Έστω $D = \mathbb{C} \setminus \{z :\ z = iy, y \ge 0\}$.

(α') Το D δεν είναι απλά συνεκτικός τόπος.

(β') Υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f στο D και μια κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη γ στο D τέτοια ώστε

$$\oint_\gamma f(z)\,dz \neq 0\,.$$

(γ') Έστω $z = re^{i\theta}$, όπου $-3\pi/2 < \theta < \pi/2$. Οι μιγαδικοί λογάριθμοι

$$\log_n z = \ln r + i(\theta + 2n\pi)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο D.

(δ') Η συνάρτηση $f(z) = \sqrt{z} = \exp\{2^{-1}\log_0 z\}$, όπου η $w = \log_0 z$ ορίζεται στη (γ'), είναι αναλυτική στο D.

Απάντηση. (γ') και (δ'). ■

6. Θεωρούμε την απεικόνιση $w = \dfrac{1}{z^2}\,, z \neq 0$ από το z-επίπεδο στο w-επίπεδο.

(α') Η εικόνα του κύκλου με κέντρο το $z = 0$ είναι κύκλος με κέντρο το $w = 0$.

(β') Η εικόνα του κύκλου με κέντρο το $z = 0$ είναι ευθεία γραμμή.

(γ') Η εικόνα του φανταστικού άξονα $\{z = iy : \, y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$ είναι ο αρνητικός πραγματικός άξονας $\{w = u : \, u < 0\}$.

(δ') Η εικόνα της ευθείας $y = x$, $x \neq 0$, είναι ο αρνητικός φανταστικός άξονας $\{w = iv : \, v < 0\}$.

Απάντηση. (α'), (γ') και (δ'). ■

7. Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} z/\overline{z} & \text{αν } z \neq 0 \\ 1 & \text{αν } z = 0\,. \end{cases}$$

(α) η f είναι παντού ασυνεχής. (β) η f είναι ασυνεχής για $z = 0$.

(γ) η $w = f(z)$ απεικονίζει τον πραγματικό άξονα στο 1.

(δ) η $w = f(z)$ απεικονίζει το φανταστικό άξονα στο -1.

Απάντηση. (β) και (γ). ■

8. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. Η εξίσωση $\sin z + \cos z = z_0$

   (α) δεν έχει λύσεις για $|z_0| > 2$. (β) έχει λύσεις για κάθε z_0.

   (γ) έχει μόνο πραγματικές λύσεις αν $z_0 \in \mathbb{R}$ με $1 \leq |z_0| \leq \sqrt{2}$.

   (δ) έχει φανταστικές λύσεις αν $z_0 = i\sqrt{2}$.

Απάντηση. (β) και (γ). ■

9. Η ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = f(x + iy) = \cos x \sinh y + iv(x, y)$$

   (α') είναι αναλυτική αν η συνάρτηση $v = v(x, y)$ είναι διαφορίσιμη.

   (β') είναι αναλυτική αν η συνάρτηση $v = v(x, y)$ είναι μια οποιαδήποτε αρμονική συνάρτηση.

   (γ') είναι αναλυτική αν $v(x, y) = \sin x \cosh y$.

   (δ') είναι αναλυτική αν $v(x, y) = -\sin x \cosh y$.

Απάντηση. (δ'). ■

10. Η συνάρτηση $u(x, y) = y^3 - 3x^2 y$

   (α') δεν μπορεί να είναι το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος μιας ακέραιας συνάρτησης.

   (β') μπορεί να είναι το πραγματικό μέρος μιας ακέραιας συνάρτησης.

   (γ') μπορεί να είναι το φανταστικό μέρος μιας ακέραιας συνάρτησης.

   (δ') είναι συζυγής αρμονική της $v(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

Απάντηση. (β') και (δ'). ■

11. Αν

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^n + 1}\, dz\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,,$$

είναι

   (α) $|I| \leq \dfrac{4\pi e^2}{2^n - 1}$. (β) $|I| > \dfrac{4\pi e^2}{2^n - 1}$. (γ) $I = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

   (δ) $I = \displaystyle\oint_{|z|=r} \frac{e^z}{z^n + 1}\, dz$, όπου $r > 1$.

Απάντηση. (α) και (δ). ■

12. Αν

$$I = \oint_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2+4}\, dz\,,$$

είναι

$$(\alpha)\quad I = 0\,. \quad (\beta)\quad I = \frac{\pi}{2}\,. \quad (\gamma)\quad I = i\frac{\pi}{2}\,. \quad (\delta)\quad I = \pi\,.$$

Απάντηση. (β). ∎

13. Έστω το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C \frac{e^{\cos z}}{z^2+(3-i)z-3i}\, dz\,,$$

όπου C το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με κορυφές -1, 1, $1+2i$, $-1+2i$. Είναι

$$(\alpha)\quad I = \frac{3+i}{10}\oint_C \frac{e^{\cos z}}{z-i}\, dz\,. \quad (\beta)\quad I = \frac{3-i}{10}\oint_C \frac{e^{\cos z}}{z-i}\, dz\,. \quad (\gamma)\quad I = \frac{3+i}{4}\oint_C \frac{e^{\cos z}}{z+i}\, dz\,.$$

$$(\delta)\quad I = \frac{3-i}{4}\oint_C \frac{e^{\cos z}}{z+i}\, dz\,.$$

Απάντηση. (β). ∎

14. Έστω το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C \frac{\sin z}{(z^2+1)^2}\, dz\,,$$

όπου C το τρίγωνο με κορυφές $z=-1$, $z=1$ και $z=2i$. Είναι

$$(\alpha)\quad I = 0\,. \quad (\beta)\quad I = -i\frac{\pi}{2e}\,. \quad (\gamma)\quad I = \frac{\pi}{2}(\cos 1 + \sin 1)\,. \quad (\delta)\quad I = -\frac{\pi i}{2}(\cos i + i\sin i)\,.$$

Απάντηση. (β) και (δ). ∎

15. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_\gamma \frac{e^{-iz}}{z^2+1}\, dz\,,$$

όπου $\gamma = [-R,R]\cup\gamma_R$ και γ_R είναι το ημικύκλιο $z(\theta)=Re^{i\theta}$, $-\pi\le\theta\le 0$, $R>1$. Είναι

$$(\alpha)\quad I = 0\,. \quad (\beta)\quad I = -\frac{\pi}{e}\,. \quad (\gamma)\quad I = \frac{\pi}{e}\,. \quad (\delta)\quad \lim_{R\to\infty} I = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\, dx\,.$$

Απάντηση. (β) και (δ). ∎

16. Έστω C η ημιευθεία $y = x$, $x \geq 0$, με αρχή την αρχή των αξόνων. Το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 2i}\, dz$$

(α) δεν είναι φραγμένο. (β) ισούται με $\dfrac{1+i}{2i} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$. (γ) ισούται με $(1-i)\dfrac{\pi}{4}$.
(δ) ισούται με $(1+i)\dfrac{\pi}{4}$.

Απάντηση. (β) και (γ). ■

17. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz^2}}{z^2}\, dz\,,$$

όπου γ_R είναι το τόξο του κύκλου $|z| = R$ στο 1ο τεταρτημόριο με θετική φορά και παραμετρική εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Είναι

(α) $|I| \leq \dfrac{\pi}{2R}$. (β) $|I| \geq \dfrac{\pi}{2R}$. (γ) $|I| = \dfrac{\pi}{R}$. (δ) $\lim\limits_{R\to\infty} I = ie^2$.

Απάντηση. (α). ■

18. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(z)| \leq M(1 + \sqrt{|z-i|})$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, όπου $M > 0$. Τότε

(α) $f \equiv 0$. (β) $f(z) = \sqrt{|z|}$. (γ) $f(z) = z^{1/2}$. (δ) $f(z) = c$, σταθερή, με $|c| \leq M$.

Απάντηση. (δ). ■

19. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(z)| \leq M(1 + \sqrt{|z|})$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, όπου $M > 0$. Τότε

(α) $f \equiv 0$. (β) $f(z) = \sqrt{|z|}$. (γ) $f(z) = z^{1/2}$. (δ) $f(z) = c$, σταθερή, με $|c| \leq M$.

Απάντηση. (δ). ■

20. Έστω $f : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση σε ένα τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$ που περιέχει τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0,1) = \{z : |z| \leq 1\}$. Αν η f δεν έχει ρίζες στο μοναδιαίο δίσκο και $f(z) = i$ για κάθε z στο μοναδιαίο κύκλο $|z| = 1$, τότε

(α') $f(z) = i$ για κάθε z στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$.

(β') $f(z) = 2\pi i$ για κάθε z στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$.

(γ') $f(z) = 1$ για κάθε z στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$.

(δ') $f(z) = i$ για κάθε $z \in G$.

Απάντηση. (α') και (δ'). ■

21. Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{(1-\cos z)\sin z}{z^3}$$

(α) έχει πόλο τάξης 2 για $z = 0$. (β) έχει πόλο τάξης 3 για $z = 0$. (γ) $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \dfrac{1}{2}$.

(δ) έχει επουσιώδη ανωμαλία για $z = 0$.

Απάντηση. (β) και (γ). ■

22. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο $D'(0,R) : 0 < |z| < R$. Αν το το $z = 0$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της συνάρτησης f, για τη συνάρτηση f^2 το $z = 0$ είναι

(α) επουσιώδες ανώμαλο σημείο. (β) πόλος τάξης 2. (γ) ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

(δ) απλός πόλος.

Απάντηση. (γ). ■

23. Υποθέτουμε ότι η αναλυτική συνάρτηση $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ είναι τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^{5/2}}, \quad \text{για κάθε } |z| > 0\,.$$

Τότε

(α) $f \equiv 0$. (β) η f είναι πολυώνυμο βαθμού ≤ 2. (γ) $f(z) = z^{5/2}$.

(δ) η f είναι σταθερή.

Απάντηση. (α). ■

24. Η σειρά(ανάπτυγμα) Laurent της

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}$$

με κέντρο το $z_0 = 1$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $-2+i$ είναι

(α') $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+2}{3^{n+3}} (z-1)^n$, στο διάτρητο δίσκο: $0 < |z-1| < 3$.

(β') $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n 3^{n-1} \frac{1}{(z-1)^{n+2}}$, στο δακτύλιο: $|z-1| > 3$.

(γ') $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{1} (-1)^{n-1} 3^{n-3} (2-n)(z-1)^{-n}$, στο διάτρητο δίσκο: $0 < |z-1| < 3$.

(δ') $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n \frac{n}{3^{n+1}} (z-1)^{n-2}$, στο δακτύλιο: $|z-1| > 3$.

Απάντηση. (β') και (δ'). ■

25. Έστω $\frac{z^2}{e^z-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{z^2}{e^z-1}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 2\pi < |z| < 4\pi\} \text{ με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Είναι

(α) $a_2 = 0$. (β) $a_1 = 3$ και $a_n = (-2\pi i)^{-n+1} + (2\pi i)^{-n+1}$, για κάθε $n \le 0$.

(γ) $a_n = (-1)^k (2\pi)^{-2k}$, για $n = 2k+1$ με $k \le -1$. (δ) $a_n = 0$, για $n = 2k$ με $k \le 0$.

Απάντηση. (β) και (δ). ■

26. Θεωρούμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)^2}\, dx\,.$$

Είναι

(α) $I = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{(1+x^2)^2}\, dx$. ($\beta$) $I = \frac{i}{2} \int_0^{\infty} \frac{x e^{ix}}{(1+x^2)^2}\, dx$. ($\gamma$) $I = \frac{\pi}{4e}$.

(δ) $I = \frac{\pi}{2e}$.

Απάντηση. (α) και (γ). ■

1.3 Ακαδημαϊκό έτος 2013–14

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Αν τα $p = \alpha + i\beta$, $q = \gamma + i\delta$ είναι σημεία του ανοικτού δίσκου $D(0, R)$, $R > 0$, δείξτε ότι ένα τουλάχιστον από τα σημεία $\alpha + i\delta$, $\gamma + i\beta$ ανήκει στο δίσκο $D(0, R)$.

   Λύση. Επειδή $p = \alpha + i\beta \in D(0, R)$ και $q = \gamma + i\delta \in D(0, R)$, είναι $\alpha^2 + \beta^2 < R^2$ και $\gamma^2 + \delta^2 < R^2$. Τότε,

   $$(\alpha^2 + \delta^2) + (\beta^2 + \gamma^2) < 2R^2 .$$

   Επομένως ένα τουλάχιστον από τα $\alpha^2 + \delta^2$ και $\beta^2 + \gamma^2$ είναι μικρότερο του R^2 και άρα ένα τουλάχιστον από τα σημεία $\alpha + i\delta$ και $\gamma + i\beta$ ανήκει στο δίσκο $D(0, R)$. ■

2. Αν το F είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και το $z_0 \notin F$, δείξτε ότι το $\inf\{|z - z_0| : z \in F\} > 0$.

   Λύση. Υποθέτουμε ότι $\inf\limits_{z\in F}|z - z_0| = 0$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_n \in F$ τέτοιο ώστε

   $$|z_n - z_0| < \frac{1}{n} .$$

   Επομένως $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, δηλαδή η ακολουθία (z_n) σημείων του F συγκλίνει στο $z_0 \notin F$. Άτοπο, επειδή ως γνωστόν το όριο συγκλίνουσας ακολουθίας σημείων του κλειστού συνόλου F ανήκει στο F. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι $\inf\limits_{z\in F}|z - z_0| = 0$. Άρα, $\inf\limits_{z\in F}|z - z_0| > 0$. ■

3. (i) Να λυθεί η εξίσωση $z^3 + i = 0$.

   (ii) Δείξτε ότι οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = (1 - z)^n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι

   $$z_k = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) , \quad k = 0, 1, \ldots , n - 1 .$$

   Λύση.

   (i) Επειδή

   $$z^3 + i = 0 \Leftrightarrow z^3 = -i = e^{-(\pi/2)i} ,$$

οι λύσεις της εξίσωσης $z^3 + i = 0$ είναι

$$z_k = \exp\left(\frac{2k\pi - \pi/2}{3} i\right), \quad k = 0, 1, 2\,.$$

Επομένως οι κυβικές ρίζες του $-i$ είναι

$$z_0 = e^{-(\pi/6)i} = \cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6) = \frac{\sqrt{3} - i}{2},$$

$$z_1 = e^{(\pi/2)i} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$$

και

$$z_2 = e^{(7\pi/6)i} = \cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6) = -\frac{\sqrt{3} + i}{2}\,.$$

(ii) Επειδή

$$z^n = (1-z)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z} - 1\right)^n = 1\,,$$

είναι

$$\frac{1}{z_k} - 1 = \omega^k = e^{(2k\pi/n)i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Επομένως,

$$\frac{1}{z_k} = 1 + \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n) = 2\cos^2(k\pi/n) + 2i\sin(k\pi/n)\cos(k\pi/n)$$

και άρα

$$\begin{aligned} z_k = \frac{1}{2\cos(k\pi/n)[\cos(k\pi/n) + i\sin(k\pi/n)]} &= \frac{\cos(k\pi/n) - i\sin(k\pi/n)}{2\cos(k\pi/n)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,. \end{aligned}$$

■

4. Αν η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, είναι συνεχής, δείξτε ότι η

$$F(z) := \int_a^b \frac{f(t)}{t - z}\, dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]\,,$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus [a, b]$.

Υπόδειξη. Έστω $z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]$. Αν $d = \min\limits_{t \in [a,b]} |t - z|$, $h \in \mathbb{C}$, $0 < |h| < d/2$ και $M = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$, δείξτε ότι

$$|F(z+h) - F(z)| = \left| \int_a^b \frac{hf(t)}{(t-z)(t-z-h)}\, dt \right| \le \frac{2M(b-a)}{d^2} |h|\,.$$

Λύση. Έστω $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$ και έστω d η απόσταση του z από το $[a,b]$, δηλαδή $d = \min_{t\in[a,b]} |t-z|$. Αν $M = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$, τότε για κάθε $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$, με $z+h \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$ έχουμε,

$$\begin{aligned} |F(z+h) - F(z)| &= \left| \int_a^b \frac{f(t)}{t-z-h}\, dt - \int_a^b \frac{f(t)}{t-z}\, dt \right| \\ &= \left| \int_a^b \frac{hf(t)}{(t-z)(t-z-h)}\, dt \right| \\ &\leq \int_a^b \frac{|h||f(t)|}{|t-z||t-z-h|}\, dt \\ &\leq \frac{M|h|}{d} \int_a^b \frac{1}{|t-z-h|}\, dt\,. \qquad (|t-z| \geq d) \end{aligned}$$

Παίρνουμε το $h \in \mathbb{C}$ με $0 < |h| < d/2$. Τότε,

$$\frac{1}{|t-z-h|} \leq \frac{1}{|t-z| - |h|} < \frac{1}{d - d/2} = \frac{2}{d}$$

και επομένως

$$|F(z+h) - F(z)| \leq \frac{M|h|}{d} \int_a^b \frac{2}{d}\, dt = \frac{2M(b-a)}{d^2} |h|\,.$$

Άρα $\lim_{h\to 0} F(z+h) = F(z)$, δηλαδή η F είναι συνεχής για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$. ■

5. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \frac{z}{1+|z|}\,.$$

(α΄) Δείξτε ότι η f απεικονίζει αμφιμονοσήμαντα το $\mathbb{C}$ στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$, δηλαδή ότι η f είναι $1-1$ και επί. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι συνεχείς.

(β΄) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\varphi(z) := |z|$ δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$. Υπάρχουν σημεία του $\mathbb{C}$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη;

Λύση.

(α΄) Επειδή

$$|f(z)| = \frac{|z|}{1+|z|} < 1\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,,$$

η f απεικονίζει το $\mathbb{C}$ στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$. Αν $f(z_1) = f(z_2)$, τότε $|f(z_1)| = |f(z_2)|$ και ισοδύναμα

$$\frac{|z_1|}{1+|z_1|} = \frac{|z_2|}{1+|z_2|} \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|\,.$$

Επομένως από την ισότητα

$$f(z_1) = \frac{z_1}{1+|z_1|} = f(z_2) = \frac{z_2}{1+|z_2|}$$

έπεται ότι ότι $z_1 = z_2$, δηλαδή η f είναι $1-1$. Έστω τώρα $w \in D(0,1)$, δηλαδή $|w| < 1$. Αν $z := \frac{w}{1-|w|}$, τότε

$$f(z) = f\left(\frac{w}{1-|w|}\right) = \frac{\frac{w}{1-|w|}}{1+\frac{|w|}{1-|w|}} = w$$

και επομένως η f απεικονίζει το $\mathbb{C}$ επί του $D(0,1)$. Είναι

$$f^{-1}(z) = \frac{z}{1-|z|}\,, \quad z \in D(0,1)\,.$$

Αν (z_n) είναι ακολουθία σημείων του $\mathbb{C}$ με $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, τότε $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$ και κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{1+|z_n|} = \frac{z}{1+|z|} = f(z)\,.$$

Άρα, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο $D(0,1)$.

(β΄) Εύκολα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $\varphi(z) := |z|$ δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$. Από τον ορισμό της f έπεται ότι

$$|z| = \frac{z - f(z)}{f(z)}\,, \quad \text{για κάθε } z \neq 0\,.$$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $z \neq 0$, τότε και η $\varphi(z) = |z|$ θα είναι παραγωγίσιμη για κάθε $z \neq 0$, άτοπο. Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Επειδή

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1+|z|} = 1\,,$$

η f είναι παραγωγίσιμη μόνο στο 0 με $f'(0) = 1$.

■

6. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^{4/3}y^{5/3}+ix^{5/3}y^{4/3}}{x^2+y^2} & \text{αν } z \neq 0, \\ 0 & \text{αν } z = 0\,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$ ενώ δεν υπάρχει η παράγωγος $f'(0)$.

Λύση. Για $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, είναι

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0$$

και επομένως

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0\,.$$

Παρόμοια, για $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, είναι

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \frac{0}{y} = 0$$

και επομένως

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0\,.$$

Άρα $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -i\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, δηλαδή ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Παρατηρούμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, είναι

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{f(x+iy)}{x+iy} = \frac{x^{4/3}y^{5/3}+ix^{5/3}y^{4/3}}{(x+iy)(x^2+y^2)}\,.$$

Παίρνουμε το $z = x + i\lambda x \in \mathbb{C}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \neq 0$, δηλαδή $y = \lambda x$, $x \neq 0$. Τότε,

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{\lambda^{5/3}+i\lambda^{4/3}}{(1+i\lambda)(1+\lambda^2)}$$

και επομένως το όριο

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x+i\lambda x}}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{\lambda^{5/3}+i\lambda^{4/3}}{(1+i\lambda)(1+\lambda^2)}$$

εξαρτάται από το λ. Άρα, η παράγωγος $f'(0)$ δεν υπάρχει.

$\blacksquare$

7. Να βρεθούν όλα τα σημεία του $\mathbb{C}$ στα οποία η

$$f(z) = (\overline{z} + 2i)^2 - 1$$

είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγος. Σε ποια σημεία του $\mathbb{C}$ είναι η f αναλυτική;

Λύση. *1ος τρόπος*. Είναι

$$f(z) = f(x+iy) = (x + i(2-y))^2 - 1 = x^2 - (2-y)^2 - 1 + 2ix(2-y) = u(x,y) + i(x,y)$$

με $u(x,y) = x^2 - y^2 + 4y - 5$ και $v(x,y) = 4x - 2xy$. Οι συναρτήσεις u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$ θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann. Έχουμε

$$\left\{\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x = -2x \\ -2y + 4 = -4 + 2y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \{(x,y) = (0,2)\}\,.$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη μόνο στο σημείο $z = 2i$ με παράγωγο

$$f'(2i) = u_x(0,2) + iv_x(0,2) = 0 + i(4-4) = 0\,.$$

Προφανώς η f δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$.

2ος τρόπος. Για να είναι η f παραγωγίσιμη, πρέπει

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \Leftrightarrow 2(\overline{z} + 2i) = 0 \Leftrightarrow \overline{z} + 2i = 0 \Leftrightarrow z = 2i\,.$$

Δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη μόνο στο σημείο $z = 2i$. ∎

8. Έστω $f : G \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, αναλυτική συνάρτηση στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$. Αν $u_x(x,y) + v_y(x,y) = 0$ στο G, δείξτε ότι

$$f(z) = -icz + d\,, \quad \text{όπου } c \in \mathbb{R} \text{ και } d \in \mathbb{C}\,.$$

Λύση. Επειδή η f είναι αναλυτική στο G, ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy–Riemann: $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$. Από την υπόθεση είναι $u_x = -v_y$ οπότε $2v_y = 0 \Leftrightarrow v_y = 0$. Επομένως $u_x = v_y = 0$ στο G και συνεπώς $u(x,y) = \varphi(y)$, $v(x,y) = \psi(x)$. Επειδή $u_y = -v_x$ για κάθε x

και y, έπεται ότι $\varphi'(y) = -\psi'(x) = c \in \mathbb{R}$. Άρα $u = cy + d_1$ και $v = -cx + d_2$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = cy + d_1 + i(-cx + d_2) = -ic(x + iy)z + (d_1 + id_2) = -icz + d\,,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ και $d \in \mathbb{C}$. ∎

9. Αν η συνάρτηση

$$u(x,y) = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3\,, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\,,$$

είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$, δείξτε ότι $\gamma = -3\alpha$ και $\beta = -3\delta$. Στη συνέχεια να βρεθεί η συζυγής αρμονική v της u καθώς επίσης και η ακέραια συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Να εκφράσετε την f συναρτήσει του z.

Λύση. Επειδή η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης στο $\mathbb{R}^2$, για να είναι η u αρμονική θα πρέπει να ισχύει η εξίσωση Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Είναι

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow (6\alpha + 2\gamma)x + (2\beta + 6\delta)y = 0\,, \quad \text{για κάθε } (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Επομένως πρέπει $6\alpha + 2\gamma = 2\beta + 6\delta = 0$ και ισοδύναμα $\{\gamma = -3\alpha,\ \beta = -3\delta\}$. Κατά συνέπεια η

$$u(x,y) = \alpha x^3 - 3\delta x^2 y - 3\alpha x y^2 + \delta y^3\,, \quad \alpha, \delta \in \mathbb{R}\,,$$

Είναι γνωστό ότι στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C}$ υπάρχει συζυγής αρμονική v της u. Δηλαδή η $f = u + iv$ είναι ακέραια συνάρτηση. Από την εξίσωση Cauchy–Riemann $u_x = v_y$ έχουμε

$$v_y = 3\alpha x^2 - 6\delta x y - 3\alpha y^2\,.$$

Επομένως,

$$v(x,y) = 3\alpha x^2 y - 3\delta x y^2 - \alpha y^3 + c(x)\,.$$

Από τη δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann $v_x = -u_y$ προκύπτει ότι

$$6\alpha x y - 3\delta y^2 + c'(x) = 3\delta x^2 + 6\alpha x y - 3\delta y^2 \Leftrightarrow c'(x) = 3\delta x^2$$

και άρα $c(x) = \delta x^3 + c$. Δηλαδή

$$v(x,y) = 3\alpha x^2 y - 3\delta x y^2 - \alpha y^3 + \delta x^3 + c\,.$$

Τότε,

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = \alpha z^3 + i(\delta z^3 + c) = (\alpha + i\delta)z^3 + ic\,,$$

$c \in \mathbb{R}$ ■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Βρείτε την εικόνα S' του τετραγώνου

$$S = \{z = x + iy : a - \varepsilon \le x \le a + \varepsilon\,,\ -\varepsilon \le y \le \varepsilon\}$$

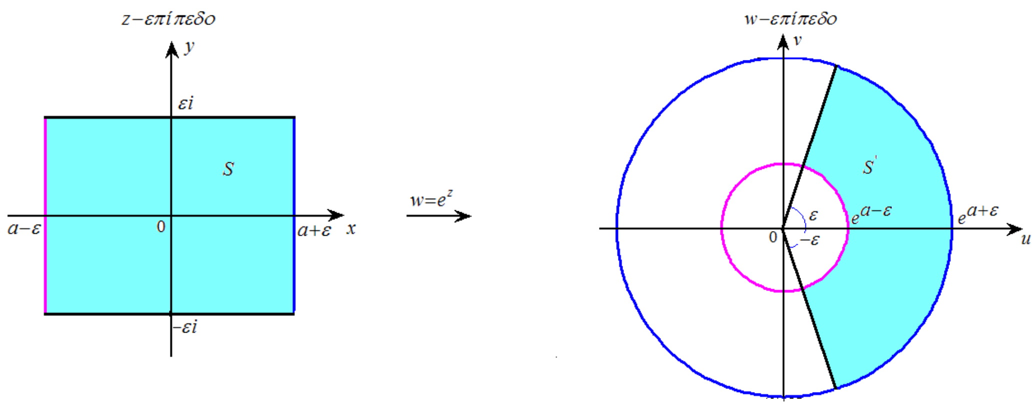
του z-επιπέδου, όπου $0 < \varepsilon < \pi$ και $a \in \mathbb{R}$, μέσω του μετασχηματισμού $f(z) = e^z$. Αν $|S|$, $|S'|$ είναι το εμβαδόν του S, S' αντίστοιχα, δείξτε ότι

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|S'|}{|S|} = e^{2a}\,.$$

Λύση. Ως γνωστόν, ο περιορισμός της $f\,(z) = e^z$ στη θεμελιώδη λωρίδα

$$-\infty < x < \infty\,, \quad -\pi < y \le \pi$$

είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Οι κατακόρυφες ευθείες $x = a - \varepsilon$ και $x = a + \varepsilon$ απεικονίζονται στους κύκλους $|w| = e^{a-\varepsilon}$ και $|w| = e^{a+\varepsilon}$ αντίστοιχα, ενώ οι οριζόντιες ευθείες $y = \pm\varepsilon$ απεικονίζονται στις ημιευθείες (ακτίνες) $\operatorname{Arg} w = \pm\varepsilon$ με αρχή την αρχή των αξόνων. Επομένως, το τετράγωνο S του z-επιπέδου απεικονίζεται στο γραμμοσκιασμένο χωρίο S' του w-επιπέδου.



Το εμβαδόν του τετραγώνου S είναι $|S| = (2\varepsilon)^2 = 4\varepsilon^2$. Το χωρίο S' περιέχεται μεταξύ των κυκλικών τομέων με ακτίνες $e^{a-\varepsilon}$ και $e^{a+\varepsilon}$ αντίστοιχα. Επομένως το εμβαδόν του S' είναι

$$|S'| = \frac{1}{2}(e^{a+\varepsilon})^2 2\varepsilon - \frac{1}{2}(e^{a-\varepsilon})^2 2\varepsilon = \varepsilon(e^{2a+2\varepsilon} - e^{2a-2\varepsilon})\,.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|S'|}{|S|} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{2a+2\varepsilon} - e^{2a-2\varepsilon}}{4\varepsilon}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2e^{2a+2\varepsilon} + 2e^{2a-2\varepsilon}}{4} && \text{(κανόνας L'Hôpital)}\\ &= e^{2a}\,.\end{aligned}$$

■

2. Δείξτε ότι

$$\left|\int_\gamma \frac{1}{2+z^2}\,dz\right| \le \frac{\pi}{2}\,,$$

όπου γ το τόξο του κύκλου $|z| = 2$ στο 1ο τεταρτημόριο.

Λύση. Για κάθε $z \in \gamma$ είναι

$$\left|\frac{1}{2+z^2}\right| = \frac{1}{|2+z^2|} \le \frac{1}{|z|^2 - 2} = \frac{1}{2^2-2} = \frac{1}{2}\,.$$

Το μήκος του τόξου γ είναι π και επομένως

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma \frac{1}{2+z^2}\,dz\right| &\le \int_\gamma \left|\frac{1}{2+z^2}\right|\,|dz|\\ &\le \frac{1}{2}\int_\gamma |dz|\\ &= \frac{1}{2}\times(\text{μήκος του τόξου } \gamma) = \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

■

3. Δείξτε ότι

$$\int_\gamma z\cos(\pi i z)\,dz = \frac{2}{\pi^2}\,,$$

όπου γ η καμπύλη με εξίσωση $\gamma(t) = t - t^2 + it^3$, $t \in [0,1]$.

Λύση. Η γ είναι λεία καμπύλη με αρχή το $\gamma(0) = 0$ και πέρας το $\gamma(1) = i$.

1ος τρόπος. Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε ότι

$$z\cos(\pi iz) = -\frac{1}{\pi^2}\left(\cos(\pi iz) + \pi iz\sin(\pi iz)\right)'\,.$$

Αν $F(z) := -\frac{1}{\pi^2}\left(\cos(\pi iz) + \pi iz\sin(\pi iz)\right)$, από το θεμελιώδες θεώρημα ολοκλήρωσης έχουμε

$$\begin{aligned}\int_\gamma z\cos(\pi iz)\,dz &= F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))\\ &= F(i) - F(0)\\ &= -\frac{1}{\pi^2}\left[\cos(-\pi) - \cos 0\right] = \frac{2}{\pi^2}\,.\end{aligned}$$

2ος τρόπος. Επειδή η συνάρτηση $f(z) = z\cos(\pi iz)$ είναι ακέραια, το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης. Επομένως μπορούμε να ολοκληρώσουμε πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[0,i]$ με εξίσωση $z = iy$, $0 \le y \le 1$. Είναι

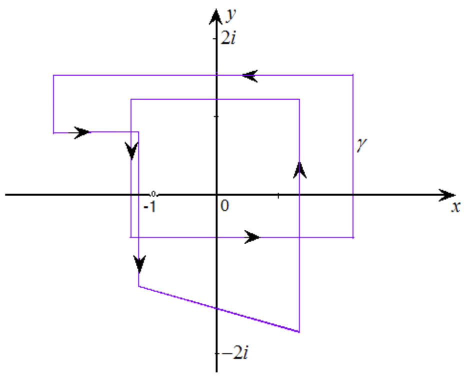
$$\begin{aligned}\int_\gamma z\cos(\pi iz)\,dz &= \int_{[0,i]} z\cos(\pi iz)\,dz\\ &= i\int_0^1 iy\cos(-\pi y)\,dy && (z = iy,\ 0 \le y \le 1)\\ &= -\int_0^1 y\cos(\pi y)\,dy\\ &= -\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi t\cos t\,dt && (\text{αντικατάσταση } t = \pi y)\\ &= -\frac{1}{\pi^2}\left(t\sin t + \cos t\right)\Big|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2}{\pi^2}\,.\end{aligned}$$

■

4. Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{z^4}{(z+1)^2(z^2+4)}\,dz\,,$$

όπου γ η κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη του σχήματος.

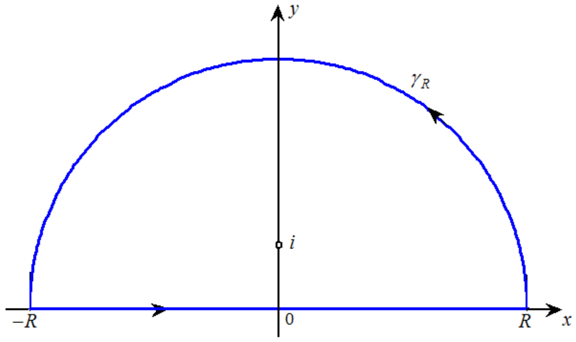


Λύση. Το σημείο -1 βρίσκεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης γ. Επειδή ο δείκτης στροφής της γ ως προς το σημείο -1 είναι $I(\gamma,-1) = 2$ και τα σημεία $\pm 2i$ βρίσκονται εξωτερικά της γ, από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{z^4}{(z+1)^2(z^2+4)}\,dz &= \frac{1!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{z^4/(z^2+4)}{(z+1)^2}\,dz \\
&= I(\gamma,-1)\left(\frac{z^4}{z^2+4}\right)'\Bigg|_{z=-1} \\
&= 2\,\frac{2z^5+16z^3}{(z^2+4)^2}\Bigg|_{z=-1} = 2\left(-\frac{18}{25}\right) = -\frac{36}{25}\,.
\end{aligned}$$

■

5. Έστω $\gamma = [-R,R] \cup \gamma_R$, $R > 0$, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη του επιπέδου, όπου $[-R,R]$ ευθ. τμήμα και γ_R το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με κέντρο 0 και ακτίνα R. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο έτσι ώστε το σημείο i να βρίσκεται στο εσωτερικό της γ.



(α΄) Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{(z^2+1)^3}\, dz\,.$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας το (α΄) δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\, dx = \frac{3\pi}{16}\,.$$

Λύση.

(α΄) Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\frac{2!}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{1}{(z^2+1)^3}\, dz = \frac{2!}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{(z+i)^{-3}}{(z-i)^3}\, dz = \left((z+i)^{-3}\right)''\Big|_{z=i}\,.$$

Επειδή $\left((z+i)^{-3}\right)'' = 12(z+i)^{-5}$, είναι

$$\frac{2!}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{1}{(z^2+1)^3}\, dz = 12(2i)^{-5} = -\frac{3}{8}i$$

και επομένως

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{(z^2+1)^3}\, dz = \frac{3\pi}{8}\,.$$

(β΄) Από το (α΄) έχουμε

$$\int_{[-R,R]} \frac{1}{(z^2+1)^3}\, dz + \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^3}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^3}\, dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^3}\, dz = \frac{3\pi}{8}\,. \tag{1.2}$$

Η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$ είναι πηλίκο των πολυωνύμων $P(z) = 1$ και $Q(z) = (z^2+1)^3$. Επειδή

$$\text{βαθμός } Q(z) > \text{ βαθμός } P(z)+2\,,$$

έπεται ότι $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^3}\,dz = 0$ (παραπέμπουμε στο [9]). Επομένως από την (1.2) παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{3\pi}{8}$$

και άρα

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{3\pi}{16}\,.$$

Σημείωση. Για τον υπολογισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων.

■

6. Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z^2+4(2+i)}{(z+1+i)(z-2)^2} = \frac{1}{z+1+i} + \frac{4}{(z-2)^2}\,.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα της f σε σειρά Taylor γύρω από το 0, δηλαδή με κέντρο το $z_0 = 0$, καθώς επίσης και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad \text{και} \quad \frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n\,, \quad |w|<1\,.$$

Είναι

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+1+i} = \frac{1}{(1+i)\left(1+\frac{z}{1+i}\right)} &= \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{1+i}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{(1+i)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-i)^{n+1}\frac{z^n}{2^{n+1}}\,.\end{aligned}$$

$$(|z/(1+i)|<1 \Leftrightarrow |z|<|1+i|=\sqrt{2})$$

Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$, $|w|<1$, παίρνουμε

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)w^n\,, \quad |w|<1\,.$$

Επομένως

$$\frac{4}{(z-2)^2} = \frac{1}{(1-z/2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{2}\right)^n . \qquad (|z/2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2)$$

Άρα, για $|z| < \sqrt{2}$ έχουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left[(-1)^n(1-i)^{n+1} + 2(n+1)\right] z^n .$$

Ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $R = \sqrt{2}$. ■

7. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες συναρτήσεις $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ που έχουν το 0 απλή ρίζα και είναι τέτοιες ώστε

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{f'(z)}{z} = 0 .$$

Υπόδειξη. Γενίκευση του θεωρήματος Liouville.

Λύση. Επειδή $\lim_{|z|\to\infty} \frac{f'(z)}{z} = 0$, για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $|z| > M$ είναι

$$\left|\frac{f'(z)}{z}\right| < \varepsilon .$$

Δηλαδή

$$|f'(z)| < \varepsilon|z| , \quad \text{για κάθε } |z| > M$$

και επειδή η f' είναι ακέραια συνάρτηση, από τη γενίκευση του θεωρήματος Liouville η f' είναι πολυώνυμο βαθμού 1. Έστω

$$f'(z) = a + bz .$$

Όμως από την υπόθεση

$$\lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{f'(z)}{z}\right| = \lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{a}{z} + b\right| = 0 ,$$

οπότε $b = 0$. Επομένως $f'(z) = a$ και κατά συνέπεια $f(z) = a_0 + az$. Όμως $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ συνεπάγεται ότι $a_0 = 0$ και $a \neq 0$. Άρα, όλες οι ακέραιες συναρτήσεις είναι της μορφής

$$f(z) = az , \quad a \in \mathbb{C}, a \neq 0 .$$

■

8. Έστω η πραγματική συνάρτηση $g(x,y) = (1+3x^2y-y^3)^2+(3xy^2-x^3)^2$. Εφαρμόζοντας την αρχή μεγίστου/ελαχίστου για κατάλληλη ακέραια συνάρτηση στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0,\,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, δείξτε ότι

$$\max_{x^2+y^2\leq 1} g(x,y) = g\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = g(0,-1) = 4$$

και

$$\min_{x^2+y^2\leq 1} g(x,y) = g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = g\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = g(0,1) = 0\,.$$

Υπόδειξη. Δείξτε ότι η $f(z) = f(x+iy) = (1+3x^2y-y^3)+i(3xy^2-x^3)$ είναι ακέραια συνάρτηση με $|f(x+iy)|^2 = g(x,y)$.

Λύση. Έστω $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$, όπου $u(x,y) = 1+3x^2y-y^3$ και $v(x,y) = 3xy^2-x^3$. Επειδή οι u,v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$ και ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann, η f είναι ακέραια συνάρτηση με

$$f(z) = u(z,0)+iv(z,0) = 1-iz^3 \quad \text{και} \quad |f(z)|^2 = (1+3x^2y-y^3)^2+(3xy^2-x^3)^2 = g(x,y)\,.$$

Επειδή η f δεν μηδενίζεται στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1)$, από την αρχή μεγίστου/ελαχίστου η $|f|$ και κατά συνέπεια η $|f|^2$ θα παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο του $D(0,\,1)$ που είναι ο κύκλος $|z| = 1$. Για κάθε z στο μοναδιαίο κύκλο $|z| = 1$ έχουμε

$$|f(z)|^2 = |1-iz^3|^2 \leq |1+|iz|^3|^2 = 4$$

και επομένως $\max_{|z|=1}|f(z)|^2 = 4$ αν και μόνο αν $iz^3 = -1 \Leftrightarrow z^3 = i = e^{i\pi/2}$. Δηλαδή $z_k = e^{(2k\pi i+i\pi/2)/3}$, $k = 0,1,2$. Είναι

$$z_0 = e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}\,, z_1 = e^{i5\pi/6} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \;\text{ και }\; z_2 = e^{i3\pi/2} = -i\,.$$

Άρα,

$$\max_{x^2+y^2\leq 1} g(x,y) = g\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = g(0,-1) = 4\,.$$

Είναι $\min_{|z|=1}|f(z)| = 0$ αν και μόνο αν $iz^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 = -i = e^{-i\pi/2}$. Δηλαδή $z_k = e^{(2k\pi i-i\pi/2)/3}$, $k = 0,1,2$. Είναι

$$z_0 = e^{-i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}\,, z_1 = e^{i\pi/2} = i \;\text{ και }\; z_2 = e^{i7\pi/6} = \frac{-\sqrt{3}-i}{2}$$

και επομένως

$$\min_{x^2+y^2\leq 1} g(x,y) = g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = g\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = g(0,1) = 0\,.$$

■

9. Έστω $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στον τόπο G με $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in G$. Έστω $z_0 \in G$ και υποθέτουμε ότι $f(z_0) \neq 0$. Αν $D(z_0, \delta) \subseteq G$ είναι μια περιοχή του z_0, δείξτε ότι υπάρχουν $z_1, z_2 \in D(z_0, \delta)$ τέτοια ώστε

$$|f(z_1)| > |f(z_0)| \quad \text{και} \quad |f(z_2)| < |f(z_0)|\,.$$

Λύση. Επειδή $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in G$, η αναλυτική συνάρτηση f δεν είναι σταθερή στο G και επομένως από την αρχή μεγίστου η $|f|$ δεν έχει τοπικό μέγιστο στο $z_0 \in G$. Τότε, σε οποιαδήποτε περιοχή του z_0 και ειδικά στην περιοχή $D(z_0, \delta)$ υπάρχει z_1 με $|f(z_1)| > |f(z_0)|$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής με $f(z_0) \neq 0$, υπάρχει περιοχή $D(z_0, \delta_1) \subseteq D(z_0, \delta)$ τέτοια ώστε $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0, \delta_1)$. Τότε από την αρχή ελαχίστου η $|f|$ δεν έχει τοπικό ελάχιστο στο $z_0 \in D(z_0, \delta_1)$. Επομένως υπάρχει $z_2 \in D(z_0, \delta_1) \subseteq D(z_0, \delta)$ με $|f(z_2)| < |f(z_0)|$. ■

3η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Έστω $f : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο $G \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $z_0 \in G$ ρίζα τάξης $n \geq 1$ της f. Τότε υπάρχει αναλυτική συνάρτηση $g : G \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \quad \text{με } g(z_0) \neq 0\,. \tag{1.3}$$

   (i) Δείξτε ότι υπάρχει περιοχή $D(z_0, \delta) \subseteq G$ του z_0, ώστε $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0, \delta)$.

   (ii) Δείξτε ότι η f έχει n-οστή αναλυτική ρίζα στο $D(z_0, \delta)$, δηλαδή ότι υπάρχει αναλυτική συνάρτηση ϕ στην περιοχή $D(z_0, \delta)$ του z_0 ώστε

$$f(z) = \phi(z)^n\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0, \delta) \subseteq G\,.$$

Λύση.

(i) Επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο z_0 με $g(z_0) \neq 0$, για $\varepsilon = |g(z_0)|/2$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \in G$ με $z \in D(z_0, \delta)$, δηλαδή $|z - z_0| < \delta$, να ισχύει $|g(z) - g(z_0)| < |g(z_0)|/2$. Επειδή το G είναι ανοικτό σύνολο, παίρνουμε το $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε $D(z_0, \delta) \subseteq G$. Τότε για κάθε $z \in D(z_0, \delta)$ έχουμε

$$||g(z)| - |g(z_0)|| \leq |g(z) - g(z_0)| < |g(z_0)|/2$$

και κατά συνέπεια

$$|g(z_0)| - |g(z_0)|/2 < |g(z)| < |g(z_0)| + |g(z_0)|/2 \Leftrightarrow |g(z_0)|/2 < |g(z)| < 3|g(z_0)|/2\,.$$

Επομένως $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0, \delta) \subseteq G$.

(ii) Επειδή το $D(z_0, \delta)$ είναι ένας απλά συνεκτικός τόπος στον οποίο η αναλυτική συνάρτηση g δεν μηδενίζεται, από γνωστή πρόταση (παραπέμπουμε στο [9]) υπάρχει αναλυτική συνάρτηση h στο $D(z_0, \delta)$, ώστε $g(z) = h(z)^n$ για κάθε $z \in D(z_0, \delta)$. Επομένως από την (1.3) έχουμε

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) = ((z - z_0)h(z))^n\ , \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0, \delta)\,.$$

Άρα,

$$f(z) = \phi(z)^n\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0, \delta)\,,$$

όπου η συνάρτηση $\phi(z) := (z - z_0)h(z)$ είναι αναλυτική στο $D(z_0, \delta) \subseteq G$.

■

2. Για ποια $a \in \mathbb{C}$ υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1)$, ώστε

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+a}\,, \quad \text{για κάθε φυσικό αριθμό } n \geq 2\,;$$

Λύση. Υποθέτουμε ότι

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+a} = \frac{1/n}{1+a/n}\,, \quad \text{για κάθε φυσικό αριθμό } n \geq 2\,.$$

Αν $g(z) := \frac{z}{1+az}$, τότε $f(1/n) = g(1/n)$ για κάθε $n \geq 2$ με $\lim_{n\to 0} 1/n = 0 \in D(0,1)$. Επομένως το σύνολο $\{z \in D(0,1) : f(z) = g(z)\}$ έχει σημείο συσσώρευσης ($\sigma.\sigma$) στο $D(0,1)$

και από το θεώρημα μοναδικότητας $f(z) = \frac{z}{1+az}$ για κάθε $z \in D(0,1)$. Επειδή

$$f(z) = \begin{cases} \left(\frac{1}{z} + a\right)^{-1} & \text{αν } z \neq 0 \\ 0 & \text{αν } z = 0\,, \end{cases}$$

για να είναι f αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1)$ θα πρέπει να είναι $|a| \leq 1$. ■

3. Να βρεθεί η σειρά(ανάπτυγμα) Laurent της

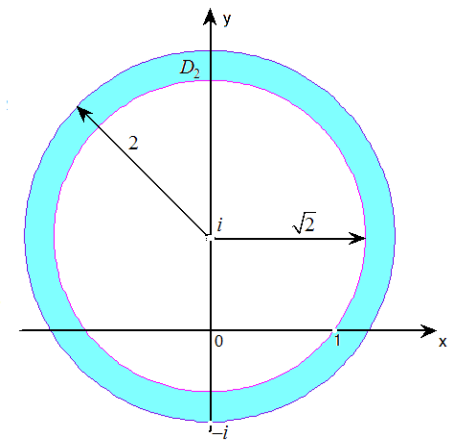
$$f(z) = -\frac{2z}{(z-1)^2(z^2+1)} = -\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z^2+1}$$

με κέντρο το $z_0 = i$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $\sqrt{3}+i$.

Λύση. Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι: 1 και $\pm i$. Επομένως το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το i μπορεί να γίνει στους δακτυλίους $\Delta_1 = \left\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < \sqrt{2}\right\}$, $\Delta_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2} < |z-i| < 2\right\}$ και $\Delta_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$. Επειδή το

$$\sqrt{3}+i \in \left\{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2} < |z-i| < 2\right\}\,,$$

θα αναπτύξουμε την f στο δακτύλιο Δ_2 που είναι ο μεγαλύτερος δακτύλιος που περιέχει το σημείο $\sqrt{3}+i$.



Ως γνωστόν

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n\,, \quad |w| < 1\,. \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά παίρνουμε

$$-\frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n w^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n w^{n-1}\,, \quad |w| < 1\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-i)(z+i)} \\
&= -\frac{1}{((z-i)+(i-1))^2} + \frac{1}{(z-i)\left((z-i)+2i\right)} \\
&= -\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{i-1}{z-i}\right)^2} + \frac{1}{2i(z-i)}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} \\
&= -\frac{1}{(z-i)^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\left(\frac{i-1}{z-i}\right)^{n-1} + \frac{1}{2i(z-i)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^n \\
&\qquad\qquad (\left|\tfrac{i-1}{z-i}\right| < 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} < |z-i| \text{ και } \left|\tfrac{z-i}{2i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-i| < 2) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(i-1)^{n-1}\frac{1}{(z-i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2i)^{n+1}}(z-i)^{n-1} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-1)(i-1)^{n-2}\frac{1}{(z-i)^n} + \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z-i} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2i)^{n+1}}(z-i)^{n-1} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^n(n+1)(i-1)^{-n-2}(z-i)^n + \frac{1}{2i}(z-i)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2i)^{n+2}}(z-i)^n\,.
\end{aligned}$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα ισχύει στο δακτύλιο $\Delta_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2} < |z-i| < 2\right\}$ που είναι ο μεγαλύτερος δυνατός δακτύλιος που περιέχει το σημείο $\sqrt{3}+i$. ■

4. Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ και $R > 0$, υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι αναλυτικές στο διάτρητο δίσκο

$$D'(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} :\ 0 < |z - z_0| < R\}\,.$$

Αν το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f και πόλος της g, δείξτε ότι το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f/g.

Λύση. Έστω το z_0 είναι πόλος τάξης $k \in \mathbb{N}$ της g. Τότε,

$$g(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^k}\,,\ \text{όπου } h \text{ αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο } |z-z_0| < R \text{ με } h(z_0) \neq 0\,.$$

(i) Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f/g. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την f/g στο z_0 έτσι ώστε η f/g να είναι αναλυτική στο στο δίσκο $|z - z_0| < R$. Επειδή

$$f(z) = \frac{f(z)}{g(z)}g(z) = \frac{\left(f(z)/g(z)\right)h(z)}{(z-z_0)^k}\,,$$

το z_0 είναι είτε πόλος ή επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f(άτοπο).

(ii) Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι πόλος τάξης $m \in \mathbb{N}$ της f/g. Τότε

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{H(z)}{(z-z_0)^m}\,,$$ όπου H αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο $|z-z_0| < R$ με $H(z_0) \neq 0$.

Επειδή

$$f(z) = \frac{f(z)}{g(z)} g(z) = \frac{H(z)h(z)}{(z-z_0)^{m+k}}\,,$$

όπου $w = H(z)h(z)$ αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο $|z-z_0| < R$ με $H(z_0)h(z_0) \neq 0$, το z_0 είναι πόλος τάξης $m+k$ της f(άτοπο).

Άρα το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f/g. ■

5. Να βρεθούν όλες οι αναλυτικές συναρτήσεις $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ώστε

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^{3/2}}\,, \quad \text{για κάθε } |z| > 0\,.$$

Υπόδειξη. Θεωρείστε τη συνάρτηση $g(z) := z^2 f(z)$.

Λύση. Είναι

$$\lim_{z\to 0} |z^2 f(z)| \leq \lim_{z\to 0} |z|^{1/2} = 0\,,$$

δηλαδή $\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = 0$ και κατά συνέπεια το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της $g(z) := z^2 f(z)$. Επομένως η g επεκτείνεται σε ακέραια συνάρτηση. Επειδή

$$|z^2 f(z)| \leq |z|^{1/2}\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,,$$

από τη γενίκευση του θεωρήματος Liouville η $g(z) = z^2 f(z)$ είναι πολυώνυμο βαθμού 0, δηλαδή σταθερή. Έστω $g(z) = z^2 f(z) = c$. Όμως $\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = 0 \Rightarrow c = 0$ και άρα η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. ■

6. Αν $r > 1$, δείξτε ότι

$$\oint_{|z|=r} \frac{\Re z}{z(z-1)}\, dz = \pi i\,.$$

Λύση. Αν $z = x + iy \in C(0, r)$, τότε

$$\Re z = x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}(z + r^2 z^{-1})\,. \qquad (|z| = r \Leftrightarrow |z|^2 = r^2 \Leftrightarrow z\overline{z} = r^2 \Leftrightarrow \overline{z} = r^2 z^{-1})$$

2ος τρόπος: Αν $z = re^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, τότε

$$\Re z = r\cos\theta = \frac{r}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}(z + r^2 z^{-1})\,.$$

Επομένως,

$$\oint_{|z|=r} \frac{\Re z}{z(z-1)}\,dz = \frac{1}{2}\oint_{|z|=r} \frac{z+r^2z^{-1}}{z(z-1)}\,dz = \frac{1}{2}\oint_{|z|=r} \frac{z^2+r^2}{z^2(z-1)}\,dz\,.$$

Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία 0 και 1 της συνάρτησης $f(z) = \frac{z^2+r^2}{z^2(z-1)}$ βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $|z| = r$, $r > 1$. Επειδή το 0 είναι πόλος τάξης 2 και το 1 είναι απλός πόλος της f, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=r} \frac{\Re z}{z(z-1)}\,dz &= \frac{1}{2}2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\frac{z^2+r^2}{z^2(z-1)}\,,\,0\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{z^2+r^2}{z^2(z-1)}\,,\,1\right)\right]\\ &= \pi i\left[\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{z^2+r^2}{z^2(z-1)}\right)' + \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^2+r^2}{z^2(z-1)}\right]\\ &= \pi i\left[\lim_{z\to 0}\frac{z^2-2z-r^2}{(z-1)^2} + \lim_{z\to 1}(1+r^2z^{-2})\right]\\ &= \pi i[-r^2+1+r^2] = \pi i\,.\end{aligned}$$

■

7. Έστω $\dfrac{z}{\tan z} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{z}{\tan z}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \pi < |z| < 2\pi\} \text{ με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \le 0$.

Λύση. Τα $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f. Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z/\tan z}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z^{-n}}{\tan z}\,dz\,,$$

όπου ο κύκλος $|z| = r$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $\pi < r < 2\pi$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ.

(i) <u>$n = 0$:</u> Σ' αυτή την περίπτωση τα σημεία $-\pi$, 0 και π είναι απλοί πόλοι της $g(z) = \frac{1}{\tan z}$ και βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1}{\tan z}\,dz &= \mathrm{Res}\left(\frac{1}{\tan z},\,-\pi\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{\tan z},\,0\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{\tan z},\,\pi\right)\\ &= \left.\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right|_{z=-\pi} + \left.\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right|_{z=0} + \left.\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right|_{z=\pi} = 3\,.\end{aligned}$$

(ii) $\underline{n \leq -1}$: Σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$g(z) = \frac{z^{-n}}{\tan z} = \frac{z^{-n}\cos z}{\sin z}\,, \quad \text{με } -n \geq 1\,.$$

Τα σημεία $\pm\pi$ είναι απλοί πόλοι της g ενώ το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z^{-n}}{\tan z}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n}}{\tan z}, -\pi\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n}}{\tan z}, \pi\right) \\
&= \left.\frac{z^{-n}\cos z}{(\sin z)'}\right|_{z=-\pi} + \left.\frac{z^{-n}\cos z}{(\sin z)'}\right|_{z=\pi} \\
&= (-\pi)^{-n} + \pi^{-n} \\
&= \begin{cases} 2\pi^{-n} & \text{αν } -n \text{ άρτιος} \\ 0 & \text{αν } -n \text{ περιττός}\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

■

8. Υπολογίστε το τριγωνομετρικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{(3\cos\theta + 5)^2}\,d\theta = \Re\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{(3\cos\theta+5)^2}\,d\theta\right)\,.$$

Λύση. Αν $z = e^{i\theta}$, τότε $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ και $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \Leftrightarrow d\theta = \dfrac{dz}{iz}$. Επομένως

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{(3\cos\theta+5)^2}\,d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{z^2}{iz\left(\frac{3}{2}(z+1/z)+5\right)^2}\,dz = \frac{4}{i}\oint_{|z|=1} \frac{z^3}{(3z+1)^2(z+3)^2}\,dz\,.$$

Τα σημεία $-1/3$ και -3 είναι πόλοι τάξης 2 της συνάρτησης $f(z) = \frac{z^3}{(3z+1)^2(z+3)^2}$. Το $-1/3$ βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$, ενώ το -3 βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $|z| = 1$. Επομένως, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
I &= \frac{4}{i}\oint_{|z|=1} \frac{z^3}{(3z+1)^2(z+3)^2}\,dz \\
&= \frac{4}{i}2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^3}{(3z+1)^2(z+3)^2}, -\frac{1}{3}\right) \\
&= 8\pi \lim_{z\to -1/3}\left((z+1/3)^2\cdot\frac{z^3}{(3z+1)^2(z+3)^2}\right)' \\
&= \frac{8\pi}{9}\lim_{z\to -1/3}\left(\frac{z^3}{(z+3)^2}\right)' \\
&= \frac{8\pi}{9}\lim_{z\to -1/3}\frac{z^2(z+9)}{(z+3)^3} = \frac{13\pi}{288}\,.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{(3\cos\theta+5)^2}\,d\theta = \Re\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{(3\cos\theta+5)^2}\,d\theta\right) = \frac{13\pi}{288}\,.$$

■

9. Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4i}\,dx\,.$$

Λύση. Η λύση της εξίσωσης

$$z^2+4i=0 \Leftrightarrow z^2=-4i=4e^{-i\pi/2} \text{ είναι } z_k=2e^{(2k\pi i-i\pi/2)/2}\,,\ k=0,1\,.$$

Δηλαδή $z_0=2e^{-i\pi/4}=2(\cos(\pi/4)-i\sin(\pi/4))=\sqrt{2}(1-i)$ και $z_1=2e^{i3\pi/4}=2(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))=\sqrt{2}(-1+i)$. Τα σημεία z_0 και z_1 είναι απλοί πόλοι της $f(z)=\frac{1}{z^2+4i}$. Το $z_1=\sqrt{2}(-1+i)$ βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο και είναι

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+4i},\sqrt{2}(-1+i)\right)=\left.\frac{1}{(z^2+4i)'}\right|_{z=\sqrt{2}(-1+i)}=\frac{1}{2\sqrt{2}(-1+i)}=-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)\,.$$

Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελείται από το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου γ_R, με εξίσωση $z(\theta)=Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[-R,R]$. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο έτσι ώστε το ανώμαλο σημείο $z_1=\sqrt{2}(-1+i)$ της f να βρίσκεται στο εσωτερικό του ημικύκλιου γ_R. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+4i}\,dx+\int_{\gamma_R}\frac{1}{z^2+4i}\,dz=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+4i},\sqrt{2}(-1+i)\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}(1-i)\,. \tag{1.4}$$

Η συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{z^2+4i}$ είναι πηλίκο των πολυωνύμων $P(z)=1$ και $Q(z)=z^2+4i$. Επειδή

$$\text{βαθμός } Q(z) = \text{ βαθμός } P(z)+2\,,$$

τότε από γνωστό λήμμα $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{1}{z^2+4i}=0$. Επομένως από τη (2.7) προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+4i}\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+4i}\,dx=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}(1-i)\,.$$

■

1.4 Ακαδημαϊκό έτος 2012–13

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Να βρεθούν οι τετραγωγικές ρίζες του $\sqrt{3}+3i$, δηλαδή να λυθεί η εξίσωση $z^2=\sqrt{3}+3i$.

   Λύση. Είναι $|\sqrt{3}+3i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2} = \sqrt{12}$. Επειδή $\tan\theta = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \theta = \arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$, οι λύσεις της εξίσωσης $z^2=\sqrt{3}+3i$ είναι

   $$z_k = 12^{1/4}e^{(2k\pi i+\pi i/3)/2}\,, \quad k=0,1\,.$$

   Επομένως οι τετραγωγικές ρίζες του $\sqrt{3}+3i$ είναι

   $$z_0 = \sqrt[4]{12}(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6)) = \frac{\sqrt[4]{12}}{2}(\sqrt{3}+i)$$

   και

   $$z_1 = \sqrt[4]{12}(\cos(7\pi/6)+i\sin(7\pi/6)) = -\frac{\sqrt[4]{12}}{2}(\sqrt{3}+i)\,.$$

   ■

2. Αν z είναι μία n-οστή ρίζα της μονάδας, $z\neq 1$, δείξτε ότι

   $$1+2z+3z^2+\cdots+nz^{n-1} = \frac{n}{z-1}\,.$$

   Λύση. Από την ταυτότητα

   $$1-z^{n+1} = (1-z)(1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n)$$

   έχουμε

   $$1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}\,, \quad z\neq 1\,.$$

   Παραγωγίζοντας παίρνουμε

   $$\begin{aligned} 1+2z+3z^2+\cdots+nz^{n-1} &= \frac{-(n+1)z^n(1-z)+1-z^{n+1}}{(1-z)^2} \\ &= \frac{-(n+1)(1-z)+1-z}{(1-z)^2} && (z^n=1) \\ &= \frac{n}{z-1}\,. \end{aligned}$$

   ■

3. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι

$$\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n = \frac{1+i\tan n\theta}{1-i\tan n\theta}\,, \quad \theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\,, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n &= \left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\right)^n \\ &= \frac{\cos n\theta+i\sin n\theta}{\cos n\theta-i\sin n\theta} && \text{(τύπος de Moivre)} \\ &= \frac{1+i\tan n\theta}{1-i\tan n\theta}\,.\end{aligned}$$

■

4. Να βρεθεί το χωρίο $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| > |z-1|\}$.

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}|z+i| > |z-1| &\Leftrightarrow |z+i|^2 > |z-1|^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + 2\Re(z\bar{i}) + 1 > |z|^2 - 2\Re z + 1 \\ &\Leftrightarrow \Re(z - iz) > 0 \\ &\Leftrightarrow x + y > 0 \Leftrightarrow y > -x\,. && (z - iz = x + y + i(y-x))\end{aligned}$$

Επομένως το χωρίο Ω είναι το ημιεπίπεδο πάνω από την ευθεία $y = -x$. ■

5. Αν $a > 0$, $a \neq 1$ και $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_1 \neq z_2$, αποδείξτε ότι η καμπύλη

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| = a|z - z_2|\}$$

είναι ο κύκλος $|z - z_0| = R$

$$\text{με κέντρο } z_0 = \frac{z_1 - a^2 z_2}{1 - a^2} \text{ και ακτίνα } R = \frac{a}{|1-a^2|}|z_1 - z_2|\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}|z-z_1| = a|z-z_2| &\Leftrightarrow |z-z_1|^2 > a^2|z-z_2|^2\\ &\Leftrightarrow |z|^2+|z_1|^2-2\Re(z\overline{z_1}) > a^2(|z|^2+|z_2|^2-2\Re(z\overline{z_2}))\\ &\Leftrightarrow |z|^2(1-a^2)-2\Re(z(\overline{z_1}-a^2\overline{z_2})) = a^2|z_2|^2-|z_1|^2\\ &\Leftrightarrow |z|^2-2\Re\left(z\overline{\frac{z_1-a^2z_2}{1-a^2}}\right) = \frac{a^2|z_2|^2-|z_1|^2}{1-a^2}\\ &\Leftrightarrow \left|z-\frac{z_1-a^2z_2}{1-a^2}\right|^2-\left(\frac{|z_1-a^2z_2|}{1-a^2}\right)^2 = \frac{a^2|z_2|^2-|z_1|^2}{1-a^2}\,.\end{aligned}$$

Επομένως η καμπύλη C είναι κύκλος με κέντρο $z_0 = \frac{z_1-a^2z_2}{1-a^2}$ και ακτίνα R με

$$\begin{aligned}R^2 &= \left(\frac{|z_1-a^2z_2|}{1-a^2}\right)^2+\frac{a^2|z_2|^2-|z_1|^2}{1-a^2}\\ &= \frac{(|z_1-a^2z_2|)^2}{(1-a^2)^2}+\frac{(a^2|z_2|^2-|z_1|^2)(1-a^2)}{(1-a^2)^2}\\ &= \frac{1}{(1-a^2)^2}a^2(|z_1^2+|z_2|^2-2\Re(z_1\overline{z_2})) = \left(\frac{a}{|1-a^2|}|z_1-z_2|\right)^2\,.\end{aligned}$$

■

6. Έστω η συνάρτηση

$$F(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-2i\pi xs}\,dx\,,\quad s\in\mathbb{R}\,.$$

Αποδείξτε ότι η F είναι καλά ορισμένη και ότι

$$F(s) = 2\Re\left(\int_0^\infty e^{-x}e^{2i\pi xs}\,dx\right) = \frac{2}{1+4\pi^2s^2}\,.$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-|x|}e^{-2i\pi xs}\right|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 2\,,$$

δηλαδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-2i\pi xs}\,dx$ συγκλίνει απόλυτα και κατά συνέπεια συγκλίνει. Επομένως η συνάρτηση F είναι καλά ορισμένη. Είναι

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-x}e^{-2i\pi xs}\,dx + \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-2i\pi xs}\,dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x}e^{-2i\pi xs}\,dx + \int_0^{\infty} e^{-t}e^{2i\pi ts}\,dt \qquad (\text{αντικατάσταση } x=-t) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x}(e^{2i\pi xs}+e^{-2i\pi xs})\,dx \\ &= 2\int_0^{\infty} e^{-x}\cos 2\pi xs\,dx = 2\Re\left(\int_0^{\infty} e^{-x}e^{2i\pi xs}\,dx\right). \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x}e^{2i\pi xs}\,dx &= \int_0^{\infty} e^{(2i\pi s-1)x}\,dx \\ &= \frac{1}{2i\pi s-1}\int_0^{\infty}\left(e^{(2i\pi s-1)x}\right)'\,dx \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2i\pi s-1}e^{(2i\pi s-1)x} - \frac{1}{2i\pi s-1} = \frac{1}{1-2i\pi s} \end{aligned}$$

και άρα

$$F(s) = 2\Re\left(\int_0^{\infty} e^{-x}e^{2i\pi xs}\,dx\right) = 2\Re\left(\frac{1}{1-2i\pi s}\right) = 2\Re\left(\frac{1+2i\pi s}{1+4\pi^2s^2}\right) = \frac{2}{1+4\pi^2s^2}.$$

<u>*Σημείωση*</u>. Είναι

$$\left|\frac{1}{2i\pi s-1}e^{(2i\pi s-1)x}\right| = \frac{1}{|2i\pi s-1|}e^{-x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

και επομένως $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2i\pi s-1}e^{(2i\pi s-1)x}=0$. ■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Το *σύνορο* του συνόλου $A\subseteq\mathbb{C}$, συμβολίζεται με ∂A, είναι το σύνολο

$$\partial A = \{z\in\mathbb{C} : \text{για κάθε } r>0,\ D(z,r)\cap A\neq\emptyset \text{ και } D(z,r)\cap(\mathbb{C}\setminus A)\neq\emptyset\}.$$

Να αποδειχθεί ότι $z\in\partial A$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (a_n) σημείων του A και ακολουθία (b_n) σημείων του $\mathbb{C}\setminus A$ με $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=z$.

Απόδειξη. Έστω $z\in\partial A$. Τότε

$$D\left(z,\frac{1}{n}\right)\cap A\neq\emptyset \text{ και } D\left(z,\frac{1}{n}\right)\cap(\mathbb{C}\setminus A)\neq\emptyset,\ \text{για κάθε } n\in\mathbb{N}.$$

Έστω $a_n \in D(z,1/n) \cap A$ και $b_n \in D(z,1/n) \cap (\mathbb{C} \setminus A)$, $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία (a_n) σημείων του A είναι τέτοια ώστε $|z - a_n| < 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $a_n \to z$. Παρόμοια η (b_n) είναι ακολουθία σημείων του $\mathbb{C} \setminus A$ με $b_n \to z$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) σημείων του A και ακολουθία (b_n) σημείων του $\mathbb{C} \setminus A$ με $a_n, b_n \to z$. Έστω $r > 0$.

Επειδή $a_n \to z$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - z| < r$ για κάθε $n \geq n_1$. Επομένως $D(z,r) \cap A \neq \emptyset$.

Επειδή $b_n \to z$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|b_n - z| < r$ για κάθε $n \geq n_2$. Επομένως $D(z,r) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset$.

Άρα το $z \in \partial A$. $\square$

2. Έστω D_1 και D_2 δύο τόποι(ανοικτά και συνεκτικά σύνολα) του $\mathbb{C}$. Αν $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, με κατάλληλο αντιπαράδειγμα δείξτε ότι το $D_1 \cap D_2$ δεν είναι κατανάγκη ένας τόπος του $\mathbb{C}$.

Λύση. Έστω ο δακτύλιος $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}$ και η λωρίδα $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \Re z < 1\}$. Τα D_1, D_2 είναι ανοικτά συνεκτικά σύνολα. Όμως το $D_1 \cap D_2$ είναι η ένωση δύο ανοικτών συνεκτικών συνόλων ξένων μεταξύ τους και επομένως δεν είναι ένας τόπος του $\mathbb{C}$. $\blacksquare$

3. Έστω η συνάρτηση $f(z) = f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$. Δείξτε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$ ενώ δεν υπάρχει η παράγωγος $f'(0)$.

Λύση. Για $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, είναι

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \frac{0}{x} = 0$$

και επομένως

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0\,.$$

Παρόμοια, για $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, είναι

$$\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \frac{0}{y} = 0$$

και επομένως

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0\,.$$

Άρα $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, δηλαδή ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Παρατηρούμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, είναι

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{f(x+iy)}{x+iy} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x+iy}\,.$$

Αν $z = x + i\lambda x \in \mathbb{C}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda, x \neq 0$, τότε

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{|x|\sqrt{|\lambda|}}{x(1+\lambda i)}\,.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\sqrt{|\lambda|}}{x(1+\lambda i)} = \frac{\sqrt{|\lambda|}}{1+\lambda i} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sqrt{|\lambda|}}{x(1+\lambda i)} = -\frac{\sqrt{|\lambda|}}{1+\lambda i}\,,$$

το όριο

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x+i\lambda x}}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|\sqrt{|\lambda|}}{x(1+\lambda i)}$$

δεν υπάρχει. Άρα η παράγωγος $f'(0)$ δεν υπάρχει. ∎

4. Να βρεθούν όλα τα σημεία του $\mathbb{C}$ στα οποία η

$$f(z) = x^3 + y + i(-x - y^3 + 3y)$$

είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγος. Σε ποια σημεία του $\mathbb{C}$ είναι η f αναλυτική;

Λύση. Είναι $f(z) = u(x,y) + i(x,y)$ με $u(x,y) = x^3 + y$ και $v(x,y) = -x - y^3 + 3y$. Οι συναρτήσεις u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$ θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann. Έχουμε

$$\left\{\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3x^2 &= -3y^2+3 \\ 1 &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \{x^2+y^2=1 \Leftrightarrow |z|=1\}\,.$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία του μοναδιαίου κύκλου με παράγωγο

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 3x^2 - i\,, \quad -1 \leq x \leq 1\,.$$

Προφανώς η f δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$. ∎

5. Έστω η συνάρτηση f είναι αναλυτική(ολόμορφη) στον τόπο G του $\mathbb{C}$ και έστω $g(z) = e^{f(z)}$. Αν η g είναι σταθερή στο G, τί συμπεραίνετε για τη συνάρτηση f;

Λύση. Είναι $g'(z) = f'(z)e^{f(z)}$. Επειδή η g είναι σταθερή στο G, $f'(z)e^{f(z)} = 0$ και κατά συνέπεια $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in G$. Άρα από γνωστή πρόταση η f είναι σταθερή στον τόπο G. ■

6. Έστω $f = u + iv$ ακέραια(αναλυτική σ' όλο το $\mathbb{C}$) συνάρτηση τέτοια ώστε $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι

$$f(z) = icz + d\,, \quad \text{όπου } c \in \mathbb{R} \text{ και } d \in \mathbb{C}\,.$$

Λύση. Ως γνωστόν η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$. Είναι

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)\,.$$

Επειδή $\Re f'(z) = 0$, από γνωστή πρόταση η f' είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$, έστω $f'(z) = c$. Τότε

$$f(z) = cz + d = (c_1 + ic_2)(x + iy) + d_1 + id_2 = c_1x - c_2y + d_1 + i(c_1y + c_2x + d_2)\,.$$

Όμως $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0$ συνεπάγεται ότι $c_1 = 0$ και άρα

$$f(z) = -c_2y + d_1 + i(c_2x + d_2) = ic_2(x + iy) + d_1 + id_2 = ic_2z + d\,, \quad \text{όπου } c_2 \in \mathbb{R} \text{ και } d \in \mathbb{C}\,.$$

■

7. Υποθέτουμε ότι οι πραγματικές συναρτήσεις $u = u\,(x, y)$ και $v = v\,(x, y)$ είναι αρμονικές στο ανοικτό σύνολο A του $\mathbb{C}$. Αν

$$U = u_x u_y + v_x v_y \quad \text{και} \quad V = \frac{1}{2}\left(u_x^2 + v_x^2 - u_y^2 - v_y^2\right)\,,$$

να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $F = U + iV$ είναι αναλυτική(ολόμορφη) στο A.

Λύση. Οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης στο A με $u_{xx} + u_{yy} = 0$ και $v_{xx} + v_{yy} = 0$. Είναι

$$\begin{aligned} U_x &= u_{xx}u_y + u_x u_{yx} + v_{xx}v_y + v_x v_{yx} \\ &= -u_{yy}u_y + u_x u_{yx} - v_{yy}v_y + v_x v_{yx} \\ &= u_x u_{xy} + v_x v_{xy} - u_y u_{yy} - v_y v_{yy} = V_y \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} U_y &= u_{xy}u_y + u_x u_{yy} + v_{xy}v_y + v_x v_{yy} \\ &= u_{xy}u_y - u_x u_{xx} + v_{xy}v_y - v_x v_{xx} \\ &= -\left(u_x u_{xx} + v_x v_{xx} - u_y u_{yx} - v_y v_{yx}\right) = -V_x\,. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $F = U + iV$ είναι αναλυτική στο A επειδή έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann. ∎

8. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x,y) = e^{-2xy}\sin(x^2 - y^2)$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Στη συνέχεια να βρεθεί η ακέραια(αναλυτική σ' όλο το $\mathbb{C}$) συνάρτηση f με $\Re f = u$ και η συζυγής αρμονική v της u.

Λύση. Η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης στο $\mathbb{R}^2$ με

$$u_x = -2ye^{-2xy}\sin(x^2 - y^2) + 2xe^{-2xy}\cos(x^2 - y^2)$$

και

$$u_y = -2xe^{-2xy}\sin(x^2 - y^2) - 2ye^{-2xy}\cos(x^2 - y^2)\,.$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι $u_{xx} + u_{yy} = 0$ και επομένως η u είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$.
Επειδή ως γνωστόν

$$f'(z) = u_x(z,0) - iu_y(z,0) = 2z\cos z^2 - i2z\sin z^2\,,$$

έχουμε

$$f(z) = \sin z^2 + i\cos z^2\,.$$

Είναι

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) \\ &= \sin(x+iy)^2 + i\cos(x+iy)^2 \\ &= \sin(x^2 - y^2 + i2xy) + i\cos(x^2 - y^2 + i2xy) \\ &= \big(\sin(x^2-y^2)\cosh 2xy + i\cos(x^2-y^2)\sinh 2xy\big) \\ &\quad + i\,\big(\cos(x^2-y^2)\cosh 2xy - i\sin(x^2-y^2)\sinh 2xy\big) \\ &= (\cosh 2xy + \sinh 2xy)\sin(x^2-y^2) + i(\cosh 2xy + \sinh 2xy)\cos(x^2-y^2) \end{aligned}$$

και επομένως η συζυγής αρμονική της u είναι η

$$v(x,y) = \Im f(z) = (\cosh 2xy + \sinh 2xy)\cos(x^2 - y^2)\,.$$

■

9. (α') Έστω H το άνω ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου, δηλαδή $H = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ και έστω $f(z) = e^{2\pi i z}$. Ποια είναι η εικόνα $f(H)$; Είναι το $f(H)$ απλά συνεκτικό σύνολο;

   (β') Έστω $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση, όπου U είναι ένα απλά συνεκτικό ανοικτό σύνολο. Είναι το $f(U)$ απλά συνεκτικό σύνολο;

Λύση.

(α') Αν $y = 0$, τότε $f(z) = e^{i2\pi x}$ με $x \in \mathbb{R}$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος $|w| = 1$. Δηλαδή το σύνορο $y = 0$ του H απεικονίζεται στο μοναδιαίο κύκλο.

Αν $z = x + iy_0$ με $x \in \mathbb{R}$ και $\Im z = y_0 > 0$, τότε

$$f(z) = e^{-2\pi y_0} e^{i2\pi x}\,.$$

Δηλαδή η ευθεία $y = y_0 > 0$ απεικονίζεται στον κύκλο $|w| = R = e^{-2\pi y_0}$. Καθώς το $0 < y_0 < \infty$ μεταβάλλεται, οι εικόνες των ευθυγράμμων τμημάτων $y = y_0$, $x \in \mathbb{R}$, που είναι κύκλοι με κέντρο το 0, θα καλύπτουν το μοναδιαίο δίσκο εκτός από την αρχή των αξόνων(είναι $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$). Άρα το $f(H)$ είναι ο διάτρητος μοναδιαίος δίσκος $D(0,1) \setminus \{0\}$. Το $f(H)$ δεν απλά συνεκτικό σύνολο.

(β') Από το (α') έπεται ότι αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική, η εικόνα $f(U)$ ενός απλά συνεκτικού ανοικτού συνόλου U δεν είναι κατανάγκη απλά συνεκτικό σύνολο.

■

10. Στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{y\to 0}\,[\log(a+iy) - \log(a-iy)]$$

αν (i) $a > 0$ και (ii) $a < 0$.

Λύση. (i) Έστω $a > 0$. Τότε για μικρό $y > 0$ είναι

$$a + iy = \sqrt{a^2+y^2}e^{i\theta(y)} \text{ και } a - iy = \sqrt{a^2+y^2}e^{i(2\pi-\theta(y))} \text{ με } 0 < \theta(y) < \frac{\pi}{2}\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to 0}\left[\log(a+iy)-\log(a-iy)\right]\\
&=\lim_{y\to 0}\left[\left(\ln\sqrt{a^2+y^2}+i\theta(y)\right)-\left(\ln\sqrt{a^2+y^2}+i(2\pi-\theta(y))\right)\right]\\
&=-2\pi i+2i\lim_{y\to 0}\theta(y)=-2\pi i\,.
\end{aligned}$$

(ii) Έστω $a<0$. Για μικρό $y>0$ είναι

$$a+iy=\sqrt{a^2+y^2}e^{i(\pi-\theta(y))}\text{ και }a-iy=\sqrt{a^2+y^2}e^{i(\pi+\theta(y))}\text{ με }0<\theta(y)<\frac{\pi}{2}$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to 0}\left[\log(a+iy)-\log(a-iy)\right]\\
&=\lim_{y\to 0}\left[\left(\ln\sqrt{a^2+y^2}+i(\pi-\theta(y))\right)-\left(\ln\sqrt{a^2+y^2}+i(\pi+\theta(y))\right)\right]=-2i\lim_{y\to 0}\theta(y)=0\,.
\end{aligned}$$

■

3η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Αποδείξτε ότι $|\sin z^2|\le e$, για κάθε $|z|=1$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι

$$\left|\oint_{|z|=1}e^{2\bar{z}}\sin z^2\,dz\right|\le 2\pi e^3\,.$$

Λύση. Για κάθε $|z|=1$ είναι

$$|\sin z^2|=\left|\frac{e^{iz^2}-e^{-iz^2}}{2i}\right|\le\frac{|e^{iz^2}|+|e^{-iz^2}|}{2}\le\frac{e^{|z|^2}+e^{|z|^2}}{2}=e$$

και $|e^{2\bar{z}}|\le e^{2|\bar{z}|}=e^2$. Επομένως στο μοναδιαίο κύκλο $|z|=1$ είναι

$$\left|e^{2\bar{z}}\sin z^2\right|=\left|e^{2\bar{z}}\right||\sin z^2|\le e^3$$

και άρα

$$\left|\oint_{|z|=1}e^{2\bar{z}}\sin z^2\,dz\right|\le e^3\times(\text{μήκος του μοναδιαίου κύκλου})=2\pi e^3\,.$$

■

2. Αν γ είναι τμηματικά λεία καμπύλη στο άνω ημιεπίπεδο με αρχή το -1 και πέρας το 1, χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα ολοκλήρωσης αποδείξτε ότι

$$\int_\gamma z^i\, dz = \frac{1+e^{-\pi}}{2}(1-i)\,.$$

Σημείωση. Είναι $z^i = \exp(i \log z)$, όπου $\log z = \ln|z| + i\theta$ με $\theta = \arg z$ και $-\pi/2 < \theta < 3\pi/2$, αναλυτικός κλάδος λογαρίθμου στο $\mathbb{C} \setminus \{iy : y \le 0\}$.

Λύση. Επειδή

$$(z^{1+i})' = (e^{(1+i)\log z})' = \frac{1+i}{z} e^{(1+i)\log z} = \frac{1+i}{z} z^{1+i} = (1+i) z^i\,,$$

για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{iy : y \le 0\}$, από το θεμελιώδες θεώρημα ολοκλήρωσης έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z^i\, dz &= \frac{1}{1+i} \int_\gamma (z^{1+i})'\, dz \\
&= \frac{1}{1+i}\; z^{1+i}\Big|_{z=-1}^{z=1} \\
&= \frac{1}{1+i}(1-(-1)^{1+i}) \\
&= \frac{1}{1+i}(1-e^{(1+i)\log(-1)}) \\
&= \frac{1}{1+i}(1-e^{(1+i)i\pi}) \\
&= \frac{1}{1+i}(1-e^{i\pi}e^{-\pi}) = \frac{1}{1+i}(1+e^{-\pi}) = \frac{1+e^{-\pi}}{2}(1-i)\,.
\end{aligned}$$

■

3. Χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τύπους Cauchy υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{e^{z^2}}{(z-1)(z^2-1)}\, dz\,,$$

όπου η κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη γ με θετική φορά διαγραφής δεν διέρχεται από τα σημεία $z=-1$ και $z=1$. Εξετάστε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

Λύση. (i) Η καμπύλη γ δεν περιέχει τα σημεία -1 και 1. Από το θεώρημα Cauchy $I = 0$.

(iii) Η καμπύλη γ περιέχει μόνο το σημείο -1. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{e^{z^2}/(z-1)^2}{z+1}\, dz = \left.\frac{e^{z^2}}{(z-1)^2}\right|_{z=-1} = \frac{e}{4}\,.$$

(ii) Η καμπύλη γ περιέχει μόνο το σημείο 1. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{1!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{z^2}/(z+1)}{(z-1)^2}\,dz \\ &= \left(\frac{e^{z^2}}{z+1}\right)'\Bigg|_{z=1} = \frac{e^{z^2}(2z^2+2z-1)}{(z+1)^2}\Bigg|_{z=1} = \frac{3e}{4}\,. \end{aligned}$$

(iv) Η καμπύλη γ περιέχει τα σημεία -1 και 1. Έστω C_1 και C_2 δύο κύκλοι που δεν τέμνονται και βρίσκονται εσωτερικά της καμπύλης γ, έτσι ώστε ο C_1 περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο -1 και ο C_2 περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο 1. Τότε,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1^+} \frac{e^{z^2}}{(z-1)(z^2-1)}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2^+} \frac{e^{z^2}}{(z-1)(z^2-1)}\,dz \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(γενικευμένο θεώρημα Cauchy)} \\ &= \frac{e}{4} + \frac{3e}{4} = e\,. \qquad\qquad \text{(περιπτώσεις } (ii) \text{ και } (iii)\text{)} \end{aligned}$$

■

4. Έστω η έλλειψη $\gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα

$$\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz\,,$$

δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt = \frac{2\pi}{ab}\,.$$

Λύση. Ως γνωστόν

$$\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\,.$$

Η εξίσωση της έλλειψης γ είναι $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Είναι $\gamma'(t) = -a\sin t + ib\cos t$ και επομένως

$$\begin{aligned} 2\pi i &= \oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin t + ib\cos t}{a\cos t + ib\sin t}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-a\sin t + ib\cos t)(a\cos t - ib\sin t)}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt \\ &= (b^2 - a^2)\int_0^{2\pi} \frac{\sin t\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt + iab\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt\,. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\, dt = \frac{2\pi}{ab} \quad \text{και} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t \cos t}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\, dt = 0\,.$$

■

5. Έστω

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n3^n}\,.$$

Να βρεθεί ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο το 0 στον οποίο η f είναι αναλυτική συνάρτηση. Να βρεθεί η $f(z)$ καθώς επίσης και η $f'(z)$.

Λύση. Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n3^n}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3}\,,$$

η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 3$ και επομένως η f είναι αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $D(0,3)$.

Επειδή

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad , \quad |w| < 1\,, \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

παραγωγίζοντας την f έχουμε

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{1}{1-z/3} = \frac{1}{3-z}\,, \quad |z| < 3\,.$$

Επομένως $f(z) = -\operatorname{Log}(3-z) + c$, $|z| < 3$. Επειδή $f(0) = 0$, είναι $c = \ln 3$ και άρα

$$f(z) = \ln 3 - \operatorname{Log}(3-z)\,, \quad |z| < 3\,.$$

Ας σημειωθεί ότι για $|z| < 3$ το $3 - z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ■

6. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση. Αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0\,,$$

δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n-1$.

Υπόδειξη. Γενίκευση του θεωρήματος Liouville.

Λύση. Επειδή $\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$, για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $|z| > M$ είναι

$$\left|\frac{f(z)}{z^n}\right| < \varepsilon\,.$$

Επομένως

$$|f(z)| < \varepsilon |z|^n , \quad \text{για κάθε } |z| > M$$

και από τη γενίκευση του θεωρήματος Liouville η f είναι πολυώνυμο βαθμού n, δηλαδή

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 .$$

Όμως από την υπόθεση

$$\lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{f(z)}{z^n} \right| = \lim_{|z|\to\infty} \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| = 0$$

και επομένως $a_n = 0$. Άρα η f είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$. ■

7. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leq |z| + |z|^3 , \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C} . \tag{1.5}$$

Δείξτε ότι

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$$

με $|a_1| \leq 1$, $|a_2| \leq 2$ και $|a_3| \leq 1$.

Λύση. Η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ακέραια(αναλυτική στο $\mathbb{C}$) και επομένως

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \cdots , \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Έστω $C(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ κύκλος με ακτίνα $R > 0$. Αν $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$, από την (1.5) έχουμε

$$M \leq R + R^3$$

και από τις ανισότητες Cauchy για κάθε $n > 3$ είναι

$$|a_n| = \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} \leq \frac{M}{R^n} \leq \frac{R + R^3}{R^n} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 .$$

Επομένως $a_n = 0$, για κάθε $n > 3$. Άρα η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 3, δηλαδή $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$. Από την (1.5) έχουμε $f(0) = 0$ οπότε $a_0 = 0$ και κατά συνέπεια

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 .$$

Είναι

$$\begin{aligned} |a_1| = |f'(0)| &\leq \frac{M}{R} \leq \frac{R+R^3}{R} = 1+R^2 \xrightarrow[R\to 0]{} 1\,, \\ |a_2| = \frac{\left|f^{(2)}(0)\right|}{2!} &\leq \frac{M}{R^2} \leq \frac{R+R^3}{R^2} = 2 \qquad (\text{για} R=1) \end{aligned}$$

και

$$|a_3| = \frac{\left|f^{(3)}(0)\right|}{3!} \leq \frac{M}{R^3} \leq \frac{R+R^3}{R^3} \xrightarrow[R\to\infty]{} 1\,.$$

■

8. Έστω η πραγματική συνάρτηση $g(x,y) = (1+y^2-x^2)^2+4x^2y^2$. Χρησιμοποιώντας τη μιγαδική συνάρτηση $f(z) = 1-z^2$ στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0,\,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, δείξτε ότι

$$\max_{x^2+y^2\leq 1} g(x,y) = g(0,\pm 1) = 4\,.$$

Λύση. Η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ με

$$|f(z)|^2 = |f(x+iy)|^2 = |1-(x+iy)^2|^2 = |1+y^2-x^2-i2xy|^2 = (1+y^2-x^2)^2+4x^2y^2\,.$$

Από την αρχή μεγίστου η $|f|$ και κατά συνέπεια η $|f|^2$ θα παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο του $D(0,\,1)$ που είναι ο κύκλος $|z|=1$ με εξίσωση $z(\theta) = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Στον κύκλο $|z|=1$ είναι

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= |1-z^2|^2 \\ &= |1-e^{2i\theta}|^2 \\ &= |1-\cos 2\theta - i\sin 2\theta|^2 \\ &= (1-\cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta = 2-2\cos 2\theta = 4\sin^2\theta\,. \end{aligned}$$

Η $|f|^2$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της αν $\sin\theta = \pm 1 \Leftrightarrow \theta = \pm\pi/2$, δηλαδή για $z = e^{\pm i\pi/2} = \pm i$. Άρα

$$\max_{x^2+y^2\leq 1} g(x,y) = \max_{|z|\leq 1} |f(z)|^2 = |f(\pm i)|^2 = 4\,.$$

2ος τρόπος. Για κάθε z στο μοναδιαίο κύκλο $|z|=1$ έχουμε

$$|f(z)|^2 = |1-z^2|^2 \leq |1+|z|^2|^2 = 4$$

και επομένως $\max_{|z|=1} |f(z)|^2 = 4$ αν και μόνο αν $z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm i$. ■

9. Έστω το πολυώνυμο $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ με $|p(z)| \leq 1$ για κάθε $|z| = 1$. Δείξτε ότι $p(z) \equiv z^n$.

   Υπόδειξη. Να θεωρήσετε το πολυώνυμο

$$q(z) := z^n p(1/z) = 1 + a_{n-1}z + \cdots + a_0 z^n \,.$$

   Λύση. Επειδή $|p(z)| \leq 1$ για κάθε $|z| = 1$, είναι $|p(e^{-i\theta})| \leq 1$ για κάθε $\theta \in [-\pi, \pi]$ και επομένως

$$\max_{|z|=1} |q(z)| = \max_{|z|=1} |p(1/z)| = \max_{\theta \in [-\pi,\pi]} |p(e^{-i\theta})| \leq 1 \,.$$

   Όμως $q(0) = 1$ οπότε από την αρχή μεγίστου το q θα πρέπει να είναι σταθερό στο μοναδιαίο δίσκο. Επομένως $q(z) \equiv 1$ στο μοναδιαίο δίσκο. Τότε, από το θεώρημα μοναδικότητας $q(z) = 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και κατά συνέπεια $a_{n-1} = \cdots = a_0 = 0$. Άρα $p(z) \equiv z^n$. ■

4η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Έστω f αναλυτική συνάρτηση σε μια περιοχή U του 0, με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) \neq 0$. Δείξτε ότι υπάρχει αναλυτική συνάρτηση ϕ σε μια περιοχή V του 0, τέτοια ώστε $f(z) = \phi(z)^2$ για κάθε $z \in V$.

   Λύση. Από την υπόθεση το 0 είναι ρίζα τάξης 2 της f και επομένως

$$f(z) = z^2 g(z)\,, \text{όπου } g \text{ αναλυτική συνάρτηση στο } U \text{ με } g(0) \neq 0\,.$$

   Επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο U με $g(0) \neq 0$, υπάρχει περιοχή V του 0 τέτοια ώστε $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in V$. Το V είναι ένας απλά συνεκτικός τόπος στον οποίο η αναλυτική συνάρτηση g δεν μηδενίζεται και επομένως από γνωστή πρόταση(παραπέμπουμε στο [9]) υπάρχει αναλυτική συνάρτηση h στο V τέτοια ώστε $g(z) = h(z)^2$ για κάθε $z \in V$. Τότε $f(z) = (zh(z))^2$ για κάθε $z \in V$ και άρα $f(z) = \phi(z)^2$ για κάθε $z \in V$, όπου η $\phi(z) := zh(z)$ είναι αναλυτική στο V. ■

2. Έστω η συνάρτηση

$$f\,(z) = \frac{1}{z^2(z-i)}\,.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f σε όλους τους δυνατούς δακτυλίους με κέντρο το $z_0 = i$.

Λύση. Ως γνωστόν $1/(1+w) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w| < 1$ (γεωμετρική σειρά). Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά έχουμε

$$-\frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n w^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n w^{n-1}, \quad |w| < 1 .$$

1η περίπτωση: $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 1\}$. Τότε,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{[i+(z-i)]^2\,(z-i)} \\ &= -\frac{1}{(z-i)\,[1+((z-i)/i)]^2} \\ &= -\frac{1}{z-i}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n \left(\frac{z-i}{i}\right)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} i^{n+1} n (z-i)^{n-2} = \sum_{n=-1}^{\infty} i^{n+3}(n+2)(z-i)^n . \end{aligned}$$

2η περίπτωση: $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| > 1\}$. Τότε $|1/(z-i)| < 1$ και επομένως

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{[1+i/(z-i)]^2\,(z-i)^3} \\ &= \frac{1}{(z-i)^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n \left(\frac{i}{z-i}\right)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^{n-1} n \frac{1}{(z-i)^{n+2}} = -\sum_{n=-\infty}^{-3}(-i)^{n+1}(n+2)(z-i)^n . \end{aligned}$$

■

3. Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της

$$f(z) = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{(z^2-9)^2}$$

με κέντρο το $z_0 = 0$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το $2+i$.

Λύση. Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι: -1 και ± 3. Επομένως το ανάπτυγμα κατά Laurent της f μπορεί να γίνει στους δακτυλίους $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z| < 1\}$ (ανάπτυγμα Taylor), $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$ και $\Delta_3 = \{z \in \mathbb{C} : 3 < |z| < \infty\}$. Επειδή το $2+i \in \Delta_2$, θα αναπτύξουμε την f στο $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$.

Ως γνωστόν

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad \text{και} \quad \frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n\,, \quad |w| < 1\,. \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

Παραγωγίζοντας την $1/(1-w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$, $|w| < 1$, παίρνουμε

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1}\,, \quad |w| < 1\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1+z} - \frac{1}{(z^2-9)^2} \\ &= \frac{1}{z}\frac{1}{1+1/z} - \frac{1}{9^2}\frac{1}{(1-z^2/9)^2} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{9^2}\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{z^2}{9}\right)^{n-1} \\ &\qquad\qquad (|z| > 1 \Leftrightarrow |1/z| < 1 \text{ και } |z| < 3 \Rightarrow |z^2/9| < 1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{9^{n+1}} z^{2n-2}\,. \end{aligned}$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα ισχύει στο δακτύλιο $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$ που είναι ο μεγαλύτερος δυνατός δακτύλιος που περιέχει το $2 + i$. ■

4. (α΄) Να βρεθεί το είδος των μεμονωμένων ανώμαλων σημείων της συνάρτησης

$$f(z) = \left(\frac{3}{z^2} - \frac{\sin 3z}{z^3}\right) \exp\left(\frac{1}{z-2}\right)\,.$$

(β΄) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,dz\,.$$

Λύση.

(α΄) (i) Είναι

$$f(z) = \frac{3z - \sin 3z}{z^3} \exp\left(\frac{1}{z-2}\right)\,.$$

Αν $\phi_1(z) := z\sin 3z - 3z$, τότε $\phi_1(0) = \phi_1'(0) = \phi_1''(0) = 0$ και $\phi_1'''(0) = 27 \neq 0$. Δηλαδή το 0 είναι ρίζα τάξης 3 της ϕ_1 και ρίζα τάξης 3 της $\phi_2(z) := z^3$. Επομένως το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f.

<u>*2ος τρόπος*</u>. Επειδή

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{3}{z^2}-\frac{\sin 3z}{z^3}\right)=\frac{9}{2}\,,$$

είναι

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\frac{9}{2}e^{-1/2}$$

και επομένως το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f.

(ii) Έστω $n\in\mathbb{N}$. Επειδή $\lim_{n\to\infty}(2\pm 1/n)=2$ και

$$\lim_{n\to\infty} f\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{6-\sin 6}{8}\lim_{n\to\infty}e^{n}=+\infty\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{6-\sin 6}{8}\lim_{n\to\infty}e^{-n}=0\,,$$

το όριο $\lim_{z\to 2} f(z)$ δεν υπάρχει. Άρα το $z=2$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f.

<u>*2ος τρόπος*</u>. Επειδή

$$\exp\left(\frac{1}{z-2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-2)^n}\,,\quad 0<|z-2|<\infty\,,$$

το 2 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της συνάρτησης $f_1(z)=\exp\left(\frac{1}{z-2}\right)$ και η συνάρτηση $f_2(z)=\frac{3}{z^2}-\frac{\sin 3z}{z^3}$ είναι προφανώς αναλυτική στο 2. Τότε το 2 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της $f(z)=f_1(z)f_2(z)$(γιατί;)

<u>*Παρατήρηση*</u>. Αν το $z_0\in\mathbb{C}$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της συνάρτησης f_1 και η συνάρτηση f_2 είναι αναλυτική στο z_0, τότε το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της $f=f_1f_2$(άσκηση)

(β΄) Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(f,0)=0\,.$$

■

5. Αν $z_0\in\mathbb{C}$ και $R>0$, υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f,g είναι αναλυτικές στο διάτρητο δίσκο

$$0<|z-z_0|<R\,.$$

Αν το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f και πόλος της g, αποδείξτε ότι το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της $f+g$.

Λύση. Έστω το z_0 είναι πόλος τάξης $k \in \mathbb{N}$ της g. Τότε,

$$g(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^k}\,, \text{ όπου } h \text{ αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο } |z-z_0| < R \text{ με } h(z_0) \neq 0\,.$$

(i) Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της $f+g$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την $f+g$ στο z_0 έτσι ώστε η $f+g$ να είναι αναλυτική στο στο δίσκο $|z-z_0| < R$. Επειδή

$$f(z) = (f(z)+g(z)) - g(z) = (f(z)+g(z)) - \frac{h(z)}{(z-z_0)^k} = \frac{(f(z)+g(z))(z-z_0)^k - h(z)}{(z-z_0)^k}\,,$$

το z_0 είναι πόλος τάξης k της f(άτοπο).

(ii) Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι πόλος τάξης $m \in \mathbb{N}$ της $f+g$. Τότε

$$f(z)+g(z) = \frac{H(z)}{(z-z_0)^m}\,,$$

όπου H αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο $|z-z_0| < R$ με $H(z_0) \neq 0$. Επειδή

$$f(z) = (f(z)+g(z)) - g(z) = \frac{H(z)}{(z-z_0)^m} - \frac{h(z)}{(z-z_0)^k}\,,$$

το z_0 είναι είτε πόλος ή επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f(άτοπο).

Άρα το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της $f+g$. ■

6. Έστω η αναλυτική συνάρτηση $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ με

$$|f(z)| \leq |z|^{1/2} + |z|^{-1/2}\,, \quad \text{για κάθε } |z| > 0\,.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Θεωρείστε τη συνάρτηση $g(z) := zf(z)$.

Λύση. Είναι

$$\lim_{z\to 0} |zf(z)| \leq \lim_{z\to 0}(|z|^{3/2} + |z|^{1/2}) = 0\,,$$

δηλαδή $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$ και κατά συνέπεια το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της $g(z) := zf(z)$. Επομένως η g επεκτείνεται σε ακέραια συνάρτηση. Επειδή

$$\begin{aligned} |zf(z)| &\leq |z|^{3/2} + |z|^{1/2} \\ &< 2|z|^{3/2} \quad \text{για κάθε } |z| > 1\,, \end{aligned}$$

από τη γενίκευση του θεωρήματος Liouville η $g(z) = zf(z)$ είναι πολυώνυμο βαθμού 1. Δηλαδή

$$zf(z) = a + bz\,, \quad a, b \in \mathbb{C}\,.$$

Όμως $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0 \Rightarrow a = 0$ και άρα $f(z) = b$. Η f είναι σταθερή. ■

7. Έστω $\dfrac{1}{z\sin 2z} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z\sin 2z}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \pi/2 < |z| < \pi\} \quad \text{με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν οι συντελεστές a_{-2} και a_{-3}.

Λύση. Τα $z_k = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f. Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1/z\sin 2z}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z^{-n-2}}{\sin 2z}\,dz\,,$$

όπου ο κύκλος $|z| = r$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $\pi/2 < r < \pi$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ.

Αν

$$g(z) := \frac{z^{-n-2}}{\sin 2z}\,,$$

τα ανώμαλα σημεία $-\pi/2$ και $\pi/2$ της g βρίσκοντα στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$ και είναι απλοί πόλοι.

(i) $\underline{n = -2}$: Σ' αυτή την περίπτωση είναι $g(z) = 1/\sin 2z$ και επομένως τα ανώμαλα σημεία $\pm\pi/2$ και 0 της g βρίσκοντα στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$ και είναι απλοί πόλοι. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} a_{-2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1}{\sin 2z}\,dz &= \mathrm{Res}\left(\frac{1}{\sin 2z}, -\pi/2\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{\sin 2z}, 0\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{\sin 2z}, \pi/2\right) \\ &= \left.\frac{1}{(\sin 2z)'}\right|_{z=-\pi/2} + \left.\frac{1}{(\sin 2z)'}\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{(\sin 2z)'}\right|_{z=\pi/2} \\ &= \frac{1}{-2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

(ii) $\underline{n=-3:}$ Σ' αυτή την περίπτωση είναι $g(z) = z/\sin 2z$. Τα σημεία $\pm\pi/2$ είναι απλοί πόλοι της g ενώ το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} a_{-3} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z}{\sin 2z}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z}{\sin 2z},\,-\pi/2\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z}{\sin 2z},\,\pi/2\right) \\ &= \left.\frac{z}{(\sin 2z)'}\right|_{z=-\pi/2} + \left.\frac{z}{(\sin 2z)'}\right|_{z=\pi/2} \\ &= \frac{-\pi/2}{-2} + \frac{\pi/2}{-2} = 0\,. \end{aligned}$$

■

8. Υπολογίστε το τριγωνομετρικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\sin\theta}\,d\theta\,.$$

Λύση. Είναι

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\sin\theta}\,d\theta = 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta}\,d\theta\,.$$

Αν $z = e^{i\theta}$, τότε

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) \text{ και } dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \Leftrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}\,.$$

Επομένως,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\sin\theta}\,d\theta = 2\oint_{|z|=1} \frac{1}{2+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{dz}{iz} = 4\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2+4iz-1}\,dz\,.$$

Επειδή $z_{1,2} = (-2\pm\sqrt{3})i$ είναι απλές ρίζες της εξίσωσης $z^2+4iz-1$, τα σημεία $(-2\pm\sqrt{3})i$ είναι απλοί πόλοι της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z^2+4iz-1}$. Το $(-2+\sqrt{3})i$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $|z|=1$, ενώ το $(-2-\sqrt{3})i$ βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $|z|=1$. Άρα, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\sin\theta}\,d\theta &= 4\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2+4iz-1}\,dz \\ &= 4\cdot 2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+4iz-1},\,(-2+\sqrt{3})i\right) \\ &= 8\pi i\left.\frac{1}{(z^2+4iz-1)'}\right|_{z=(-2+\sqrt{3})i} \\ &= 8\pi i\frac{1}{2(-2+\sqrt{3})i+4i} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\,. \end{aligned}$$

■

9. Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5}\,dx\,.$$

Λύση. Είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5}\,dx = \Im\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}\,dx\right)\,.$$

Τα σημεία $-2 \pm i$ είναι απλοί πόλοι της $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}$. Το $-2+i$ βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο και είναι

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}, -2+i\right) = \lim_{z\to -2+i}(z-(-2+i))\frac{e^{iz}}{(z-(-2+i))(z-(-2-i))} = \frac{e^{-1-2i}}{2i}\,.$$

Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελείται από το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου γ_R, με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[-R, R]$. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο έτσι ώστε το ανώμαλο σημείο $z = -2+i$ της f να βρίσκεται στο εσωτερικό του ημικύκλιου γ_R. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}, -2+i\right) = \frac{\pi}{e}(\cos 2 - i\sin 2)\,. \tag{1.6}$$

Όμως από το λήμμα του Jordan είναι

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}\,dz = 0\,.$$

Επομένως από την (1.6) προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{\pi}{e}\cos 2 - i\frac{\pi}{e}\sin 2\,.$$

Άρα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5}\,dx = \Im\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}\,dx\right) = -\frac{\pi}{e}\sin 2\,.$$

■

1.5 Ακαδημαϊκό έτος 2011–12

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Να λυθεί η εξίσωση: $z^4 = -1 + \sqrt{3}i$.

   Λύση. Επειδή $-1 + \sqrt{3}i = 2e^{2\pi i/3}$, οι λύσεις της εξίσωσης $z^4 = -1 + \sqrt{3}i$ είναι

   $$z_k = 2^{1/4} e^{(2k\pi i + 2\pi i/3)/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

   Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης $z^4 = -1 + \sqrt{3}i$ είναι

   $$z_0 = 2^{1/4} e^{\pi i/6},\ z_1 = 2^{1/4} e^{2\pi i/3},\ z_2 = 2^{1/4} e^{7\pi i/6} \ \text{ και } \ z_3 = 2^{1/4} e^{5\pi i/3}.$$

   ■

2. Αν $n \in \mathbb{N}$, να βρεθούν όλες οι λύσεις της εξίσωσης

   $$z^{n-1} = \overline{z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

   Να διακρίνετε τις περιπτώσεις (i) $n = 1$, (ii) $n = 2$ και (iii) $n \geq 3$.

   Λύση. (i) $\underline{n = 1}$: Τότε $\overline{z} = 1$ και η λύση της εξίσωσης είναι $z = 1$.

   (ii) $\underline{n = 2}$: Τότε $z = \overline{z}$ και οι λύσεις της εξίσωσης είναι $z = x \in \mathbb{R}$, δηλαδή όλοι οι πραγματικοί αριθμοί.

   (iii) $\underline{n \geq 3}$: Μία λύση της εξίσωσης $z^{n-1} = \overline{z}$ είναι η $z = 0$. Αν $z \neq 0$, τότε η εξίσωση $z^{n-1} = \overline{z}$ συνεπάγεται ότι

   $$|z|^{n-1} = |\overline{z}| \Leftrightarrow |z|^{n-2} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

   Επομένως για $z \neq 0$

   $$z^{n-1} = \overline{z} \Leftrightarrow z^n = 1$$

   και οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = 1$ είναι οι n-οστές ρίζες της μονάδας, δηλαδή

   $$z_k = e^{2k\pi i/n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Άρα για $n \geq 3$ οι λύσεις της εξίσωσης $z^{n-1} = \overline{z}$ είναι

$$\left\{0, 1, e^{2\pi i/n}, e^{4\pi i/n}, \ldots, e^{2(n-1)\pi i/n}\right\} = \left\{0, 1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\right\}, \text{ όπου } \omega = e^{2\pi i/n}\,.$$

■

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\overline{z}^2}{z} & \text{αν } z \neq 0, \\ 0 & \text{αν } z = 0\,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0, 0)$ ενώ δεν υπάρχει η παράγωγος $f'(0)$.

Λύση. Για $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, είναι

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{x^2/x}{x} = 1$$

και επομένως

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 1\,.$$

Παρόμοια, για $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, είναι

$$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \frac{(\overline{iy})^2/iy}{y} = i$$

και επομένως

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = i\,.$$

Άρα $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -i\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$, δηλαδή ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0, 0)$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Παρατηρούμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, είναι

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{f(z)}{z} = \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2\,.$$

Παίρνουμε το $z = x + i\lambda x \in \mathbb{C}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \neq 0$. Τότε,

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \left(\frac{\overline{x + i\lambda x}}{x + i\lambda x}\right)^2 = \left(\frac{1 - i\lambda}{1 + i\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1 - \lambda^2 - 2i\lambda}{1 + \lambda^2}\right)^2$$

και επομένως το όριο

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z=x+i\lambda x}} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \left(\frac{1-\lambda^2-2i\lambda}{1+\lambda^2}\right)^2$$

εξαρτάται από το λ. Άρα, η παράγωγος $f'(0)$ δεν υπάρχει.

Σημείωση. Για να αποδείξουμε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$ μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής: Αν $z = x+iy \neq 0$, τότε

$$\frac{\overline{z}^2}{z} = \frac{\overline{z}^3}{|z|^2} = \frac{(x-iy)^3}{x^2+y^2} = \frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} + i\frac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}\,.$$

Επομένως $f = u+iv$ με

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} & \text{αν } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{αν } (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad \text{και} \quad v(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2} & \text{αν } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{αν } (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$$

Είναι $u_x(0,0) = v_y(0,0) = 1$ και $u_y(0,0) = -v_x(0,0) = 0$, δηλαδή ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$. ■

4. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(z) = (3x^2y - y^3 + e^{2y}\cos 2x) + i(3xy^2 - x^3 - e^{2y}\sin 2x + 3)$$

είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και υπολογίστε την παράγωγο $f'(z)$. Αφού εκφράσετε την f σαν συνάρτηση του z, υπολογίστε με ένα δεύτερο τρόπο την παράγωγο $f'(z)$.

Λύση. Είναι $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, με $u(x,y) = 3x^2y - y^3 + e^{2y}\cos 2x$ και $v(x,y) = 3xy^2 - x^3 - e^{2y}\sin 2x + 3$. Οι συναρτήσεις u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$. Για να είναι η f αναλυτική στο $\mathbb{C}$ θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann. Πράγματι, για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ είναι

$$\left\{\begin{aligned} u_x = v_y &\quad = 6xy - 2e^{2y}\sin 2x \\ u_y = -v_x &\quad = 3x^2 - 3y^2 + 2e^{2y}\cos 2x \end{aligned}\right\}.$$

Η παράγωγος δίνεται από τον τύπο

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (6xy - 2e^{2y}\sin 2x) + i(3y^2 - 3x^2 - 2e^{2y}\cos 2x)\,.$$

Ως γνωστόν

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = \cos 2z + i\left(-z^3 - \sin 2z + 3\right) = e^{-2iz} - iz^3 + 3i\,.$$

Επομένως,

$$f'(z) = -2ie^{-2iz} - 3iz^2 .$$

■

5. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : G \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στον τόπο(ανοικτό, συνεκτικό σύνολο) $G \subseteq \mathbb{C}$. Αν για κάθε $z \in G$ είναι είτε $f(z) = 0$ ή $f'(z) = 0$, δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο G. *Υπόδειξη*. Θεωρείστε την f^2.

Λύση. Η συνάρτηση $g := f^2$ είναι αναλυτική στο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο G. Από την υπόθεση είναι $g'(z) = 2f(z)f'(z) = 0$ για κάθε $z \in G$. Επομένως, από γνωστή πρόταση η g είναι σταθερή στο G και κατά συνέπεια η $|g| = |f|^2$ θα είναι σταθερή G. Άρα η $|f|$ είναι σταθερή στο G οπότε και πάλι από γνωστή πρόταση η f θα είναι σταθερή στο G. ■

6. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$u(x,y) = y^3 - 3x^2y - \frac{x}{x^2+y^2}\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,,$$

είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και στη συνέχεια να βρεθεί η αναλυτική συνάρτηση $f = u+iv$ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ με $f(1) = -1$.

Λύση. Η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ με

$$u_x = -6xy + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad u_{xx} = -6y + \frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

και

$$u_y = 3y^2 - 3x^2 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad u_{yy} = 6y + \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}\,.$$

Είναι $u_{xx} + u_{yy} = 0$ και επομένως η u είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Έστω v η συζυγής αρμονική της u, δηλαδή η $f = u+iv$ είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Από την εξίσωση Cauchy–Riemann $u_y = -v_x$ έχουμε

$$v_x = -3y^2 + 3x^2 - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Επομένως,

$$v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + \frac{y}{x^2+y^2} + c(y)\,.$$

Από τη δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann $u_x = v_y$ προκύπτει ότι

$$-6xy + \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = -6xy + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + c'(y) \Leftrightarrow c'(y) = 0 \Leftrightarrow c(y) = c\,.$$

Δηλαδή $v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + \frac{y}{x^2+y^2} + c$ και η αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = -\frac{1}{z} + i(z^3 + c)\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Όμως $f(1) = -1$, οπότε $c = -1$. Άρα,

$$f\,(z) = -\frac{1}{z} + iz^3 - i\,.$$

■

7. Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός $w = \cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ απεικονίζει τη λωρίδα

$$\Omega = \left\{ z = x + iy : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,,\ y \ge 0 \right\}$$

του z-επιπέδου στο 4ο τεταρτημόριο του w-επιπέδου.

Λύση. Είναι

$$w = \cos z = u(x,y) + iv(x,y) \text{ με } u(x,y) = \cos x \cosh y \text{ και } v(x,y) = -\sin x \sinh y\,.$$

Θα βρούμε πρώτα την εικόνα του συνόρου της λωρίδας Ω μέσω του μετασχηματισμού $w = \cos z$.

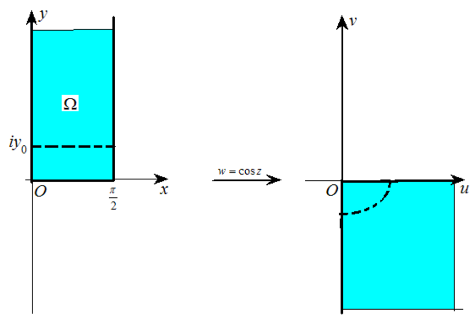
- Αν $x = 0$, $y \ge 0$, τότε $u = \cosh y$, $y \ge 0$ και $v = 0$. Δηλαδή η εικόνα της ευθείας $x = 0$, $y \ge 0$ (θετικός φανταστικός ημιάξονας) είναι το ευθ. τμήμα $[1, \infty)$ του πραγματικού άξονα Ou.
- Αν $x = \frac{\pi}{2}$, $y \ge 0$, τότε $u = 0$ και $v = -\sinh y$, $y \ge 0$. Δηλαδή η εικόνα της ευθείας $x = \frac{\pi}{2}$, $y \ge 0$ είναι ο αρνητικός φανταστικός ημιάξονας.
- Αν $y = 0$ με $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, τότε $u = \cos x$ και $v = 0$. Δηλαδή η εικόνα του ευθ. τμήματος $y = 0$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, είναι το ευθ. τμήμα $[0,1]$ του πραγματικού άξονα Ou.

Επομένως το σύνορο της λωρίδας Ω απεικονίζεται στον πραγματικό θετικό ημιάξονα και στον αρνητικό φανταστικό ημιάξονα.

Αν $y = y_0 > 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, τότε $u = \cos x \cosh y_0 \geq 0$ και $v = -\sin x \sinh y_0 \leq 0$. Δηλαδή η εικόνα του ευθ. τμήματος $y = y_0 > 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, είναι το τμήμα της έλλειψης

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y_0} + \frac{v^2}{\sinh^2 y_0} = 1$$

στο 4ο τεταρτημόριο. Καθώς το $0 < y_0 < \infty$ μεταβάλλεται, οι εικόνες των ευθυγράμμων τμημάτων $y = y_0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, που είναι τμήματα ελλείψεων στο 4ο τεταρτημόριο, θα καλύπτουν το 4ο τεταρτημόριο. Άρα, η εικόνα της λωρίδας Ω μέσω του μετασχηματισμού $w = \cos z$ είναι το 4ο τεταρτημόριο.

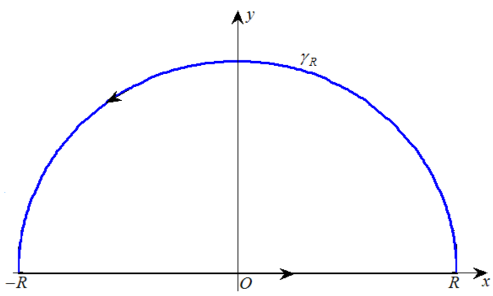


■

8. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\oint_{[-R,R]\cup\gamma_R} |z|\overline{z}\, dz = R^3 \pi i\,,$$

όπου γ_R το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με κέντρο 0, ακτίνα $R > 0$ και θετική φορά



διαγραφής.

Λύση. Η παραμετρική εξίσωση του ημικύκλιου γ_R είναι $z(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le \pi$ και επομένως

$$\begin{aligned}
\oint_{[-R,R]\cup\gamma_R} |z|\overline{z}\,dz &= \int_{[-R,R]} |z|\overline{z}\,dz + \int_{\gamma_R} |z|\overline{z}\,dz \\
&= \int_{-R}^{R} |x|x\,dx + \int_0^{\pi} R^2 e^{-it}\cdot iRe^{it}\,dt \\
&= -\int_{-R}^{0} x^2\,dx + \int_0^R x^2\,dx + i\int_0^{\pi} R^3\,dt \\
&= R^3\pi i\,.
\end{aligned}$$

■

9. Από το θεμελιώδες θεώρημα ολοκλήρωσης για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ είναι

$$e^{z_2} - e^{z_1} = \int_{[z_1,z_2]} e^z\,dz\,,$$

όπου $[z_1, z_2]$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το z_1 και πέρας το z_2. Αν $\Re z_1, \Re z_2 \le 0$, δείξτε ότι

$$|e^{z_2} - e^{z_1}| \le |z_2 - z_1|\,.$$

Λύση. Επειδή $\Re z_1, \Re z_2 \le 0$, για κάθε $z \in [z_1, z_2]$ είναι $\Re z \le 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
|e^{z_2} - e^{z_1}| &= \left|\int_{[z_1,z_2]} e^z\,dz\right| \\
&\le \int_{[z_1,z_2]} |e^z|\,|dz| \\
&= \int_{[z_1,z_2]} e^{\Re z}\,|dz| \\
&\le \int_{[z_1,z_2]} |dz| \qquad (\Re z \le 0) \\
&= |z_2 - z_1|\,.
\end{aligned}$$

■

2η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τύπους Cauchy υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^3}\, dz\,,$$

όπου ο κύκλος C^+ με θετική φορά διαγραφής δεν διέρχεται από τα σημεία $z = 0$ και $z = \pi$. Εξετάστε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

Λύση. (i) Ο κύκλος C δεν περιέχει τα σημεία 0 και π. Από το θεώρημα Cauchy $I = 0$.

(ii) Ο κύκλος C περιέχει μόνο το σημείο 0. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{\cos z/(z-\pi)^3}{z}\, dz = \left.\frac{\cos z}{(z-\pi)^3}\right|_{z=0} = -\frac{1}{\pi^3}\,.$$

(iii) Ο κύκλος C περιέχει μόνο το σημείο π. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\left\{\frac{2!}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{\cos z/z}{(z-\pi)^3}\, dz\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left.\left(\frac{\cos z}{z}\right)''\right|_{z=\pi} \\ &= \frac{1}{2}\left.\frac{-z^2\cos z + 2z\sin z + 2\cos z}{z^3}\right|_{z=\pi} = \frac{\pi^2-2}{2\pi^3}\,. \end{aligned}$$

(iv) Ο κύκλος C περιέχει τα σημεία 0 και π. Έστω C_1 και C_2 δύο κύκλοι που δεν τέμνονται και βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου C, έτσι ώστε ο C_1 περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο 0 και ο C_2 περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο π. Τότε,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1^+} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^3}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2^+} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^3}\, dz && \text{(γενικευμένο θεώρημα Cauchy)} \\ &= -\frac{1}{\pi^3} + \frac{\pi^2-2}{2\pi^3} && \text{(περιπτώσεις } (ii) \text{ και } (iii)\text{)} \\ &= \frac{\pi^2-4}{2\pi^3}\,. \end{aligned}$$

■

2. Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο δίσκο $D(0, R)$, δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\, d\theta = 2\pi f'(0)\,,$$

όπου $0 < r < R$.

Λύση. Αν $z = re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, τότε $dz = ire^{i\theta}d\theta = izd\theta$, οπότε $d\theta = dz/iz$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\, d\theta &= \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{iz^2}\, dz \\
&= 2\pi \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-0)^2}\, dz \right\} \\
&= 2\pi f'(0)\,. \qquad \text{(ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για παραγώγους)}
\end{aligned}$$

■

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(n\theta - \sin\theta)\, d\theta = \frac{2\pi}{n!}\,.$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz &= \frac{2\pi i}{n!} \cdot \left\{ \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz \right\} \\
&= \frac{2\pi i}{n!} \cdot (e^z)^{(n)}\Big|_{z=0} \\
&= \frac{2\pi i}{n!} \cdot e^0 = \frac{2\pi}{n!} i\,.
\end{aligned}$$

Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Επειδή $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$, είναι

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz &= i \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{in\theta}}\, d\theta \\
&= i \int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos\theta + i\sin\theta}}{e^{in\theta}}\, d\theta \\
&= i \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} e^{i(\sin\theta - n\theta)}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin\left(n\theta - \sin\theta\right)\, d\theta + i \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos\left(n\theta - \sin\theta\right)\, d\theta\,.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\,d\theta=\frac{2\pi}{n!}\quad \text{και}\quad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin\left(n\theta-\sin\theta\right)\,d\theta=0\,.$$

■

4. (αʹ) Έστω η συνάρτηση $f_1(z)=\dfrac{z^2+6z}{(2-z)(z+2)^2}=\dfrac{1}{2-z}-\dfrac{2}{(z+2)^2}$. Να βρεθεί το ανάπτυγμα της f_1 σε σειρά Taylor με κέντρο το $z_0=0$, καθώς επίσης και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

(βʹ) Να βρεθεί το ανάπτυγμα της $f_2(z)=\dfrac{1}{z^2+4z-3i}$ σε δυναμοσειρά με κέντρο το $z_0=-2$. Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς;

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty}w^n\quad\text{και}\quad\frac{1}{1+w}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n\,,\quad |w|<1\,.$$

(αʹ) Είναι

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2(1-z/2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\,.\qquad (|z/2|<1\Leftrightarrow|z|<2)$$

Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά $\frac{1}{1+w}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w|<1$, παίρνουμε

$$-\frac{1}{(1+w)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n w^{n-1}$$

και ισοδύναμα

$$\frac{1}{(1+w)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nw^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)w^n\,,\quad |w|<1\,.$$

Επομένως

$$\frac{2}{(z+2)^2}=\frac{1}{2(1+z/2)^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{z^n}{2^{n+1}}\,.$$
$$(|z/2|<1\Leftrightarrow|z|<2)$$

Άρα, για $|z|<2$ έχουμε

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\left[1+(-1)^{n+1}(n+1)\right]z^n\,.$$

Ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $R=2$.

(β') Είναι

$$
\begin{aligned}
f_2(z) &= \frac{1}{(z+2)^2-(4+3i)} \\
&= -\frac{1}{4+3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{(z+2)^2}{4+3i}} \\
&= -\frac{1}{4+3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(z+2)^2}{4+3i}\right)^n && \left(\left|\tfrac{(z+2)^2}{4+3i}\right|<1 \Leftrightarrow |z+2|<\sqrt{|4+3i|}\right) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^{2n}}{(4+3i)^{n+1}}\,. && (|z+2|<\sqrt{5})
\end{aligned}
$$

Ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $R=\sqrt{5}$.

■

5. Υποθέτουμε ότι η ακέραια συνάρτηση $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ είναι τέτοια ώστε $\Re f(z)\le 0$, για κάθε $z\in\mathbb{C}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Θεωρείστε τη συνάρτηση $g(z)=e^{f(z)}$.

Λύση. Η συνάρτηση $g(z):=e^{f(z)}$ είναι ακέραια με

$$|g(z)|=|e^{f(z)}|=|e^{(\Re f(z)+i\Im f(z))}|=e^{\Re f(z)}\le e^0=1\,. \qquad (\Re f(z)\le 0 \text{ για κάθε } z\in\mathbb{C})$$

Επομένως, από το θεώρημα Liouville η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. Τότε και η $|g(z)|=e^{\Re f(z)}$ θα είναι σταθερή οπότε και η $\Re f(z)$ είναι σταθερή. Άρα, από γνωστή πρόταση και η συνάρτηση f θα είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. ■

6. Αν $f(z)=z^2-3i$, να βρεθούν τα σημεία του κλειστού δίσκου $\overline{D}(0,\,2)=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 2\}$ στα οποία η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

Λύση. Επειδή η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, από την αρχή μεγίστου η $|f|$ θα παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο του $D(0,\,2)$ που είναι ο κύκλος $|z|=2$ με εξίσωση $z(\theta)=2e^{i\theta}$, $-\pi\le\theta\le\pi$. Στον κύκλο $|z|=2$ είναι

$$
\begin{aligned}
|f(z)|=|z^2-3i|=|4e^{2i\theta}-3i| &= |4\cos 2\theta+i(4\sin 2\theta-3)| \\
&= \sqrt{(16\cos^2 2\theta+(4\sin 2\theta-3)^2} \\
&= \sqrt{25-24\sin 2\theta}\,.
\end{aligned}
$$

Η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της αν $\sin 2\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = -\pi/4$, δηλαδή για $z = 2e^{-i\pi/4} = \sqrt{2}(1-i)$. Επομένως,

$$\max_{|z|\leq 2} |f(z)| = |f(\sqrt{2}(1-i))| = 7\,.$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε αν η f έχει ρίζα στον ανοικτό δίσκο $D(0,\,2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$. Είναι $f(z) = 0$ αν και μόνο αν

$$z^2 = 3i \Leftrightarrow (x+iy)^2 = 3i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 3i \Leftrightarrow \left\{x^2 - y^2 = 0, 2xy = 3\right\}\,.$$

Η λύση του συστήματος είναι $x = y = \sqrt{3/2}$ και $x = y = -\sqrt{3/2}$.

<u>2ος τρόπος</u>. Επειδή $z^2 = 3i = 3e^{\pi i/2}$, είναι

$$z_k = \sqrt{3}e^{(2k\pi i + \pi i/2)/2},\ k = 0, 1,\ \text{ δηλαδη } z_0 = \sqrt{3}e^{\pi i/4} \text{ και } z_1 = \sqrt{3}e^{5\pi i/4}\,.$$

Άρα,

$$\min_{|z|\leq 2} |f(z)| = \left| f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}(1+i)\right)\right| = \left| f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}(1+i)\right)\right| = 0\,.$$

■

7. Έστω η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0,\,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ και τέτοια ώστε $|f(z)| > 1$ για κάθε $|z| = 1$. Αν $f(0) = i$, δείξτε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Λύση. Υποθέτουμε ότι η f δεν έχει καμία ρίζα στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Τότε, από την αρχή ελαχίστου η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο που είναι ο μοναδιαίος κύκλος $|z| = 1$. Όμως από την υπόθεση είναι

$$|f(z)| > 1 \text{ για κάθε } |z| = 1 \text{ και } |f(0)| = |i| = 1\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα η f θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. ■

8. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $D(0,\,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ με $|f(z)| \leq M < \infty$ για κάθε $z \in D(0,\,R)$. Αν το 0 είναι ρίζα τάξης 2 της f, δηλαδή $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) \neq 0$, δείξτε ότι

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^2}|z|^2\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(0,\,R) \qquad (1)$$

και

$$|f''(0)| \leq \frac{2M}{R^2}\,. \tag{2}$$

Υπόδειξη. Θεωρείστε τη συνάρτηση

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z^2} & \text{αν } 0 < |z| < R, \\ \frac{f''(0)}{2!} & \text{αν } z = 0\,. \end{cases}$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdots \\ &= z^2\left(\frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!}z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-2} + \cdots\right), \quad |z| < R\,. \end{aligned}$$

Αν $g(z) := \dfrac{f''(0)}{2!} + \dfrac{f'''(0)}{3!}z + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-2} + \cdots$, τότε η g είναι αναλυτική στο δίσκο $D(0,\,R)$ με

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z^2} & \text{αν } 0 < |z| < R, \\ \frac{f''(0)}{2!} & \text{αν } z = 0\,. \end{cases}$$

Έστω $z \in D(0,\,R)$, z σταθερό. Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε r με $|z| < r < R$. Από την αρχή μεγίστου έχουμε

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r}|g(w)| = \max_{|w|=r}\frac{|f(w)|}{|w|^2} \leq \frac{M}{r^2}\,.$$

Στη συνέχεια παίρνοντας το $r \to R$ προκύπτει ότι

$$|g(z)| \leq \frac{M}{R^2}\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(0,\,R)$$

και αυτό αποδεικνύει τις ανισότητες (1) και (2).

Σημείωση. Για την απόδειξη της (2) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τις ανισότητες Cauchy. Πράγματι,

$$|f''(0)| \leq \frac{M \cdot 2!}{R^2}\,.$$

■

3η Σειρά Ασκήσεων στη Μιγαδική Ανάλυση

1. Υποθέτουμε ότι η $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ακέραια συνάρτηση και ότι το όριο

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|f(z)|}{1+|z|^{1/2}} \text{ υπάρχει}\,.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Γενικευμένο θεώρημα Liouville.

Λύση. Αν $\lim_{|z|\to\infty} \frac{|f(z)|}{1+|z|^{1/2}} = a \geq 0$, για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $|z| > M$ είναι

$$\left| \frac{|f(z)|}{1+|z|^{1/2}} - a \right| < \varepsilon\,.$$

Επομένως,

$$|f(z)| < a + \varepsilon + (a+\varepsilon)|z|^{1/2}\,, \quad \text{για κάθε } |z| > M\,.$$

Από τη γενίκευση του θεωρήματος Liouville συμπεραίνουμε η f είναι πολυώνυμο βαθμού 0. Άρα, η f είναι σταθερή. ■

2. Έστω

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

το ανάπτυγμα Taylor της ακέραιας συνάρτησης f. Υποθέτουμε ότι

$$|f(z)| \leq M \cdot e^{|z|}\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

Από το θεώρημα Cauchy-Taylor για οποιοδήποτε $r > 0$ οι συντελεστές της δυναμοσειράς δύνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz\,.$$

Δείξτε ότι

$$|a_n| \leq M \cdot \frac{e^r}{r^n}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Να συμπεράνετε ότι

$$|a_n| \leq \begin{cases} M \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n & \text{αν } n \geq 1 \\ M & \text{αν } n = 0\,. \end{cases}$$

Λύση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$
\begin{aligned}
|a_n| = \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}\,|dz| \\
&\le \frac{M}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{e^{|z|}}{|z|^{n+1}}\,|dz| && (|f(z)| \le M\cdot e^{|z|}) \\
&= \frac{M}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{e^{r}}{r^{n+1}}\,|dz| \\
&= \frac{Me^r}{2\pi r^{n+1}}\oint_{|z|=r}|dz| \\
&= \frac{Me^r}{2\pi r^{n+1}}2\pi r = M\cdot\frac{e^r}{r^n}\,.
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι για $n = 0$ είναι $|a_0| \le Me^r$, για κάθε $r > 0$. Παίρνοντας το $r \to 0^+$ έχουμε ότι $|a_0| \le M$. Επειδή για $n \ge 1$

$$
\frac{d}{dr}\left(\frac{e^r}{r^n}\right) = \frac{e^r r^n - nr^{n-1}e^r}{r^{2n}} = \frac{e^r}{r^{n+1}}(r-n)\,,
$$

η $g(r) := e^r/r^n$, $r > 0$, έχει ελάχιστη τιμή για $r = n$ με $g(n) = e^n/n^n$. Άρα,

$$
|a_n| \le \begin{cases} M\cdot\left(\frac{e}{n}\right)^n & \text{αν } n \ge 1 \\ M & \text{αν } n = 0\,. \end{cases}
$$

■

3. Έστω η συνάρτηση

$$
f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}\,.
$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f σε όλους τους δυνατούς δακτυλίους με κέντρο το $z_0 = -1$.

Λύση. Ως γνωστόν $1/(1-w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$, $|w| < 1$ (γεωμετρική σειρά). Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά έχουμε

$$
\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nw^{n-1}\,, \quad |w| < 1\,.
$$

1η περίπτωση: $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 1\}$. Τότε,

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)} &= \frac{1}{[1-(z+1)]^2\,(z+1)} \\ &= \frac{1}{z+1}\sum_{n=1}^{\infty} n(z+1)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(z+1)^{n-2} = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+2)(z+1)^n\,. \end{aligned}$$

2η περίπτωση: $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| > 1\}$. Τότε $|1/(z+1)| < 1$ και επομένως

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)} &= \frac{1}{[1-1/(z+1)]^2\,(z+1)^3} \\ &= \frac{1}{(z+1)^3}\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{(z+1)^{n-1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{(z+1)^{n+2}} = -\sum_{n=-\infty}^{-3} (n+2)(z+1)^n\,. \end{aligned}$$

■

4. Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της

$$f(z) = \frac{z^2+4iz}{(z-1)(z^2+4i)}$$

με κέντρο το $z_0 = 0$ σ' ένα δακτύλιο που περιέχει το $1-2i$. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος τέτοιος δακτύλιος στον οποίο το ανάπτυγμα Laurent της f ισχύει;

Λύση. Είναι

$$f(z) = \frac{z^2+4i}{(z-1)(z^2+4i)} + \frac{4iz-4i}{(z-1)(z^2+4i)} = \frac{1}{z-1} + \frac{4i}{z^2+4i}\,.$$

Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι: 1, $\sqrt{2}(1-i)$ και $\sqrt{2}(-1+i)$. Επομένως το ανάπτυγμα κατά Laurent μπορεί να γίνει στους δακτυλίους $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \le |z| < 1\}$ (ανάπτυγμα Taylor), $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ και $\Delta_3 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < \infty\}$. Επειδή το $1-2i \in \Delta_3$, θα αναπτύξουμε την f στο δακτύλιο $\Delta_3 : |z| > 2$.

Ως γνωστόν, $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ και $\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w| < 1$ (γεωμετρική σειρά). Είναι

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1} + \frac{4i}{z^2+4i} \\ &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} + \frac{4i}{z^2}\frac{1}{1+4i/z^2} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{4i}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4i}{z^2}\right)^n \qquad (|z|>2) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4i)^{n+1}}{z^{2n+2}}\,. \end{aligned}$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα ισχύει στο δακτύλιο $\Delta_3 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < \infty\}$. ■

5. (α΄) Να βρεθεί το είδος του μεμονωμένου ανώμαλου σημείου $z = -2$ της συνάρτησης

$$f(z) = (z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$$

και να υπολογιστεί το $\operatorname{Res}(f, -2)$.

(β΄) Να βρεθεί το είδος του μεμονωμένου ανώμαλου σημείου $z = 0$ της συνάρτησης

$$g(z) = \frac{\sin z - z\cos z}{z^4}$$

και να υπολογιστεί το $\operatorname{Res}(g, 0)$.

(γ΄) Έστω η συνάρτηση h είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο $\Delta : 0 < |z| < 1$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $k > 0$ τέτοιο ώστε

$$|h(z)| \le k|z|^{-1/2} \quad \text{για κάθε } z \in \Delta\,.$$

Τι είδους μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της h είναι το $z = 0$;

Λύση.

(α΄) Αν $z+2 = w \Leftrightarrow z-3 = w-5$, τότε

$$(w-5)\sin\frac{1}{w} = (w-5)\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{w^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{w^5} - \cdots\right) = 1 - \frac{5}{w} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{w^2} + \cdots$$

και επομένως

$$f(z) = 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z+2)^2} + \cdots\,.$$

Το $z = -2$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f με $\operatorname{Res}(f, -2) = -5$.

(β΄) Αν $\varphi_1(z) := \sin z - z\cos z$, είναι $\varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = \varphi_1''(0) = 0$ και $\varphi_1'''(0) = 2 \neq 0$. Επομένως, το 0 είναι ρίζα τάξης 3 του αριθμητή της g και ρίζα τάξης 4 του παρανομαστή της g. Άρα, το 0 είναι απλός πόλος της g. Επειδή για κάθε $|z| > 0$

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z^4}\left[\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) - z\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right)\right] \\ &= \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)\frac{1}{z} - \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)z + \cdots , \end{aligned}$$

είναι

$$\mathrm{Res}(g,0) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}\,.$$

<u>*Σημείωση*</u>. Επειδή το 0 είναι απλός πόλος της g, το $\mathrm{Res}(g,0)$ υπολογίζεται και από τον τύπο

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(g,0) &= \lim_{z\to 0} z\frac{\sin z - z\cos z}{z^4} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{\sin z - z\cos z}{z^3} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{z\sin z}{3z^2} && \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\ &= \frac{1}{3}\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

(γ΄) Είναι $|zh(z)| \le k|z|^{1/2}$ για κάθε $z \in \Delta$ και κατά συνέπεια $\lim_{z\to 0} zh(z) = 0$. Άρα, το 0 είναι επουσιώδες (απαλείψιμο) ανώμαλο σημείο της h.

■

6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_{C^+(1-i,\,2)} \left[\frac{e^{\pi z}}{z^2+1} + \sin\frac{1}{z} + \frac{1}{e^{z^2}}\right] dz\,,$$

όπου $C^+(1-i,\,2)$ είναι ο κύκλος με κέντρο $1-i$, ακτίνα 2 και θετική φορά διαγραφής.

Λύση. Τα σημεία $\pm i$ είναι απλοί πόλοι της συνάρτησης $w = e^{\pi z}/(z^2+1)$. Μόνο το σημείο $-i$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $C^+(1-i,\,2)$. Είναι

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{\pi z}}{z^2+1}, -i\right) = \left.\frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)'}\right|_{z=-i} = \frac{e^{-\pi i}}{-2i} = -\frac{1}{2}i\,.$$

Επειδή

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots ,$$

είναι $\mathrm{Res}(\sin\frac{1}{z},\,0)=1$. Άρα, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$I=2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\frac{e^{\pi z}}{z^2+1},\,-i\right)+\mathrm{Res}\left(\sin\frac{1}{z},\,0\right)\right]=2\pi i\left[-\frac{1}{2}i+1\right]=\pi+2\pi i\,.$$

Ας σημειωθεί ότι η συνάρτηση $w=1/e^{z^2}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και επομένως από το θεώρημα Cauchy

$$\oint_{C^+(1-i,\,2)}\frac{1}{e^{z^2}}\,dz=0\,.$$

■

7. Έστω $\frac{z^2}{e^{2iz}-1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z)=\frac{z^2}{e^{2iz}-1}$ στο δακτύλιο

$$\Delta=\{z\in\mathbb{C}:\pi<|z|<2\pi\}\text{ με κέντρο το }z_0=0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, $n\leq 1$.

Λύση. Επειδή

$$e^{2iz}-1=0\Leftrightarrow e^{2iz}=1\Leftrightarrow 2iz=2k\pi i\Leftrightarrow z=k\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,,$$

τα $z_k=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, είναι απλοί πόλοι της συνάρτησης $f(z)=z^2/(e^{iz}-1)$. Επειδή το 0 είναι ρίζα τάξης 2 του αριθμητή και απλή ρίζα του παρανομαστή της f, το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f. Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,r)}\frac{z^2/(e^{2iz}-1)}{z^{n+1}}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,r)}\frac{z^{-n+1}}{e^{2iz}-1}\,dz\,,$$

όπου ο κύκλος $C^+(0,r)$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $\pi<r<2\pi$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ.

Αν

$$g(z):=\frac{z^{-n+1}}{e^{2iz}-1}\,,$$

τα ανώμαλα σημεία $-\pi$ και π της g βρίσκοντα στο εσωτερικό του κύκλου $C^+(0,r)$ και είναι απλοί πόλοι.

(i) <u>$n=1$:</u> Σ' αυτή την περίπτωση τα ανώμαλα σημεία $-\pi$, 0 και π της $g(z)=\frac{1}{e^{iz}-1}$ βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $C^+(0,r)$ και είναι απλοί πόλοι. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών

υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,r)} \frac{1}{e^{2iz}-1}\,dz \\
&= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^{2iz}-1},\,-\pi\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^{2iz}-1},\,0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^{2iz}-1},\,\pi\right) \\
&= \left.\frac{1}{(e^{2iz}-1)'}\right|_{z=-\pi} + \left.\frac{1}{(e^{2iz}-1)'}\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{(e^{2iz}-1)'}\right|_{z=\pi} \\
&= \frac{1}{2ie^{-2i\pi}} + \frac{1}{2i} + \frac{1}{2ie^{2i\pi}} = \frac{3}{2i} = -\frac{3}{2}i\,.
\end{aligned}$$

(ii) <u>$n \le 0$:</u> Σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$g(z) = \frac{z^{-n+1}}{e^{2iz}-1} \quad \text{με } -n+1 \ge 1$$

και επομένως τα ανώμαλα σημεία $-\pi$ και π της g βρίσκοντα στο εσωτερικό του κύκλου $C^+(0,r)$ και είναι απλοί πόλοι. Επειδή το 0 είναι ρίζα τάξης ≥ 1 του αριθμητή και απλή ρίζα του παρανομαστή της $g(z) = z^{-n+1}/(e^{2iz}-1)$, το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Άρα, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,r)} \frac{z^{-n+1}}{e^{2iz}-1}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n+1}}{e^{2iz}-1},\,-\pi\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n+1}}{e^{2iz}-1},\,\pi\right) \\
&= \left.\frac{z^{-n+1}}{(e^{2iz}-1)'}\right|_{z=-\pi} + \left.\frac{z^{-n+1}}{(e^{2iz}-1)'}\right|_{z=\pi} \\
&= \frac{(-\pi)^{-n+1}}{2ie^{-2i\pi}} + \frac{\pi^{-n+1}}{2ie^{2i\pi}} \\
&= \frac{\pi^{-n+1}}{2i}\left[(-1)^{-n+1}+1\right] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 0, -2, -4, \dots, \\ -i\pi^{-n+1} & \text{αν } n = -1, -3, -5, \dots\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

■

8. Αν $a > 0$, δείξτε ότι

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a^2+\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2a^2+1+\cos\phi}\,d\phi = \frac{\pi}{a\sqrt{1+a^2}}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a^2+\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi} \frac{2}{2a^2+1+\cos 2\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2a^2+1+\cos\phi}\,d\phi\,.$$

(αντικατάσταση $\phi = 2\theta$)

Αν $z = e^{i\phi}$, τότε

$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \text{ και } dz = ie^{i\phi}d\phi = izd\phi \Leftrightarrow d\phi = \frac{dz}{iz}\,.$$

Επομένως,

$$\int_0^\pi \frac{1}{a^2+\cos^2\theta}\,d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{2a^2+1+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{dz}{iz} = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2+2(1+2a^2)z+1}\,dz\,.$$

Επειδή $z_{1,2} = -1-2a^2 \pm 2a\sqrt{1+a^2}$ είναι απλές ρίζες της εξίσωσης $z^2+2(1+2a^2)z+1=0$, τα σημεία $-1-2a^2\pm 2a\sqrt{1+a^2}$ είναι απλοί πόλοι της συνάρτησης

$$g(z) = \frac{1}{z^2+21+2a^2)z+1}\,.$$

Το σημείο $-1-2a^2+2a\sqrt{1+a^2}$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $|z|=1$, ενώ το σημείο $-1-2a^2-2a\sqrt{1+a^2}$ βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $|z|=1$. Άρα, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{1}{a^2+\cos^2\theta}\,d\theta &= \frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2+2\left(1+2a^2\right)z+1}\,dz \\
&= \frac{2}{i}2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+2(1+2a^2)z+1},\ -1-2a^2+2a\sqrt{1+a^2}\right) \\
&= 4\pi\ \frac{1}{\left(z^2+2(1+2a^2)z+1\right)'}\Bigg|_{z=-1-2a^2+2a\sqrt{1+a^2}} \\
&= 4\pi\frac{1}{2(-1-2a^2+2a\sqrt{1+a^2})+2(1+2a^2)} = \frac{\pi}{a\sqrt{1+a^2}}\,.
\end{aligned}$$

■

9. Έστω γ_R με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$, το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με κέντρο 0 και ακτίνα $R>0$ και έστω $a,b>0$, $a\neq b$. Δείξτε ότι

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\,dz = 0\,.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx\,.$$

Λύση. Για κάθε $z\in\gamma_R$ είναι

$$\left|\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right| \le \frac{1}{(|z|^2-a^2)(|z|^2-b^2)} = \frac{1}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}\,,\quad R>a,b\,.$$

Το μήκος του ημικύκλιου γ_R είναι πR και επομένως

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\, dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,.$$

Άρα,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\, dz = 0\,.$$

Τα $\pm ai, \pm bi$ είναι απλοί πόλοι της $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$. Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελείται από το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου γ_R με εξίσωση $z\,(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[-R, R]$. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο έτσι ώστε το ανώμαλο σημεία ai και bi της f να βρίσκονται στο εσωτερικό του ημικύκλιου γ_R.

Από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\, dz = 2\pi i \left[\mathrm{Res}\,(f,\, ai) + \mathrm{Res}\,(f,\, bi)\right]\,. \tag{1.7}$$

Είναι

$$\mathrm{Res}\,(f,\, ai) = \lim_{z\to ai} (z-ai) \frac{1}{(z-ai)(z+ai)(z^2+b^2)} = \frac{1}{2ai(b^2-a^2)}$$

και

$$\mathrm{Res}\,(f,\, bi) = \lim_{z\to bi} (z-bi) \frac{1}{(x^2+a^2)(z-bi)(z+bi)} = \frac{1}{2bi(a^2-b^2)}\,.$$

Επομένως, από την (1.7) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx \\ &= 2\pi i \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{a(b^2-a^2)} + \frac{1}{b(a^2-b^2)} \right) \\ &= \frac{\pi}{ab(a+b)}\,. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx = \frac{\pi}{2ab(a+b)}\,.$$

■

1.6 Ακαδημαϊκό έτος 2009–10

ΣΧΟΛΗ ΗΜΜΥ

1η Σειρά Ασκήσεων στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

1. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f = u+iv$ είναι αναλυτική στον τόπο G. Αν $u = v^2$, να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή.

   Λύση. Από τις εξισώσεις Cauchy–Riemann έχουμε

$$\left\{\begin{array}{l} v_y = u_x \\ v_x = -u_y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v_y = 2vv_x \\ v_x = -2vv_y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v_y = 2vv_x \\ v_x = -4v^2v_x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} v_y = 2vv_x \\ \left(1+4v^2\right)v_x = 0 \end{array}\right\}.$$

   Επομένως, $v_x = v_y = u_x = u_y = 0$ και κατά συνέπεια $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 0$ στον τόπο G. Άρα, από γνωστή πρόταση η f θα είναι σταθερή στον τόπο G. ∎

2. Έστω η συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ είναι αναλυτική στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,\,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. Να αποδειχθεί ότι

$$\oint_{C(0,\,r)} \frac{\partial u}{\partial y}\,dx - \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = 0\,,$$

   όπου $C(0,\,r)$ είναι ο κύκλος με κέντρο το 0 και ακτίνα r.

   Λύση. Ως γνωστόν η συνάρτηση u είναι αρμονική και επομένως ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

   Επειδή η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους, από το κλασικό θεώρημα του Green έχουμε

$$\oint_{C^+(0,\,r)} \frac{\partial u}{\partial y}\,dx - \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = -\iint\limits_{D(0,\,r)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dxdy = 0\,.$$

   Άρα,

$$\oint_{C(0,\,r)} \frac{\partial u}{\partial y}\,dx - \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = 0\,.$$

   ∎

3. Να βρεθεί η αναλυτική συνάρτηση $f = u + iv$ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, με $f(1) = 2 + 2i$, τέτοια ώστε

$$u(x,y) = \frac{x\left(x^2+y^2+1\right)}{x^2+y^2}\,.$$

Να εκφραστεί η f σαν συνάρτηση του $z = x + iy$.

Λύση. Η

$$u(x,y) = x + \frac{x}{x^2+y^2}$$

έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 2x\frac{x^2-3y^2}{(x^2+y^2)^3} + 2x\frac{3y^2-x^2}{(x^2+y^2)^3} = 0\,,$$

δηλαδή η u είναι αρμονική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Αν v είναι η συζυγής αρμονική της u, από την εξίσωση Cauchy–Riemann $u_x = v_y$ είναι

$$v_y = 1 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = 1 - \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς y έχουμε

$$v(x,y) = y - \frac{y}{x^2+y^2} + c(x)\,.$$

Από τη δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann $u_y = -v_x$ προκύπτει ότι

$$-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - c'(x) \Leftrightarrow c'(x) = 0 \Leftrightarrow c(x) = c\,.$$

Δηλαδή

$$v(x,y) = y - \frac{y}{x^2+y^2} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Επομένως,

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = z + \frac{1}{z} + ic\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Όμως $f(1) = 2 + 2i$, οπότε $c = 2$. Άρα,

$$f(z) = z + \frac{1}{z} + 2i\,.$$

■

4. Να βρεθεί η εικόνα, μέσω του μετασχηματισμού $w = \tan z$, του χωρίου

$$D = \{z \in \mathbb{C} :\ -\pi/4 \le \Re z \le 0,\ \Im z \ge 0\}\ .$$

Λύση.

- Έστω το ευθύγραμμο τμήμα $y = 0$, $-\pi/4 \leq x \leq 0$. Τότε, $w = \tan(x + iy) = \tan x$. Επειδή η $u = \tan x$ είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $[-\pi/4, 0]$, το ευθύγραμμο τμήμα $y = 0$, $-\pi/4 \leq x \leq 0$ του z-επιπέδου απεικονίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα $v = 0$, $-1 \leq u \leq 0$ του w-επιπέδου.

- Έστω η ημιευθεία $x = 0$, $y \geq 0$. Τότε,

$$w = \tan(iy) = i \tanh y\,, \quad \text{με } (\tanh y)' = \frac{1}{\cosh^2 y} > 0.$$

Επειδή η $t = \tanh y$ είναι γνήσια αύξουσα και

$$\lim_{y\to\infty} \tanh y = \lim_{y\to\infty} \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \lim_{y\to\infty} \frac{1 - e^{-2y}}{1 + e^{-2y}} = 1\,,$$

η ημιευθεία $x = 0$, $y \geq 0$ του z-επιπέδου απεικονίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα $u = 0$, $0 \leq v \leq 1$ του w-επιπέδου.

- Έστω η ημιευθεία $x = -\pi/4$, $y \geq 0$. Τότε,

$$\begin{aligned} w = u(x, y) + iu(x, y) &= \tan(-\pi/4 + iy) \\ &= \frac{\tan(-\pi/4) + \tan(iy)}{1 - \tan(-\pi/4)\tan(iy)} \\ &= \frac{-1 + i\tanh y}{1 + i\tanh y} \\ &= \frac{(-1 + i\tanh y)(1 - i\tanh y)}{1 + \tanh^2 y} = \frac{-1 + \tanh^2 y}{1 + \tanh^2 y} + i\frac{2\tanh y}{1 + \tanh^2 y}\,. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$u^2(x, y) + v^2(x, y) = \frac{(-1 + \tanh^2 y)^2}{(1 + \tanh^2 y)^2} + \frac{4\tanh^2 y}{(1 + \tanh^2 y)^2} = \frac{(1 + \tanh^2 y)^2}{(1 + \tanh^2 y)^2} = 1\,.$$

Επίσης, επειδή $y \geq 0$ έχουμε

$$-1 \leq u(x, y) = 1 - 2\frac{1}{1 + \tanh^2 y} < 0 \ \text{ με } \lim_{y\to\infty} u(x, y) = 0$$

και

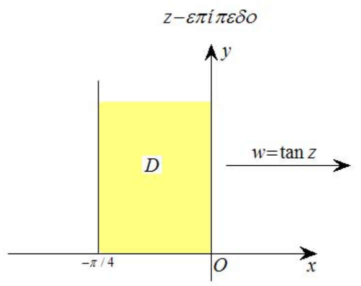
$$0 \leq v(x, y) = \frac{2\tanh y}{1 + \tanh^2 y} \leq 1\,.$$

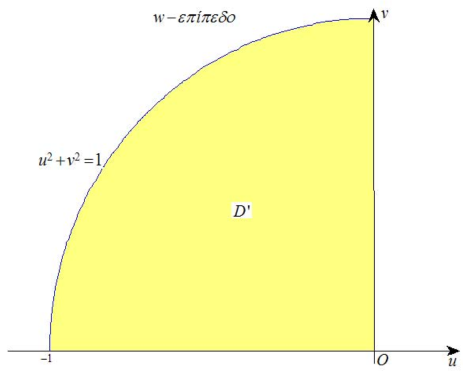
Δηλαδή, η ημιευθεία $x = -\pi/4$, $y \geq 0$ του z-επιπέδου απεικονίζεται στο τόξο του μοναδιαίου κύκλου που βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο του w-επιπέδου.

- Τέλος, το σημείο $z = -\pi/6 + i\ln 2 \in D$ απεικονίζεται στο $w = \tan(-\pi/6 + i\ln 2) = (-4\sqrt{3} + 15i)/21$.

Άρα, το χωρίο D του z-επιπέδου απεικονίζεται μέσω του μετασχηματισμού $w = \tan z$ στο χωρίο

$$D' = \left\{ w = u + iv \in \mathbb{C} : \, u^2 + v^2 \le 1 \, , \, -1 \le u \le 0, \, 0 \le v \le 1 \right\} .$$





■

5. Έστω η μιγαδική συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $C\,(0,1)$ και έστω $a \in \mathbb{C}$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^{+}(0,\,1)} \frac{\overline{f(z)}}{z - a}\, dz \,,$$

αν (i) $|a| < 1$ και (ii) $|a| > 1$.

Λύση. Η παραμετρική εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου $C^{+}(0,1)$ με θετική φορά διαγραφής είναι $z(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\overline{f(e^{i\theta})}}{e^{i\theta}-a}\, ie^{i\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \overline{\left(\frac{f(e^{i\theta})}{e^{-i\theta}-\overline{a}}(-ie^{-i\theta})\right)}\, d\theta \\
&= \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{-i\theta}-\overline{a}}\, ie^{-i\theta}\, d\theta} \\
&= \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-\overline{a}e^{2i\theta}}\, ie^{i\theta}\, d\theta} \\
&= \overline{\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,1)} \frac{f(z)}{z-\overline{a}z^2}\, dz} \\
&= \overline{\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,1)} \frac{f(z)}{z}\, dz} - \overline{\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,1)} \frac{f(z)}{z-1/\overline{a}}\, dz}
\end{aligned}
$$

Άρα, από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy και από το θεώρημα Cauchy έχουμε

$$
I = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,1)} \frac{\overline{f(z)}}{z-a}\, dz = \begin{cases} \overline{f(0)} & \text{αν } |a| < 1\,, \\ \overline{f(0)} - \overline{f(1/\overline{a})} & \text{αν } |a| > 1\,. \end{cases}
$$

■

6. Έστω η μιγαδική συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $C(0,1)$. Αν $|f(z) - z| < 1$ στο μοναδιαίο κύκλο, δείξτε ότι

$$|f'(1/2)| \leq 8\,.$$

Λύση. *1ος τρόπος*. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$f'(1/2) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z-1/2)^2}\, dz\,.$$

Για κάθε $|z| = 1$, δηλαδή για κάθε z στο μοναδιαίο κύκλο, είναι

$$|z - 1/2| \geq |z| - 1/2 = 1 - 1/2 = 1/2$$

και

$$|f(z)| = |(f(z) - z) + z| \leq |f(z) - z| + |z| < 1 + 1 = 2\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
|f'(1/2)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{(z-1/2)^2}\,dz\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{|f(z)|}{|z-1/2|^2}\,|dz| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{2}{(1/2)^2}\,|dz| \\
&= \frac{8}{2\pi}\oint_{|z|=1}|dz| = \frac{8}{2\pi}2\pi = 8\,.
\end{aligned}$$

2ος τρόπος. Από τις ανισότητες Cauchy έχουμε

$$|f'(1/2)| \le \frac{M}{1/2} = 2M\,,$$

όπου $M = \max\{|f(z)| : z \in C(1/2,\, 1/2)\}$. Επειδή για κάθε $z \in C(0,1)$ είναι $|f(z)| < 2$ και ο κύκλος $C(1/2,\, 1/2)$ βρίσκεται μέσα στον κύκλο $C(0,1)$, από την αρχή μεγίστου συνεπάγεται ότι $M < 2$. Άρα,

$$|f'(1/2)| < 4\,.$$

■

7. Έστω η ακέραια συνάρτηση

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $R > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|R^n \le 2M(2R)\,, \quad \text{όπου } M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}.$$

Λύση. Από τις ανισότητες Cauchy έχουμε

$$|a_n| = \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} \le \frac{M(2R)}{(2R)^n}\,.$$

Επομένως,

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|R^n \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M(2R)}{(2R)^n}R^n = M(2R)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 2M(2R)\,.$$

■

8. (*προαιρετική άσκηση*). Ολοκληρώνοντας την ακέραια συνάρτηση $f(z) = e^{-i\lambda z}e^{-z^2/2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, πάνω σε μια κατάλληλη κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη γ του μιγαδικού επιπέδου, να αποδειχθεί ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}e^{-\lambda^2/2} \quad \text{και επομένως} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cos\lambda x\,dx = \sqrt{2\pi}e^{-\lambda^2/2}\,.$$

2η Σειρά Ασκήσεων στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

1. Υποθέτουμε ότι η ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι τέτοια ώστε $\Im f(z) \geq 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

   Υπόδειξη. Θεωρείστε τη συνάρτηση $g(z) = e^{if(z)}$.

   Λύση. Επειδή $\Im f(z) \geq 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$, είναι

   $$|g(z)| = \left|e^{if(z)}\right| = \left|e^{i(\Re f(z)+i\Im f(z))}\right| = \left|e^{-\Im f(z)+i\Re f(z)}\right| = e^{-\Im f(z)} \leq e^0 = 1\,.$$

   Επομένως, από το κλασικό θεώρημα Liouville η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. Τότε και η $\left|e^{if(z)}\right| = e^{-\Im f(z)}$ είναι σταθερή οπότε και η $\Im f(z)$ είναι σταθερή. Άρα, από γνωστή πρόταση και η συνάρτηση f θα είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. ■

2. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0,\,1)$. Αν $f(z) = 1$ για κάθε z στο ημικύκλιο γ^+ με εξίσωση $z(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, δείξτε ότι $f(z) = 1$ για κάθε $z \in \overline{D}(0,\,1)$.

   Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(z) := (f(z)-1)(f(-z)-1)$ η οποία είναι αναλυτική στο $\overline{D}(0,\,1)$. Αν $z \in \gamma^+$, τότε $F(z) = 0$. Επίσης αν $z \in \gamma^-$, όπου γ^- είναι το κάτω ημικύκλιο με εξίσωση $z(\theta) = e^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, τότε το $-z \in \gamma^+$ οπότε και πάλι $F(z) = 0$. Επομένως, για κάθε z στο μοναδιαίο κύκλο $C(0,\,1)$ είναι $F(z) = 0$ και από την αρχή μεγίστου θα είναι $F(z) = 0$ για κάθε $z \in \overline{D}(0,\,1)$. Ισοδύναμα,

   $$(f(z)-1)(f(-z)-1) = 0\,, \quad \text{για κάθε } \overline{D}(0,\,1).$$

   Τότε, από γνωστή πρόταση θα είναι είτε $f(z) - 1 \equiv 0$ ή $f(-z) - 1 \equiv 0$ στο $\overline{D}(0,\,1)$. Επειδή η $f(z) - 1 \equiv 0$ στο $\overline{D}(0,\,1)$ είναι ισοδύναμη με την $f(-z) - 1 \equiv 0$ στο $\overline{D}(0,\,1)$, τελικά έχουμε $f(z) \equiv 1$ στο $\overline{D}(0,\,1)$.

Χρησιμοποιήσαμε την παρακάτω πρόταση που είναι ένα πόρισμα του *θεωρήματος ταυτοτισμού.*

Πρόταση. Έστω $f, g : G \to \mathbb{C}$ αναλυτικές συναρτήσεις στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$ με

$$f(z)g(z) = 0\,, \quad \text{για κάθε } z \in G\,.$$

Τότε είτε $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$ στο G. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [9]. ■

3. Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 13z^2 + 36}\,.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα κατά Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 0$ σ' ένα δακτύλιο που περιέχει το $2 + i$. Ποιός είναι ο μεγαλύτερος τέτοιος δακτύλιος στον οποίο το ανάπτυγμα Laurent της f ισχύει;

Λύση. Τα $\pm 2i$, $\pm 3i$ είναι τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f. Είναι

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)} = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{z^2+4} - \frac{1}{z^2+9}\right].$$

Ως γνωστόν, $1/(1+w) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w| < 1$ (γεωμετρική σειρά).

Αν $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}$, το $2 + i \in \Delta$ και το ανάπτυγμα Laurent της f στο δακτύλιο Δ είναι

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{z^2+4} - \frac{1}{z^2+9}\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+4/z^2} - \frac{1}{9}\frac{1}{1+z^2/9}\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{z^2}\right)^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z^2}{9}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{4^n}{z^{2n+2}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{9^{n+1}}\right].
\end{aligned}$$

■

4. Έστω $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ το ανάπτυγμα κατά Laurent της αναλυτικής συνάρτησης f στο διάτρητο δίσκο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$. Αν για κάθε $z \in \Delta$

$$|f(z)| \le C|z - z_0|^{-p}\,, \quad 0 < p < 1\,,$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Laurent να αποδειχθεί ότι το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f.

Λύση. Από το θεώρημα του Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(z_0,\,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\,,$$

όπου $C^+(z_0,r)$ είναι ο κύκλος με κέντρο z_0 και ακτίνα r, $0<r<R$. Επομένως

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C^+(z_0,\,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\oint_{C^+(z_0,\,r)} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\,|dz| \\
&\le \frac{C}{2\pi r^{n+1+p}}\oint_{C^+(z_0,\,r)} |dz| \qquad\qquad (|f(z)|\le C|z-z_0|^{-p}) \\
&= \frac{C}{2\pi r^{n+1+p}} 2\pi r = \frac{C}{r^{n+p}}\,.
\end{aligned}$$

Επειδή το $p\in(0,1)$, για κάθε $n\le -1 \Leftrightarrow -n\ge 1$ έχουμε

$$|a_n| \le C r^{-n-p} \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0\,.$$

Επομένως $a_n = 0$ για $n=-1,-2,-3,\ldots$. Άρα, το z_0 είναι επουσιώδες(απαλείψιμο) ανώμαλο σημείο της f. ∎

5. (α΄) Έστω $e^{z-1/z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = e^{z-1/z}$ με κέντρο το $z_0 = 0$ στο διάτρητο δίσκο $\Delta = \{z\in\mathbb{C} : 0<|z|<\infty\}$. Να βρεθεί ο συντελεστής c_n, $n\in\mathbb{N}$.

   (β΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{z-1/z}}{z^{n+1}}\,dz = i\int_0^{2\pi} \cos\left(n\theta - 2\sin\theta\right)\,d\theta\,,\quad n\in\mathbb{N}\,.$$

   (γ΄) Χρησιμοποιώντας τα (α΄) και (β΄) να αποδειχθεί ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(n\theta - 2\sin\theta\right)\,d\theta = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\,.$$

Λύση.

(α΄) Το 0 είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της $f(z) = e^{z-1/z}$. Επειδή

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\,,\quad \text{για κάθε } w\in\mathbb{C},$$

το ανάπτυγμα Laurent της $f(z) = e^z e^{-1/z}$ με κέντρο $z_0 = 0$ στο διάτρητο δίσκο: $0 < |z| < \infty$ είναι

$$\begin{aligned}
f(z) &= \left(1 + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{z^{n+k}}{(n+k)!} + \cdots\right) \\
&\quad \times \left(1 - \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} - \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!z^k} + \cdots\right) \\
&= \cdots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{1!(n+1)!} + \frac{1}{2!(n+2)!} - \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!(n+k)!} + \cdots\right) z^n + \cdots \\
&= \cdots + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} z^n + \cdots .
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$e^{z-1/z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n\,, \quad \text{με } c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

(β΄) Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Επειδή $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} \frac{e^{z-1/z}}{z^{n+1}}\, dz &= i \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}}{e^{in\theta}}\, d\theta \\
&= i \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\sin\theta}}{e^{in\theta}}\, d\theta \\
&= i \int_0^{2\pi} e^{i(2\sin\theta - n\theta)}\, d\theta \\
&= i \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - 2\sin\theta)\, d\theta + \int_0^{2\pi} \sin(n\theta - 2\sin\theta)\, d\theta\,.
\end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(n\theta - 2\sin\theta)\, d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta - 2\sin\theta)\, d\theta \\
&\qquad \text{(η συνάρτηση } f(\theta) = \sin(n\theta - 2\sin\theta) \text{ είναι } 2\pi\text{-περιοδική)} \\
&= \int_{-\pi}^{0} \sin(n\theta - 2\sin\theta)\, d\theta + \int_0^{\pi} \sin(n\theta - 2\sin\theta)\, d\theta \\
&= -\int_{\pi}^{0} \sin(-n\phi + 2\sin\phi)\, d\theta + \int_0^{\pi} \sin(n\theta - 2\sin\theta)\, d\theta \\
&\qquad \text{(αντικατάσταση } \theta = -\phi\text{)} \\
&= -\int_0^{\pi} \sin(n\phi - 2\sin\phi)\, d\theta + \int_0^{\pi} \sin(n\theta - 2\sin\theta)\, d\theta = 0\,.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{z-1/z}}{z^{n+1}}\, dz = i \int_0^{2\pi} \cos\left(n\theta - 2\sin\theta\right)\, d\theta\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

<u>*Σημείωση*</u>. Αν η ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, είναι περιττή, τότε

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0\,.$$

(γ΄) Αν $n \in \mathbb{N}$, από το (α΄) προκύπτει ότι

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{z-1/z}}{z^{n+1}}, 0\right) = c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\,.$$

Άρα, από το (β΄) έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(n\theta - 2\sin\theta\right)\, d\theta &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{e^{z-1/z}}{z^{n+1}}\, dz \\ &= \operatorname{Res}\left(\frac{e^{z-1/z}}{z^{n+1}}, 0\right) \\ &\qquad \text{(θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\,.\end{aligned}$$

■

6. Έστω $\frac{1}{\sin \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ στο διάτρητο δίσκο $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ και έστω $\frac{1}{\sin \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n$ στο δακτύλιο $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ τα αναπτύγματα κατά Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Laurent δείξτε ότι

$$c_n - d_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{αν } n \text{ περιττός}\,, \\ 0 & \text{αν } n \text{ άρτιος}\,. \end{cases}$$

Λύση. Από το θεώρημα του Laurent οι συντελεστές c_n, d_n δίνονται από τους τύπους

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,r)} \frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}\, dz\,, \quad d_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,R)} \frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}\, dz\,,$$

όπου ο κύκλος $C^+(0, r)$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $0 < r < 1$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ_1 και ο κύκλος $C^+(0, R)$ με κέντρο 0, ακτίνα R, $1 < R < 2$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ_2.

Το 0 είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο της $f(z) = \frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}$ στο εσωτερικό του κύκλου $C^+(0, r)$ και από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,r)} \frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}\,dz = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}, 0\right).$$

Τα ανώμαλα σημεία -1, 0 και 1 της $f(z) = \frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}$ βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $C^+(0, R)$ και από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,R)} \frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}\,dz \\ &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}, 1\right). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$c_n - d_n = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}, -1\right) - \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+1}\sin \pi z}, 1\right).$$

Επειδή τα ανώμαλα σημεία ± 1 είναι απλοί πόλοι της $f(z) = 1/z^{n+1}\sin \pi z$, έχουμε

$$\begin{aligned} c_n - d_n &= -\left.\frac{z^{-(n+1)}}{(\sin \pi z)'}\right|_{z=-1} - \left.\frac{z^{-(n+1)}}{(\sin \pi z)'}\right|_{z=1} \\ &= \frac{(-1)^{-(n+1)}}{\pi} + \frac{1}{\pi} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{αν } n \text{ περιττός}, \\ 0 & \text{αν } n \text{ άρτιος}. \end{cases} \end{aligned}$$

■

7. Αν $a > b > 0$, χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση δείξτε ότι

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{a + b\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{b^2}\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right).$$

Λύση. Είναι

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{a + b\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a + b\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{a + b\cos\theta}\,d\theta = \Re\left(\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-e^{2i\theta}}{a + b\cos\theta}\,d\theta\right).$$

Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Επειδή $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$ και $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-e^{2i\theta}}{a + b\cos\theta}\,d\theta &= \frac{1}{4}\oint_{|z|=1} \frac{1 - z^2}{iz\left[a + \frac{b}{2}\left(z + z^{-1}\right)\right]}\,dz \\ &= \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1} \frac{1 - z^2}{bz^2 + 2az + b}\,dz. \end{aligned}$$

Τα σημεία $\left(-a \pm \sqrt{a^2-b^2}\right)/b$ είναι απλοί πόλοι της $f(z) = \frac{1-z^2}{bz^2+2az+b}$. Επειδή μόνο το σημείο $\left(-a + \sqrt{a^2-b^2}\right)/b$ βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων είναι

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\,d\theta &= \Re\left[\frac{1}{2i}2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1-z^2}{bz^2+2az+b}, \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\right] \\
&= \pi\Re\left[\frac{1-\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)^2}{2\left(-a+\sqrt{a^2-b^2}\right)+2a}\right] \\
&= \frac{\pi}{b^2}\Re\left[\frac{2\left(b^2-a^2+a\sqrt{a^2-b^2}\right)}{2\sqrt{a^2-b^2}}\right] = \frac{\pi}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right).
\end{aligned}$$

■

8. Έστω γ_R, με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, το ημικύκλιο στο άνω ημιεπίπεδο με κέντρο 0 και ακτίνα $R > 0$. Δείξτε πρώτα ότι

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{z-1}{z^5-1}\,dz = 0$$

και στη συνέχεια ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-1}{x^5-1}\,dx = \frac{4\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}.$$

Λύση. Για κάθε $z \in \gamma_R^*$ είναι

$$\left|\frac{z-1}{z^5-1}\right| \le \frac{|z|+1}{|z|^5-1} = \frac{R+1}{R^5-1}.$$

Το μήκος του ημικύκλιου γ_R^* είναι πR και επομένως

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{z-1}{z^5-1}\,dz\right| \le \frac{\pi R(R+1)}{R^5-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Άρα,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{z-1}{z^5-1}\,dz = 0.$$

Τα $z_k = e^{2k\pi i/5}$, $k = 0,1,2,3,4$ είναι τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z) = \frac{z-1}{z^5-1}$. Το $z_0 = 1$ είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f και τα $z_1 = e^{2\pi i/5}$, $z_2 = e^{4\pi i/5}$ είναι απλοί πόλοι της f που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο. Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $[-R, R]$ και το ημικύκλιο γ_R, με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο έτσι ώστε οι απλοί πόλοι $z_1 = e^{2\pi i/5}$ και $z_2 = e^{4\pi i/5}$ της f να βρίσκονται εσωτερικά του ημικύκλιου γ_R. Είναι

$$\operatorname{Res}\left(f,\, e^{2\pi i/5}\right) = \frac{e^{2\pi i/5} - 1}{5\left(e^{2\pi i/5}\right)^4} = \frac{e^{4\pi i/5} - e^{2\pi i/5}}{5}$$

και

$$\operatorname{Res}\left(f,\, e^{4\pi i/5}\right) = \frac{e^{4\pi i/5} - 1}{5\left(e^{4\pi i/5}\right)^4} = \frac{e^{8\pi i/5} - e^{4\pi i/5}}{5}\,.$$

Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{-R}^{R} \frac{x-1}{x^5-1}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{z-1}{z^5-1}\,dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}\left(f,\, e^{2\pi i/5}\right) + \operatorname{Res}\left(f,\, e^{4\pi i/5}\right)\right]\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^5-1}\,dx &= \frac{2\pi i}{5}\left(e^{4\pi i/5} - e^{2\pi i/5} + e^{8\pi i/5} - e^{4\pi i/5}\right) \\
&= \frac{2\pi i}{5}\left(-e^{2\pi i/5} + e^{-2\pi i/5}\right) \\
&= \frac{2\pi i}{5}\left(-2i\sin\left(2\pi/5\right)\right) = \frac{4\pi}{5}\sin\left(2\pi/5\right)\,.
\end{aligned}$$

■

1.7 Ακαδημαϊκό έτος 2008–9

ΣΧΟΛΗ ΗΜΜΥ

1η Σειρά Ασκήσεων στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(z) = f(x+iy) = 2\left(x^2 - y^2\right)\cos x\cosh y + 4xy\sin x\sinh y - 2\sin x\cosh y$$
$$+ 2i\left[\left(y^2 - x^2\right)\sin x\sinh y + 2xy\cos x\cosh y - \cos x\sinh y\right]$$

είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και να υπολογιστεί η παράγωγος $f'(z)$ συναρτήσει του z.

Λύση. Είναι $f = u+iv$, με $u(x,y) = 2\left(x^2 - y^2\right)\cos x\cosh y + 4xy\sin x\sinh y - 2\sin x\cosh y$ και $v(x,y) = 2\left[\left(y^2 - x^2\right)\sin x\sinh y + 2xy\cos x\cosh y - \cos x\sinh y\right]$. Οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$ και ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy–Riemann. Πράγματι,

$$u_x = v_y = 2(y^2 - x^2)\sin x\cosh y + (4x-2)\cos x\cosh y + 4y\sin x\sinh y + 4xy\cos x\sinh y$$

και

$$u_y = -v_x = 2(x^2 - y^2)\cos x\sinh y + (4x-2)\sin x\sinh y - 4y\cos x\cosh y + 4xy\sin x\cosh y\,.$$

Επομένως η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$. Υπολογισμός της παραγώγου $f'(z)$:
Επειδή οι u, v είναι συζυγείς αρμονικές, ως γνωστόν

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = 2z^2\cos z - 2\sin z = (z^2+i)e^{iz} + (z^2-i)e^{-iz}\,.$$

Άρα,

$$f'(z) = 2(2z-1)\cos z - 2z^2\sin z = (iz^2+2z-1)e^{iz} - (iz^2-2z+1)e^{-iz}\,.$$

■

2. Να βρεθεί η ακέραια συνάρτηση $f = u+iv$, με $f(0) = i$, τέτοια ώστε

$$u(x,y) = -e^x(x\sin y + y\cos y)\,.$$

Να εκφραστεί η f σαν συνάρτηση του $z = x+iy$.

Λύση. Εύκολα διαπιστώνεται ότι $u_{xx}+u_{yy}=0$, δηλαδή η u είναι αρμονική στο $\mathbb{C}$. Ως γνωστόν, στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C}$ υπάρχει συζυγής αρμονική v της u. Δηλαδή η $f=u+iv$ είναι ακέραια συνάρτηση. Από την εξίσωση Cauchy–Riemann $u_x=v_y$ έχουμε

$$v_y=-e^x x\sin y-e^x\sin y-e^x y\cos y\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}v\left(x,y\right)&=e^x x\cos y+e^x\cos y-e^x\int y\cos y\,dy\\&=e^x x\cos y+e^x\cos y-e^x\left(y\sin y+\cos y\right)+c\left(x\right)\\&=e^x x\cos y-e^x y\sin y+c\left(x\right)\,.\end{aligned}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann $u_y=-v_x$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}&-e^x x\cos y+e^x y\sin y-e^x\cos y=-e^x x\cos y-e^x\cos y+e^x y\sin y+c'\left(x\right)\\&\Leftrightarrow c'\left(x\right)=0\Leftrightarrow c\left(x\right)=c\,.\end{aligned}$$

Δηλαδή, $v\left(x,y\right)=e^x x\cos y-e^x y\sin y+c$ και η ακέραια συνάρτηση

$$f\left(z\right)=u\left(z,0\right)+iv\left(z,0\right)=i\left(ze^z+c\right)\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.$$

Όμως $f\left(0\right)=i$, οπότε $c=1$. Άρα,

$$f\left(z\right)=ize^z+i\,.$$

■

3. Αν $w=\operatorname{Log}z$ είναι ο κύριος(πρωτεύον) κλάδος του μιγαδικού λογαρίθμου, να βρεθεί η εικόνα του μοναδιαίου δίσκου $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ μέσω της συνάρτησης

$$w=f(z)=\operatorname{Log}\frac{1+z}{1-z}\,.$$

Λύση. Ως γνωστόν, η συνάρτηση $w=\operatorname{Log}z=\ln|z|+i\operatorname{Arg}z$, $-\pi<\operatorname{Arg}z<\pi$, είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ και $1-1$. Η αντίστροφή της είναι η εκθετική συνάρτηση. Επομένως,

$$w=\operatorname{Log}\frac{1+z}{1-z}\Leftrightarrow\frac{1+z}{1-z}=e^w\Leftrightarrow z=\frac{e^w-1}{e^w+1}\,.$$

Επειδή $|z|<1$, αν $w=u+iv$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^w-1}{e^w+1}\right|<1 &\Leftrightarrow |e^w-1|^2<|e^w+1|^2\\ &\Leftrightarrow e^{w+\overline{w}}-e^w-e^{\overline{w}}+1<e^{w+\overline{w}}+e^w+e^{\overline{w}}+1\\ &\Leftrightarrow 2\left(e^w+e^{\overline{w}}\right)>0\\ &\Leftrightarrow 4e^u\cos v>0\\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Άρα, η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου $D(0,1)$ μέσω της $w=f(z)=\operatorname{Log}\frac{1+z}{1-z}$ είναι η λωρίδα

$$\left\{w=u+iv\in\mathbb{C}:\ |v|<\frac{\pi}{2}\right\}\,.$$

■

4. Να αποδειχθεί ότι

$$\left|\int_\gamma e^{iz^2}\,dz\right|\le\frac{\pi}{4r}\left(1-e^{-r^2}\right)\,,$$

όπου γ η καμπύλη με εξίσωση $\gamma\left(\theta\right)=re^{i\theta}$, $r>0$ και $0\le\theta\le\pi/4$.

Υπόδειξη. Ως γνωστόν,

$$\sin t\ge\frac{2t}{\pi}\,,\quad \text{για κάθε } 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

Λύση. Για κάθε $z\in\gamma^*$ είναι

$$\left|e^{iz^2}\right|=\left|e^{ir^2e^{2i\theta}}\right|=\left|e^{ir^2\cos 2\theta}\cdot e^{-r^2\sin 2\theta}\right|=e^{-r^2\sin 2\theta}\,.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma e^{iz^2}\,dz\right| &= \left|ir\int_0^{\pi/4}e^{ir^2e^{2i\theta}}\cdot e^{i\theta}\,d\theta\right|\\ &\le r\int_0^{\pi/4}\left|e^{ir^2e^{2i\theta}}\cdot e^{i\theta}\right|\,d\theta\\ &= r\int_0^{\pi/4}e^{-r^2\sin 2\theta}\,d\theta\\ &= \frac{r}{2}\int_0^{\pi/2}e^{-r^2\sin t}\,dt && (\text{αντικατάσταση } t=2\theta)\\ &\le \frac{r}{2}\int_0^{\pi/2}e^{-2tr^2/\pi}\,dt && (\text{για κάθε } t\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right] \text{ είναι } \sin t\ge\tfrac{2t}{\pi})\\ &= -\left.\frac{\pi e^{-2tr^2/\pi}}{4r}\right|_{t=0}^{t=\pi/2}=\frac{\pi}{4r}\left(1-e^{-r^2}\right)\,.\end{aligned}$$

■

5. Αν $w = \operatorname{Log} z$ είναι ο κύριος(πρωτεύον) κλάδος του μιγαδικού λογαρίθμου, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{[-1,i]} \frac{1}{z \operatorname{Log} z}\, dz\,,$$

όπου $[-1,i]$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα στο 2ο τεταρτημόριο με αρχή το -1 και πέρας το i

Λύση. Η $w = \operatorname{Log} z$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ και απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο $A = \{z \in \mathbb{C} :\ \Im z > 0\}$ στη λωρίδα

$$\Omega = \{w \in \mathbb{C} :\ 0 < \Im w < \pi\}\ .$$

Έστω $[-1 + t\,(1+i)\,,\, i]$, $0 < t < 1$, το ευθύγραμμο τμήμα στο 2ο τεταρτημόριο με αρχή το $-1 + t\,(1+i)$ και πέρας το i. Επειδή

$$(\operatorname{Log}(\operatorname{Log} z))' = \frac{1}{z \operatorname{Log} z}\,, \quad \text{για κάθε } z \in A,$$

από το θεμελιώδες θεώρημα ολοκλήρωσης είναι

$$\begin{aligned}
\oint_{[-1+t(1+i),\,i]} \frac{1}{z \operatorname{Log} z}\, dz &= \operatorname{Log}(\operatorname{Log} i) - \operatorname{Log}(\operatorname{Log}(-1 + t\,(1+i))) \\
&= \operatorname{Log}\left(i\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{Log}(\operatorname{Log}(-1 + t\,(1+i))) \\
&= \ln\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2} - \operatorname{Log}(\operatorname{Log}(-1 + t\,(1+i)))\ .
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma} \frac{1}{z \operatorname{Log} z}\, dz &= \ln\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2} - \lim_{t\to 0^+} \operatorname{Log}(\operatorname{Log}(-1 + t\,(1+i))) \\
&= \ln\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2} - \operatorname{Log}(i\pi) \\
&= \ln\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2} - \left(\ln\pi + i\frac{\pi}{2}\right) = -\ln 2\,.
\end{aligned}$$

■

6. Έστω $f : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στον απλά συνεκτικό τόπο G, με $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in G$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει αναλυτική συνάρτηση h στο G τέτοια ώστε

$$f(z) = e^{h(z)}\,.$$

<u>Σημείωση</u>. Η h είναι ένας *αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου της f στο G*.

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο [9]. □

7. Έστω $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραιες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$f^2(z) + g^2(z) = 1\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει ακέραια συνάρτηση h τέτοια ώστε

$$f(z) = \cos(h(z)) \quad \text{και} \quad g(z) = \sin(h(z))\,.$$

Λύση. Από την υπόθεση, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ είναι

$$[f(z) + ig(z)]\,[f(z) - ig(z)] = 1\,.$$

Επειδή η ακέραια συνάρτηση $f + ig$ δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{C}$, από την προηγούμενη άσκηση υπάρχει αναλυτική συνάρτηση h στο $\mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$f(z) + ig(z) = e^{ih(z)}\,.$$

Επομένως

$$f(z) - ig(z) = \frac{1}{f(z) + ig(z)} = e^{-ih(z)}\,.$$

Άρα,

$$f(z) = \frac{e^{ih(z)} + e^{-ih(z)}}{2} = \cos(h(z)) \quad \text{και} \quad g(z) = \frac{e^{ih(z)} - e^{-ih(z)}}{2i} = \sin(h(z))\,.$$

■

8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{z+1}{z^2(z-2)}\, dz\,,$$

όπου C^+ είναι κύκλος με θετική φορά διαγραφής που δεν διέρχεται από τα σημεία 0 και 2. Εξετάστε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

Λύση.

(α') <u>Ο κύκλος C^+ δεν περιέχει τα σημεία 0 και 2:</u> Από το θεώρημα του Cauchy είναι $I = 0$.

(β') Ο κύκλος C^+ περιέχει μόνο το σημείο 0: Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$I = \frac{1!}{2\pi i}\oint_{C^+} \frac{(z+1)\,/\,(z-2)}{z^2}\,dz = \left(\frac{z+1}{z-2}\right)'\bigg|_{z=0} = \frac{-3}{(z-2)^2}\bigg|_{z=0} = -\frac{3}{4}\,.$$

(γ') Ο κύκλος C^+ περιέχει μόνο το σημείο 2: Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy έχουμε

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+} \frac{(z+1)\,/z^2}{z-2}\,dz = \frac{z+1}{z^2}\bigg|_{z=2} = \frac{3}{4}\,.$$

(δ') Ο κύκλος C^+ περιέχει τα σημεία 0 και 2: Έστω C_1^+ και C_2^+ δύο κύκλοι που δεν τέμνονται και βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου C^+, έτσι ώστε ο C_1^+ περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο 0 και ο C_2^+ περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο 2. Από το γενικευμένο θεώρημα του Cauchy έχουμε

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+} \frac{z+1}{z^2(z-2)}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1^+} \frac{z+1}{z^2(z-2)}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2^+} \frac{z+1}{z^2(z-2)}\,dz \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0\,. \qquad \text{(περιπτώσεις (β') και (γ'))} \end{aligned}$$

■

2η Σειρά Ασκήσεων στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

1. (α') Έστω η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,\,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ και έστω $M > 0$. Αν $|f(z)| > M$ για κάθε $|z| = R$ και $|f(0)| < M$, να αποδειχθεί ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στον ανοικτό δίσκο $D(0,\,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

   (β') Χρησιμοποιώντας το (α') να αποδειχθεί το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας: κάθε πολυώνυμο

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,, \quad a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}\,, \quad a_n \neq 0$$

   έχει n ρίζες στο $\mathbb{C}$.

   Υπόδειξη. Αρκεί να αποδειχθεί ότι το p έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$. Είναι $\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \infty$.

Λύση.

(α') Αν υποθέτουμε ότι η f δεν μηδενίζεται στον ανοικτό δίσκο $D(0,\, R)$, από την αρχή ελαχίστου καταλήγουμε σε άτοπο (η f δεν είναι σταθερή). Επομένως η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στον ανοικτό δίσκο $D(0,\, R)$.

(β') Έστω $M > |a_0|$. Επειδή $\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \infty$, υπάρχει κύκλος $C(0,\, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ τέτοιος ώστε $|p(z)| > M$ για κάθε $z \in C(0,\, R)$, δηλαδή για κάθε $|z| = R$. Επειδή $|p(0)| = |a_0| < M$, από το (α') το πολυώνυμο p έχει τουλάχιστον μία ρίζα στον ανοικτό δίσκο $D(0,\, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

■

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z + 2 + 2i}{(z+1)(z^2+2i)}\,.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα κατά Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 0$ σ' ένα δακτύλιο που περιέχει το $3/2$. Ποιός είναι ο μεγαλύτερος τέτοιος δακτύλιος στον οποίο το ανάπτυγμα Laurent της f ισχύει;

Λύση. Τα -1, $\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$ και $\sqrt{2}e^{7i\pi/4}$ είναι τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f. Είναι

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{2}{z^2+2i}\,.$$

Ως γνωστόν, $1/(1-w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ και $1/(1+w) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n$, $|w| < 1$ (γεωμετρική σειρά).

Αν $\Delta = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| > \sqrt{2}\right\}$, το $3/2 \in \Delta$ και το ανάπτυγμα Laurent της f στο δακτύλιο Δ είναι

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z+1} + \frac{2}{z^2+2i} \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{1+1/z} + \frac{1}{z^2}\frac{2}{1+2i/z^2} \\
&= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2i}{z^2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2i)^n}{z^{2n+2}}\,.
\end{aligned}$$

■

3. Υποθέτουμε ότι γ είναι απλή, κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη με θετική φορά διαγραφής και ότι το $z_0 = 0$ βρίσκεται στο εσωτερικό της γ. Αν $n \in \mathbb{Z}$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma w^{-n}\sin(1/w)\,dw = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} & \text{αν } n=-2k,\ k=0,1,2,\dots, \\ 0 & \text{διαφορετικά .}\end{cases}$$

Λύση. Επειδή για κάθε $z \in \mathbb{C}$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

είναι

$$w\sin(1/w) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{w^{-2k}}{(2k+1)!}\,,\quad 0<|w|<\infty\,.$$

Επομένως αν $0<|w|<\infty$, τότε

$$w\sin(1/w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n w^n\,,$$

όπου

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} & \text{αν } n=-2k,\ k=0,1,2,\dots, \\ 0 & \text{διαφορετικά .}\end{cases}$$

Όμως, από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,r)}\frac{w\sin(1/w)}{w^{n+1}}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,r)}w^{-n}\sin(1/w)\,dw\,.$$

όπου $C^+(0,r)$ είναι κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα $r>0$. Άρα, από το γενικευμένο θεώρημα Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma w^{-n}\sin(1/w)\,dw = \oint_{C^+(0,r)}w^{-n}\sin(1/w)\,dw = a_n\,.$$

■

4. (α΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\mathrm{Res}\left(e^{1/z}e^{2z},\,0\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!(n+1)!}\,.$$

(β΄) Υποθέτουμε ότι η ακέραια συνάρτηση f δεν έχει ρίζες στον πραγματικό άξονα. Αν $n \in \mathbb{Z}$, να αποδειχθεί ότι

$$\operatorname{Res}\left(\pi f(z) \cot \pi z,\, n\right) = f(n)\,.$$

Λύση.

(α΄) Το 0 είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της $f(z) = e^{1/z} e^{2z}$. Επειδή

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\,, \quad \text{για κάθε } w \in \mathbb{C},$$

το ανάπτυγμα Laurent της $f(z) = e^{1/z} e^{2z}$ με κέντρο $z_0 = 0$ στο διάτρητο δίσκο: $0 < |z| < \infty$ είναι

$$\begin{aligned} e^{1/z} e^{2z} &= \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \cdots\right) \\ &\quad \times \left(1 + 2z + \frac{1}{2!}(2z)^2 + \frac{1}{3!}(2z)^3 + \frac{1}{4!}(2z)^4 + \cdots\right) \\ &= \cdots + \left(1 + \frac{1}{2!}2 + \frac{1}{3!}\frac{2^2}{2!} + \frac{1}{4!}\frac{2^3}{3!} + \cdots\right)\frac{1}{z} + \cdots\,. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\operatorname{Res}\left(e^{1/z} e^{2z},\, 0\right) = a_{-1} = 1 + \frac{1}{2!}2 + \frac{1}{3!}\frac{2^2}{2!} + \frac{1}{4!}\frac{2^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!(n+1)!}\,.$$

(β΄) Επειδή η συνάρτηση f δεν έχει ρίζες στον πραγματικό άξονα, τα $z_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$, είναι απλοί πόλοι της $g(z) = \pi f(z) \cot \pi z$. Επομένως,

$$\operatorname{Res}\left(\pi f(z) \cot \pi z,\, n\right) = \lim_{z \to n} \frac{\pi f(z) \cos \pi z}{(\sin \pi z)'} = \lim_{z \to n} f(z) = f(n)\,. \qquad \text{(η } f \text{ είναι συνεχής)}$$

■

5. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta = \Re\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{3i\theta}}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta\right)\,.$$

Λύση. Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Επειδή $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$ και $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{e^{3i\theta}}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{z^3}{iz\left[5 - 2\left(z + z^{-1}\right)\right]}\, dz \\ &= i \oint_{|z|=1} \frac{z^3}{2z^2 - 5z + 2}\, dz = i \oint_{|z|=1} \frac{z^3}{(2z-1)(z-2)}\, dz\,. \end{aligned}$$

Τα σημεία $1/2$ και 2 είναι απλοί πόλοι της $f(z) = \frac{z^3}{(2z-1)(z-2)}$. Επειδή μόνο το σημείο $1/2$ βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων είναι

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta &= \Re\left[2\pi i \cdot i \operatorname{Res}\left(\frac{z^3}{2z^2 - 5z + 2}, \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= -2\pi\Re\left[\left.\frac{z^3}{(2z^2 - 5z + 2)'}\right|_{z=1/2}\right] \\ &= -2\pi\Re\left[\left.\frac{z^3}{4z - 5}\right|_{z=1/2}\right] = -2\pi\Re\left[-\frac{1}{24}\right] = \frac{\pi}{12}\,.\end{aligned}$$

■

6. Έστω γ_R, με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, το τόξο του κύκλου στο 1ο τεταρτημόριο με κέντρο 0 και ακτίνα $R > 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z}{1 + z^4}\, dz = 0$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1 + x^4}\, dx\,.$$

Λύση. Για κάθε $z \in \gamma_R^*$ είναι

$$\left|\frac{z}{1 + z^4}\right| = \frac{R}{|1 + z^4|} \leq \frac{R}{|z|^4 - 1} = \frac{R}{R^4 - 1}\,.$$

Το μήκος του τόξου γ_R^* είναι $R\pi/2$ και επομένως

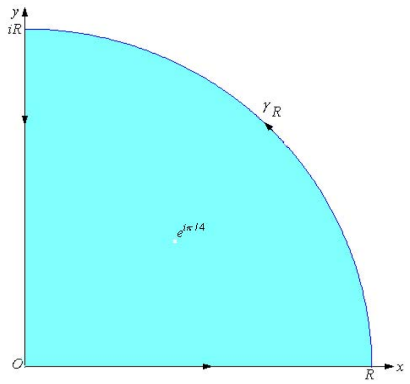
$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{z}{1 + z^4}\, dz\right| \leq \frac{R^2\pi}{2\,(R^4 - 1)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,.$$

Άρα,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z}{1 + z^4}\, dz = 0\,.$$

Τα $z_k = e^{(2k+1)\pi i/4}$, $k = 0, 1, 2, 3$ είναι απλοί πόλοι της συνάρτησης $f(z) = \frac{z}{1+z^4}$. Μόνο το $z_0 = e^{i\pi/4}$ βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο. Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $[0, R]$, το τόξο γ_R με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[Ri, 0]$. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο έτσι ώστε ο απλός πόλος $z_0 = e^{i\pi/4}$ της f να βρίσκεται εσωτερικά του τόξου γ_R. Είναι

$$\operatorname{Res}\left(f,\, e^{i\pi/4}\right) = \frac{e^{i\pi/4}}{4e^{3i\pi/4}} = \frac{1}{4}e^{-i\pi/2} = -\frac{i}{4}\,.$$



Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_0^R \frac{x}{1+x^4}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{z}{1+z^4}\,dz - \int_0^R \frac{iy}{1+y^4} i\,dy = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(f,\, e^{i\pi/4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

και ισοδύναμα

$$2\int_0^R \frac{x}{1+x^4}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{z}{1+z^4}\,dz = \frac{\pi}{2}\,.$$

Επομένως,

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

■

7. Έστω $f : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική και $1-1$ συνάρτηση στο τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $\overline{D}(z_0,\, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le R\} \subset G$. Έστω $w \in f\left(D(z_0,\, R)\right)$, όπου $D(z_0,\, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$. Να αποδειχθεί ότι η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} δίνεται από τον τύπο

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(z_0,\, R)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}\,d\zeta\,,$$

όπου $C^+\left(z_0,\, R\right)$ κύκλος με κέντρο z_0 ακτίνα R και θετική φορά διαγραφής.

Σημείωση. Αν η αναλυτική συνάρτηση f είναι $1-1$ στον τόπο G, τότε $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in G$.

Λύση. Το $\zeta = f^{-1}(w)$ είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο της συνάρτησης

$$g(\zeta) = \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}\,.$$

Αν $f^{-1}(w) = 0$, το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g και επομένως

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(z_0,\, R)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}\,d\zeta = 0 = f^{-1}(w)\,.$$

Έστω $f^{-1}(w) \neq 0$. Επειδή $f'(\zeta) \neq 0$ για κάθε $\zeta \in G$, το $\zeta = f^{-1}(w)$ είναι απλός πόλος της g. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+(z_0,\, R)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}\, d\zeta &= \operatorname{Res}\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w},\ \zeta = f^{-1}(w)\right) \\
&= \lim_{\zeta \to f^{-1}(w)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{\frac{d}{d\zeta}\left(f(\zeta) - w\right)} \\
&= \lim_{\zeta \to f^{-1}(w)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f'(\zeta)} \\
&= \lim_{\zeta \to f^{-1}(w)} \zeta = f^{-1}(w)\,.
\end{aligned}$$

■

1.8 Ακαδημαϊκό έτος 2007–8

ΣΧΟΛΗ ΗΜΜΥ

1η Σειρά Ασκήσεων στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

1. Έστω $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,\ a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, πολυώνυμο βαθμού n. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq \frac{3}{2}|a_n||z|^n\,, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R := \max\left\{1,\ \frac{2}{|a_n|}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right\}.$$

Λύση. Παραπέμπουμε στο [9]. ■

2. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $\varphi_1(0) = 1$ και $\varphi_2(0) = 0$. Αν η συνάρτηση

$$f(z) = f(x+iy) := e^x\left(\varphi_1(y) + i\varphi_2(y)\right)$$

είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, να αποδειχθεί ότι $\varphi_1(y) = \cos y$ και $\varphi_2(y) = \sin y$. Δηλαδή $f(z) = e^z$.

Λύση. Είναι $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ με $u(x,y) = e^x\varphi_1(y)$ και $v(x,y) = e^x\varphi_2(y)$. Επειδή η f αναλυτική στο $\mathbb{C}$, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann. Δηλαδή,

$$\left\{\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} e^x\varphi_1(y) &= e^x\varphi_2'(y) \\ e^x\varphi_1'(y) &= -e^x\varphi_2(y) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \varphi_1(y) &= \varphi_2'(y) \\ \varphi_1'(y) &= -\varphi_2(y) \end{aligned}\right\}$$

και ισοδύναμα

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_1''(y) + \varphi_1(y) &= 0 \\ \varphi_2(y) &= -\varphi_1'(y) \end{aligned}\right\}.$$

Έχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\varphi_1''(y) + \varphi_1(y) = 0\,, \quad \text{με } \varphi_1(0) = 1 \text{ και } \varphi_1'(0) = -\varphi_2(0) = 0\,.$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι $\varphi_1(y) = \cos y$. Επομένως, $\varphi_2(y) = -\varphi_1'(y) = \sin y$. Άρα,

$$f(z) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z\,.$$

■

3. Να βρεθούν οι τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση

$$f(z) = -\sin x \sinh y + a \sin x \cosh y + i\left(\cos x \sinh y + b \cos x \cosh y\right)$$

είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$. Στη συνέχεια να εκφράσετε την f σαν συνάρτηση του $z = x + iy$ και να υπολογιστεί η $f'(z)$.

Λύση. Είναι $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, με $u(x,y) = -\sin x \sinh y + a \sin x \cosh y$ και $v(x,y) = \cos x \sinh y + b \cos x \cosh y$. Οι συναρτήσεις u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$. Για να είναι η f αναλυτική στο $\mathbb{C}$, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann. Δηλαδή,

$$\left\{\begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} -\cos x \sinh y + a \cos x \cosh y = \cos x \cosh y + b \cos x \sinh y \\ -\sin x \cosh y + a \sin x \sinh y = \sin x \sinh y + b \sin x \cosh y \end{matrix}\right\}$$

και ισοδύναμα

$$\left\{\begin{matrix} (a-1)\cos x \cosh y = (b+1)\cos x \sinh y \\ (a-1)\sin x \sinh y = (b+1)\sin x \cosh y \end{matrix}\right\},$$

για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Για $x = y = 0$ συνεπάγεται ότι $a = 1$, ενώ για $x = \pi/2$ και $y = 0$ έπεται ότι $b = -1$. Επειδή η v είναι συζυγής αρμονική της u, ως γνωστόν

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = \sin z + i(-\cos z) = -i\left(\cos z + i \sin z\right) = -ie^{iz}.$$

Άρα,

$$f'(z) = e^{iz}.$$

■

4. Έστω η συνάρτηση

$$u(x,y) = \begin{cases} \Re\left(\frac{i+z}{i-z}\right) & \text{αν } z \neq i, \\ 0 & \text{αν } z = i, \end{cases}$$

όπου $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Να αποδειχθεί ότι η u είναι αρμονική στο μοναδιαίο δίσκο, ισούται με το 0 στο μοναδιαίο κύκλο και είναι συνεχής στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο εκτός από το σημείο $z = i$.

Λύση. Επειδή η συνάρτηση $f(z) := \frac{i+z}{i-z}$ είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, η u είναι αρμονική στο $D(0,1)$. Είναι

$$\frac{i+z}{i-z} = \frac{x+i(y+1)}{-x+i(1-y)} = \frac{[x+i(y+1)][-x-i(1-y)]}{x^2+(y-1)^2} = \frac{1-x^2-y^2-2ix}{x^2+(y-1)^2},$$

οπότε

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{1-x^2-y^2}{x^2+(y-1)^2} & \text{αν } (x,y) \neq (0,1), \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,1)\,. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι αν $x^2+y^2=1$, τότε $u(x,y)=0$, δηλαδή η u ισούται με το 0 στο μοναδιαίο κύκλο. Επίσης, η u είναι συνεχής στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ εκτός από το σημείο $z=i$, δηλαδή το σημείο $(0,1)$ του μοναδιαίου κύκλου. Πράγματι,

$$u(0,y) = \frac{1-y^2}{(y-1)^2} = \frac{1+y}{1-y} \xrightarrow[y\to 1^-]{} \infty\,.$$

■

5. Αν η συνάρτηση $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, να βρεθούν όλες οι αρμονικές συναρτήσεις της μορφής

$$u(x,y) := h(|z|) = h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \quad z = x+iy \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\,.$$

Λύση. Αν $t = \sqrt{x^2+y^2}$, είναι

$$u_x = \frac{x}{t}h'(t)\,,\; u_{xx} = \frac{x^2}{t^2}h''(t) + \frac{y^2}{t^3}h'(t) \quad \text{και} \quad u_y = \frac{y}{t}h'(t)\,,\; u_{yy} = \frac{y^2}{t^2}h''(t) + \frac{x^2}{t^3}h'(t)\,.$$

Επειδή η συνάρτηση u είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$u_{xx}+u_{yy} = \frac{x^2+y^2}{t^2}h''(t) + \frac{x^2+y^2}{t^3}h'(t) = 0 \Leftrightarrow th''(t)+h'(t) = 0\,, \quad \text{για κάθε } t>0\,.$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι $h(t) = c_1 \ln t + c_2$, $t>0$, με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$u(x,y) = c_1 \ln\sqrt{x^2+y^2} + c_2\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

■

6. Να βρεθεί η ακέραια συνάρτηση $f = u+iv$, με $f(0) = -i$, τέτοια ώστε

$$u(x,y) = y^3 - 3x^2y + y^2 - x^2\,.$$

Να εκφράσετε την f σαν συνάρτηση του $z = x + iy$.

Λύση. Εύκολα διαπιστώνεται ότι $u_{xx}+u_{yy} = 0$, δηλαδή η u είναι αρμονική στο $\mathbb{C}$. Ως γνωστόν, στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C}$ υπάρχει συζυγής αρμονική v της u. Δηλαδή η $f = u + iv$ είναι ακέραια συνάρτηση. Από την εξίσωση Cauchy–Riemann $u_x = v_y$ έχουμε

$$v_y = -6xy - 2x\,.$$

Επομένως,

$$v(x, y) = -3xy^2 - 2xy + c(x)\,.$$

Από τη δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann $u_y = -v_x$ προκύπτει ότι

$$3y^2 - 3x^2 + 2y = 3y^2 + 2y - c'(x) \Leftrightarrow c'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow c(x) = x^3 + c\,.$$

Δηλαδή $v(x, y) = -3xy^2 - 2xy + x^3 + c$ και η ακέραια συνάρτηση

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) = -z^2 + i(z^3 + c)\,,$$

$c \in \mathbb{R}$. Όμως $f(0) = -i$, οπότε $c = -1$. Άρα,

$$f(z) = iz^3 - z^2 - i\,.$$

■

7. Να βρεθεί η εικόνα, μέσω της $f(z) = \sin z$, του χωρίου

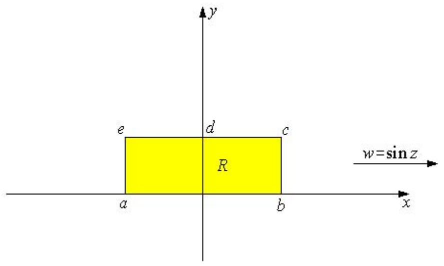
$$R = \left\{z = x + iy : -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le 1\right\}\,.$$

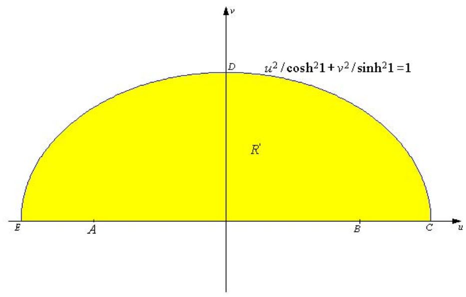
Λύση. Είναι

$$w = \sin z = \sin(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)\,,$$

όπου $u(x, y) = \sin x \cosh y$ και $v(x, y) = \cos x \sinh y$. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ec: $y = 1$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$. Τότε, $u = \sin x \cosh 1$ και $v = \cos x \sinh 1$, δηλαδή $u^2/\cosh^2 1 + v^2/\sinh^2 1 = 1$, όπου $-\cosh 1 \le u \le \cosh 1$ και $0 \le v \le \sinh 1$. Επομένως, το ευθύγραμμο τμήμα ec απεικονίζεται στο τμήμα της έλλειψης: $\frac{u^2}{\cosh^2 1} + \frac{v^2}{\sinh^2 1} = 1$ που βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο.

Τα σημεία $a\,(-\pi/2, 0)$ και $b\,(\pi/2, 0)$ απεικονίζονται στα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(1, 0)$ αντίστοιχα. Τα A, B είναι οι εστίες της έλλειψης: $\frac{u^2}{\cosh^2 1} + \frac{v^2}{\sinh^2 1} = 1$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ea και bc απεικονίζονται στα ευθύγραμμα τμήματα EA και BC αντίστοιχα. Τέλος, το ευθύγραμμο τμήμα ab απεικονίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα AB. Άρα, το ορθογώνιο R απεικονίζεται στο χωρίο R' του σχήματος.





■

8. Να λυθεί η εξίσωση

$$\sin z = 3\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\sin z = 3 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} - 6i = 0 \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 6ie^{iz} - 1 = 0\,.$$

Λύνοντας την εξίσωση $(e^{iz})^2 - 6ie^{iz} - 1 = 0$, έχουμε

$$e^{iz} = 3i \pm \sqrt{8}i = (3 \pm 2\sqrt{2})i = |3 \pm 2\sqrt{2}|e^{\pi i/2}\,.$$

Επομένως,

$$iz = \ln|3 \pm 2\sqrt{2}| + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i \Leftrightarrow z = -i\ln|3 \pm 2\sqrt{2}| + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

■

2η Σειρά Ασκήσεων στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$$\oint_{C^+(0,r)} \Re z \, dz\,,$$
όπου $C^+(0,r)$ είναι ο κύκλος με κέντρο 0, ακτίνα $r > 0$ και θετική φορά διαγραφής.

Λύση. Είναι $\Re z = (z + \bar{z})/2$ και $z(\theta) = re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, η εξίσωση του κύκλου $|z| = r$. Επομένως,
$$\begin{aligned}
\oint_{C^+(0,r)} \Re z \, dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(re^{i\theta} + re^{-i\theta}\right) ire^{i\theta} \, d\theta \\
&= i\frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(e^{2i\theta} + 1\right) d\theta \\
&= i\frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta + 1)\, d\theta \\
&= i\frac{r^2}{2}\left(\frac{\sin 2\theta}{2} - i\frac{\cos 2\theta}{2} + \theta\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= i\frac{r^2}{2}2\pi = i\pi r^2\,.
\end{aligned}$$

■

2. (α') Να αποδειχθεί ότι
$$\left|\oint_{|z|=1} e^{1/z}\, dz\right| \le 2\pi e\,.$$

(β') Έστω γ_R, με εξίσωση $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με κέντρο 0 και ακτίνα $R > 0$. Δείξτε ότι
$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{1}{z^3+1}\, dz = 0\,.$$

Λύση.

(α') Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $z(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ και επομένως
$$\left|e^{1/z}\right| = \left|e^{e^{-i\theta}}\right| = \left|e^{\cos\theta - i\sin\theta}\right| = e^{\cos\theta} \le e\,, \quad \text{για κάθε } |z| = 1\,.$$

Επομένως,
$$\left|\oint_{|z|=1} e^{1/z}\, dz\right| \le e\int_{|z|=1}|dz| = e \times (\text{μήκος του κύκλου } |z| = 1) = 2\pi e\,.$$

(β΄) Για κάθε $z \in \gamma_R^*$ είναι

$$\left|\frac{1}{z^3+1}\right| = \frac{1}{|z^3+1|} \le \frac{1}{|z|^3-1} = \frac{1}{R^3-1}\,.$$

Το μήκος του ημικύκλιου γ_R^* είναι $R\pi$ και επομένως

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^3+1}\,dz\right| \le \frac{R\pi}{R^3-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,.$$

Άρα,

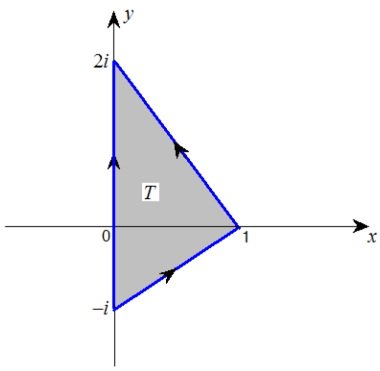
$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^3+1}\,dz = 0\,.$$

■

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_c \frac{z}{z^2+12}\,dz\,,$$

όπου c η πολυγωνική γραμμή: $[-i,1]\cup[1,2i]$.



Λύση.

<u>*1ος τρόπος*</u>. Ως γνωστόν η συνάρτηση $w = \operatorname{Log} z$ με

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z\,, \quad -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\,,$$

είναι αναλυτική στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. Επειδή το $z^2+12 \notin (-\infty,0]$, για κάθε z πάνω και στο εσωτερικό του τριγώνου T με κορυφές τα σημεία $-i$, 1 και $2i$, η συνάρτηση $g(z) := \frac{1}{2}\operatorname{Log}(z^2+12)$ είναι αναλυτικη πάνω και στο εσωτερικό του τριγώνου T

με $g'(z) = \frac{z}{z^2+12}$. Επομένως, από το θεμελιώδες θεώρημα ολοκλήρωσης

$$\begin{aligned}\int_c \frac{z}{z^2+12}\,dz &= \frac{1}{2}\operatorname{Log}((2i)^2+12) - \frac{1}{2}\operatorname{Log}((-i)^2+12)\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Log}8 - \frac{1}{2}\operatorname{Log}11\\ &= \frac{1}{2}\ln 8 - \frac{1}{2}\ln 11 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{11}\right).\end{aligned}$$

2ος τρόπος. Σ' ένα απλά συνεκτικό τόπο που περιέχει το τρίγωνο T, το ολοκλήρωμα της αναλυτικής συνάρτησης $f(z) = \frac{z}{z^2+12}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης. Μπορούμε λοιπόν να ολοκληρώσουμε πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[-i, 2i]$ με εξίσωση $z(t) = -i + 3it$, $t \in [0, 1]$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_c \frac{z}{z^2+12}\,dz &= \int_{[-i,\,2i]} \frac{z}{z^2+12}\,dz\\ &= \int_0^1 \frac{-i+3it}{(-i+3it)^2+12} 3i\,dt\\ &= \int_0^1 \frac{9t-3}{9t^2-6t-11}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\ln|9t^2-6t-11|\Big|_{t=0}^{t=1}\\ &= \frac{1}{2}\ln 8 - \frac{1}{2}\ln 11 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{11}\right).\end{aligned}$$

■

4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z}\,dz\,, \qquad a > 0$$

και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^\pi e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)\,d\theta = \pi\,.$$

Λύση. Επειδή η $f(z) = e^{az}$, $a > 0$, είναι ακέραια συνάρτηση, από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z}\,dz = \oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z-0}\,dz = 2\pi i\, e^{az}\big|_{z=0} = 2\pi i\,.$$

Η εξίσωση του κύκλου $|z| = 1$ είναι $z(\theta) = e^{i\theta}$, $-\pi \le \theta \le \pi$ και επομένως

$$\begin{aligned}
2\pi i = \oint_{C^+(0,1)} \frac{e^{az}}{z}\, dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ae^{i\theta}}}{e^{i\theta}} i e^{i\theta}\, d\theta \\
&= i \int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos\theta + ia\sin\theta}\, d\theta \\
&= i \int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos\theta} \left[\cos(a\sin\theta) + i\sin(a\sin\theta)\right] d\theta \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos\theta} \sin(a\sin\theta)\, d\theta + i \int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a\sin\theta)\, d\theta\,.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a\sin\theta)\, d\theta = 2\pi \Leftrightarrow \int_{0}^{\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a\sin\theta)\, d\theta = \pi\,.$$

■

5. Έστω γ απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη στο $\mathbb{C}$ με θετική φορά διαγραφής. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό της γ και ότι τα $z_1, z_2, \ldots, z_n$ είναι σημεία στο εσωτερικό της γ διάφορα μεταξύ τους. Αν

$$Q(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)\,,$$

δείξτε ότι το

$$P(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{Q(w)} \frac{Q(w) - Q(z)}{w - z}\, dw$$

είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $n-1$ που έχει τις ίδιες τιμές με την f στα σημεία $z_1, z_2, \ldots, z_n$, δηλαδή $P(z_k) = f(z_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Λύση. Επειδή $Q(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$P(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_k}\, dw = f(z_k)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι το P είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Επειδή το $Q(w) - Q(z)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n ως προς z, υπάρχουν $a_k(w)$ τέτοια ώστε

$$Q(w) - Q(z) = (w - z) \sum_{k=0}^{n-1} a_k(w) z^k\,.$$

Άρα,

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{Q(w)} a_k(w) \right) z^k\,.$$

■

6. Έστω το πολυώνυμο $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, βαθμού τουλάχιστον 2, δηλαδή $n \geq 2$. Αν οι ρίζες του πολυωνύμου περιέχονται στο εσωτερικό της απλής, κλειστής και τμηματικά λείας καμπύλης γ, δείξτε ότι

$$\oint_\gamma \frac{1}{p(z)}\, dz = 0\,.$$

Υπόδειξη. Ως γνωστόν(παραπέμπουμε στο [9]) υπάρχει $R \geq 1$ τέτοιο ώστε

$$|p(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n\,, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R\,.$$

Λύση. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο έτσι ώστε η κλειστή καμπύλη γ να περιέχεται στον κύκλο $|z| = R$ και να είναι

$$|p(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n\,, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R\,.$$

Ισοδύναμα,

$$\frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{2}{|a_n||z|^n}\,, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R\,.$$

Από το γενικευμένο θεώρημα του Cauchy έχουμε

$$\oint_\gamma \frac{1}{p(z)}\, dz = \oint_{|z|=R} \frac{1}{p(z)}\, dz\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\left|\oint_\gamma \frac{1}{p(z)}\, dz\right| &= \left|\oint_{|z|=R} \frac{1}{p(z)}\, dz\right| \\
&\leq \oint_{|z|=R} \frac{1}{|p(z)|}\, |dz| \\
&\leq \oint_{|z|=R} \frac{2}{|a_n||z|^n}\, |dz| \\
&= \frac{2}{|a_n|R^n} \oint_{|z|=R} |dz| \\
&= \frac{2}{|a_n|R^n} 2\pi R = \frac{4\pi}{|a_n|R^{n-1}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\oint_\gamma \frac{1}{p(z)}\, dz = 0\,.$$

■

7. Υποθέτουμε ότι η ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι τέτοια ώστε $|f(z)| \leq Ae^{ax}$ για κάθε $z = x + iy \in \mathbb{C}$, όπου $a, A > 0$. Δείξτε ότι

$$f(z) = ce^{az}\,, \quad \text{για κάποια σταθερά } c \in \mathbb{C}\,.$$

Ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα αν $|f(z)| \leq Ae^{a|z|}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$;

Λύση. Η συνάρτηση $g(z) = f(z)/e^{az}$ είναι ακέραια και τέτοια ώστε

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|e^{az}|} = \frac{|f(z)|}{|e^{ax+iay}|} = \frac{|f(z)|}{e^{ax}} \leq A\,, \quad \text{για κάθε } z = x + iy \in \mathbb{C}\,.$$

Από το θεώρημα Liouville η g θα είναι σταθερή, έστω $g(z) = c$. Επομένως $f(z) = ce^{az}$ για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{C}$.

Αν είναι $|f(z)| \leq Ae^{a|z|}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$, τότε δεν συνεπάγεται ότι $f(z) = ce^{az}$ για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{C}$. Πράγματι, η $f(z) = A \sin az$, $a, A > 0$, είναι μια ακέραια συνάρτηση η οποία δεν είναι της μορφής $f(z) = ce^{az}$, για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{C}$. Όμως είναι

$$|f(z)| = A\left|\frac{e^{iaz} - e^{-iaz}}{2i}\right| \leq \frac{A}{2}\left(e^{|iaz|} + e^{|-iaz|}\right) = Ae^{a|z|}\,.$$

■

8. Να εξεταστεί αν ισχύουν τα παρακάτω:

   (α΄) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στον απλά συνεκτικό τόπο D, τότε υπάρχει συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο D με $F'(z) = f(z)$, για κάθε $z \in D$.

   (β΄) Υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f στον ανοικτό δίσκο $D(0, 2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, τέτοια ώστε

$$|f(x + iy)|^2 = 4 - x^2 - y^2\,, \quad \text{για κάθε } z = x + iy \in D(0, 2)\,.$$

Λύση.

(α΄) Ισχύει στην περίπτωση που η f είναι αναλυτική συνάρτηση στον απλά συνεκτικό τόπο D. Αν όμως η f είναι συνεχής, χωρίς να είναι παραγωγίσιμη, τότε δεν ισχύει. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $f(z) = \bar{z}$ η οποία είναι συνεχής στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C}$ και πουθενά παραγωγίσιμη. Αν υπήρχε συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$ με $F'(z) = \bar{z}$, τότε ως γνωστόν και η $w = F'(z)$, δηλαδή η $w = \bar{z}$ θα ήταν παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$, άτοπο.

(β') Αν υπήρχε τέτοια αναλυτική συνάρτηση f, τότε $|f(0)|^2 = 4 \Leftrightarrow |f(0)| = 2$, ενώ στο σύνορο του κλειστού και φραγμένου δίσκου $\overline{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$, $0 < r < 2$, δηλαδή για $|z| = r$ θα είναι $|f(z)|^2 = 4 - r^2 < 4 \Leftrightarrow |f(z)| < 2$. Από την αρχή μεγίστου αυτό είναι άτοπο. Άρα, δεν υπάρχει τέτοια αναλυτική συνάρτηση f στον ανοικτό δίσκο $D(0,2)$.

■

9. Σ' ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ κάθε πραγματική συνεχής συνάρτηση προσεγγίζεται ομοιόμορφα από πολυώνυμα. Αυτό είναι το κλασικό *προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass.*

Δηλαδή αν $a < b \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (n \in \mathbb{N}\,,\ a_k \in \mathbb{R})$$

τέτοιο ώστε

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon\,, \quad \text{για κάθε}\, x \in [a,b]\,.$$

Το ανάλογο του θεωρήματος του Weierstrass δεν ισχύει στη *μιγαδική περίπτωση*. Πράγματι, έστω η συνεχής συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z}$ ορισμένη στο μοναδιαίο κύκλο $C(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ που είναι ένα συμπαγές(κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Αν για $\varepsilon = 1$ υποθέσουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad (n \in \mathbb{N}\,,\ a_k \in \mathbb{C})$$

τέτοιο ώστε

$$\left|\frac{1}{z} - p(z)\right| < 1\,, \quad \text{για κάθε}\, |z| = 1\,,$$

δείξτε ότι αυτό οδηγεί σε άτοπο.

Λύση. Έχουμε υποθέσει ότι

$$\left|\frac{1}{z} - p(z)\right| < 1 \Leftrightarrow |1 - zp(z)| < 1\,, \quad \text{για κάθε}\, |z| = 1\,.$$

Έστω $q(z) := zp(z)$. Το q είναι ένα πολυώνυμο και επομένως είναι αναλυτική μη σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{C}$, τέτοια ώστε

$$|1 - q(z)| < 1\,, \quad \text{για κάθε}\, |z| = 1\,.$$

Τότε από την αρχή μεγίστου θα πρέπει να είναι

$$|1 - q(z)| < 1\,, \quad \text{για κάθε}\, |z| \leq 1\,.$$

Όμως από την παραπάνω ανισότητα για $z = 0$ έχουμε

$$1 = |1 - q(0)| < 1\,,$$

που είναι άτοπο. ■

1.9 Ακαδημαϊκό έτος 2006–07

ΣΧΟΛΗ ΗΜΜΥ

1η Σειρά Ασκήσεων στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

1. Υποθέτουμε ότι οι ρίζες $z_1, z_2, \ldots, z_n$ του πολυωνύμου

$$p(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)\,,$$

$a \in \mathbb{C}$, βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο $\Im z > 0$.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\Im \frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{\Im z_1}{|x - z_1|^2} + \frac{\Im z_2}{|x - z_2|^2} + \cdots + \frac{\Im z_n}{|x - z_n|^2} > 0\,.$$

(β΄) Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Im \frac{p'(x)}{p(x)}\, dx\,.$$

Λύση.

(α΄) Επειδή

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \cdots + \frac{1}{z - z_n} = \frac{\overline{z - z_1}}{|z - z_1|^2} + \frac{\overline{z - z_2}}{|z - z_2|^2} + \cdots + \frac{\overline{z - z_n}}{|z - z_n|^2}\,,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned}\Im \frac{p'(x)}{p(x)} &= \Im \frac{\overline{x - z_1}}{|x - z_1|^2} + \Im \frac{\overline{x - z_2}}{|x - z_2|^2} + \cdots + \Im \frac{\overline{x - z_n}}{|x - z_n|^2} \\ &= \frac{\Im z_1}{|x - z_1|^2} + \frac{\Im z_2}{|x - z_2|^2} + \cdots + \frac{\Im z_n}{|x - z_n|^2} > 0\,.\end{aligned}$$

(β΄) Αν $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, είναι $y_k > 0$ και

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z_k}{|x - z_k|^2}\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_k}{(x - x_k)^2 + y_k^2}\, dx \\ &= \lim_{\substack{R \to +\infty \\ r \to -\infty}} \int_r^R \frac{y_k}{(x - x_k)^2 + y_k^2}\, dx \\ &= \lim_{\substack{R \to +\infty \\ r \to -\infty}} \arctan\left(\frac{x - x_k}{y_k}\right)\Bigg|_{x=r}^{x=R} \\ &= \lim_{R \to +\infty} \arctan\left(\frac{R - x_k}{y_k}\right) - \lim_{r \to -\infty} \arctan\left(\frac{r - x_k}{y_k}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi\,.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Im \frac{p'(x)}{p(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z_1}{|x-z_1|^2}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z_2}{|x-z_2|^2}\, dx + \cdots + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z_n}{|x-z_n|^2}\, dx$$
$$= \pi n\,.$$

■

2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4} & \text{αν } z \neq 0, \\ 0 & \text{αν } z = 0\,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$ ενώ δεν υπάρχει η παράγωγος $f'(0)$.

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x^4}}{x} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1/4}}{e^t} && (\text{αντικατάσταση } t = x^{-4}) \\ &= \frac{1}{4}\lim_{t\to\infty} \frac{t^{-3/4}}{e^t} && (\text{L'Hôpital}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

και παρόμοια

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x^4}}{x} = 0\,.$$

Επομένως $f_x(0,0)=0$. Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0\,.$$

Άρα $f_x(0,0) = -if_y(0,0) = 0$, δηλαδή ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \begin{cases} e^{-1/h^4}/h & \text{αν } h \in \mathbb{R}, \\ e^{1/4x^4}/(1+i)x & \text{αν } h = x+ix, x\in\mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Επομένως,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/h^4}}{h} = 0 \text{ και } \lim_{\substack{h\to 0\\ h=x+ix}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{1}{1+i} \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/4x^4}}{x} = \infty\,.$$

Άρα, η παράγωγος $f'(0)$ δεν υπάρχει.

Σημείωση. Το ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 προκύπτει και από το γεγονός ότι η f δεν είναι καν συνεχής στο 0. Πράγματι, είναι

$$\lim_{r\to 0^+} f\left(re^{i\pi/4}\right) = \lim_{r\to 0^+} e^{1/r^4} = \infty$$

■

3. Έστω η συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, όπου A είναι ανοικτό σύνολο. Δηλαδή η f παίρνει πραγματικές τιμές. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 \in A$, να αποδειχθεί ότι $f'(z_0) = 0$.

Απόδειξη. Είναι

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0)\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$

και επειδή το αριστερό μέλος παίρνει πραγματικές τιμές θα πρέπει και η παράγωγος $f'(z_0)$ να είναι πραγματικός αριθμός. Αν $h = ik$, $k \in \mathbb{R}$, τότε και πάλι

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(z_0+ik)-f(z_0)}{ik} = f'(z_0)\,.$$

Όμως το αριστερό μέλος είναι φανταστικός αριθμός οπότε $if'(z_0) \in \mathbb{R}$. Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι $f'(z_0) \in \mathbb{R}$ και $if'(z_0) \in \mathbb{R}$ και αυτό συνεπάγεται ότι $f'(z_0) = 0$. □

4. Έστω η συνάρτηση $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στον τόπο G. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ευθεία γραμμή L στο $\mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f(z) \in L$, για κάθε $z \in G$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή στον τόπο G.

Υπόδειξη. Κάθε ευθεία γραμμή L στο $\mathbb{C}$ είναι της μορφής

$$L = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + tw,\ t \in \mathbb{R}\}$$

για κατάλληλο $z_0 \in \mathbb{C}$ και $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$.

Απόδειξη. Αν $f(z) \in L$, τότε

$$\frac{f(z) - z_0}{w} \in \mathbb{R}\,, \quad \text{για κάθε}\, z \in G\,.$$

Όμως η συνάρτηση $(f(z) - z_0)/w$ είναι αναλυτική στον τόπο G και παίρνει πραγματικές τιμές. Από γνωστή πρόταση(από την προηγούμενη άσκηση συνεπάγεται ότι $f'(z) = 0$, για κάθε $z \in G$), η f είναι σταθερή στον τόπο G. □

5. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(z) = f(x + iy) = e^{2xy}\left[\cos\left(y^2 - x^2\right) + i\sin\left(y^2 - x^2\right)\right]$$

είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και να υπολογιστεί η παράγωγος $f'(z)$.

Λύση. Είναι $f = u + iv$ με $u(x, y) = e^{2xy}\cos(y^2 - x^2)$ και $v(x, y) = e^{2xy}\sin(y^2 - x^2)$. Οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$ και ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy–Riemann. Πράγματι,

$$\left\{\begin{aligned} u_x = v_y \quad &= 2e^{2xy}\left[y\cos(y^2 - x^2) + x\sin(y^2 - x^2)\right] \\ u_y = -v_x \quad &= 2e^{2xy}\left[x\cos(y^2 - x^2) - y\sin(y^2 - x^2)\right] \end{aligned}\right\}.$$

Επομένως η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$. Υπολογισμός της παραγώγου $f'(z)$:

<u>*1ος τρόπος*</u>. Ως γνωστόν

$$\begin{aligned} f'(z) = f_x(x, y) &= u_x(x, y) + iv_x(x, y) \\ &= 2e^{2xy}\left[\left(y\cos\left(y^2 - x^2\right) + x\sin\left(y^2 - x^2\right)\right)\right. \\ &\qquad \left. + i\left(y\sin\left(y^2 - x^2\right) - x\cos\left(y^2 - x^2\right)\right)\right]\,. \end{aligned}$$

<u>*2ος τρόπος*</u>. Επειδή οι u, v είναι συζυγείς αρμονικές, ως γνωστόν

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) = \cos z^2 - i\sin z^2 = e^{-iz^2}\,.$$

Άρα,

$$f'(z) = -2ize^{iz^2}\,.$$

■

6. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Να βρεθεί η συζυγής αρμονική v της u και στη συνέχεια η ακέραια συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

   Λύση. Εύκολα διαπιστώνεται ότι $u_{xx} + u_{yy} = 0$, δηλαδή η u είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Από την εξίσωση Cauchy–Riemann $v_y = u_x$ έχουμε

$$v_y = 3x^2 + 12xy - 3y^2\,, \text{ οπότε } v(x,y) = 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + c(x)\,.$$

   Από τη δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann $u_y = -v_x$ προκύπτει ότι

$$6x^2 - 6xy - 6y^2 = -6xy - 6y^2 - c'(x) \Leftrightarrow c'(x) = -6x^2\,. \text{Επομένως}\, c(x) = -2x^3 + c\,.$$

   Δηλαδή $v(x,y) = 3x^2y + 6xy^2 - y^3 - 2x^3 + c$ και η ακέραια συνάρτηση

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = z^3 + i(-2z^3 + c) = (1-2i)z^3 + ic\,,$$

   $c \in \mathbb{R}$. ■

7. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Αν η συνάρτηση $u\,(x,y) = \varphi\,(xy)$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$, να βρεθεί η u. Στη συνέχεια να βρεθεί η συζυγής αρμονική v της u καθώς επίσης και η ακέραια συνάρτηση $f\,(z) = u\,(x,y) + iv\,(x,y)$.

   Λύση. Αν $t = xy$, είναι $u_x = y\varphi'\,(t)$, $u_{xx} = y^2\varphi''\,(t)$ και παρόμοια $u_{yy} = x^2\varphi''\,(t)$. Επειδή η συνάρτηση u είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$,

$$u_{xx} + u_{yy} = \left(x^2 + y^2\right)\varphi''\,(t) = 0 \Leftrightarrow \varphi''\,(t) = 0\,, \quad \text{για κάθε}\, t \in \mathbb{R}\,.$$

   Επομένως $\varphi\,(t) = at+b$, οπότε $u\,(x,y) = axy+b$, $a,b \in \mathbb{R}$. Από την εξίσωση Cauchy–Riemann $v_y = u_x$ έχουμε

$$v_y = ay\,, \quad \text{οπότε} \quad v\,(x,y) = \frac{a}{2}y^2 + c\,(x)\,\,.$$

   Από τη δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann $u_y = -v_x$ προκύπτει ότι

$$ax = -c'\,(x) \Leftrightarrow c'\,(x) = -ax\,. \text{Επομένως}\,,\; c\,(x) = -\frac{a}{2}x^2 + c\,.$$

   Δηλαδή, $v\,(x,y) = a\left(y^2 - x^2\right)/2 + c$, $c \in \mathbb{R}$ και η ακέραια συνάρτηση

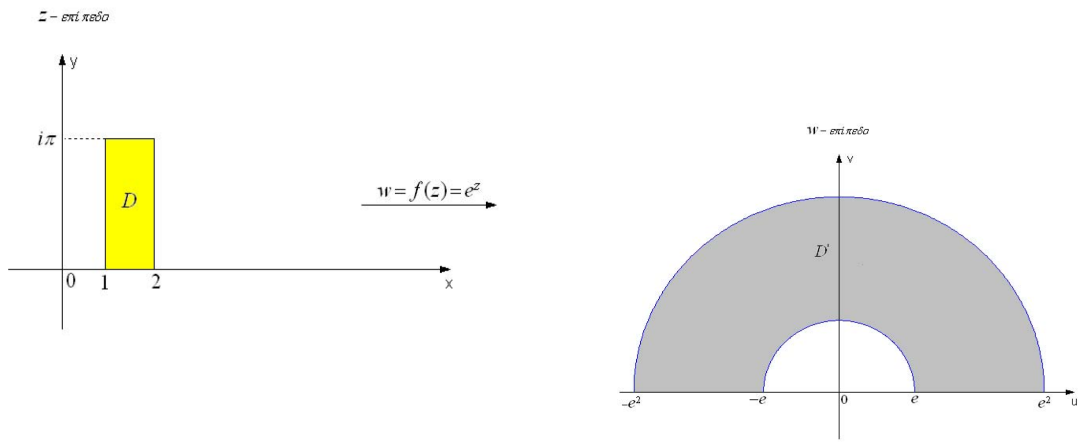
$$f\,(z) = u\,(z,0) + iv\,(z,0) = b + i\left(-\frac{a}{2}z^2 + c\right) = -\frac{ai}{2}z^2 + b + ic\,,$$

   $c \in \mathbb{R}$. ■

8. Να βρεθεί η εικόνα, μέσω της $f(z) = e^z$, του χωρίου

$$D = \{z = x + iy : 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \pi\} \ .$$

Λύση. Το ευθύγραμμο τμήμα $x = 1$, $0 \le y \le \pi$, απεικονίζεται στο ημικύκλιο $w = ee^{iy}$, $0 \le y \le \pi$, του άνω ημιεπιπέδου με ακτίνα e. Παρόμοια, το ευθύγραμμο τμήμα $x = 2$, $0 \le y \le \pi$, απεικονίζεται στο ημικύκλιο $w = e^2 e^{iy}$, $0 \le y \le \pi$, του άνω ημιεπιπέδου με ακτίνα e^2. Η εικόνα του ευθύγραμμου τμήματος $[1, 2]$ είναι $w = e^x e^{i0} = e^x$, $1 \le x \le 2$, δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα $\left[e, e^2\right]$, ενώ το ευθύγραμμο τμήμα $[1 + i\pi, 2 + i\pi]$ απεικονίζεται στο $w = e^x e^{i\pi} = -e^x$, $1 \le x \le 2$, που είναι το ευθύγραμμο τμήμα $\left[-e^2, -e\right]$. Άρα, το ορθογώνιο D απεικονίζεται στο χωρίο D' του σχήματος.



■

9. Να αποδειχθεί ότι

$$|\sin z| \le \cosh R \quad \text{και} \quad |\cos z| \le \cosh R\,,$$

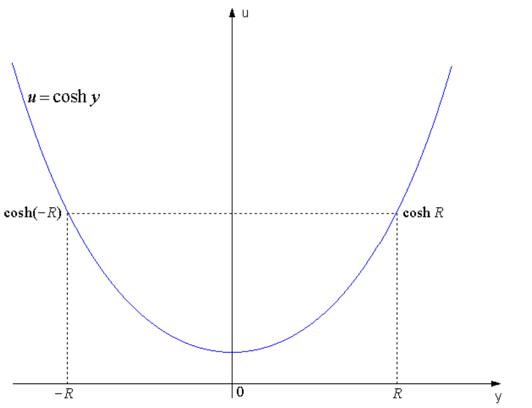
για κάθε $z \in \overline{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$.

Λύση. Αν $|z| = |x + iy| \le R$, τότε $|y| \le R$ και επομένως

$$\begin{aligned} |\sin z| = \left|\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right| &\le \frac{1}{2}\left(|e^{iz}| + |e^{-iz}|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|e^{ix-y}| + |e^{-ix+y}|\right) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y \le \cosh R\,. \end{aligned}$$

Παρόμοια,

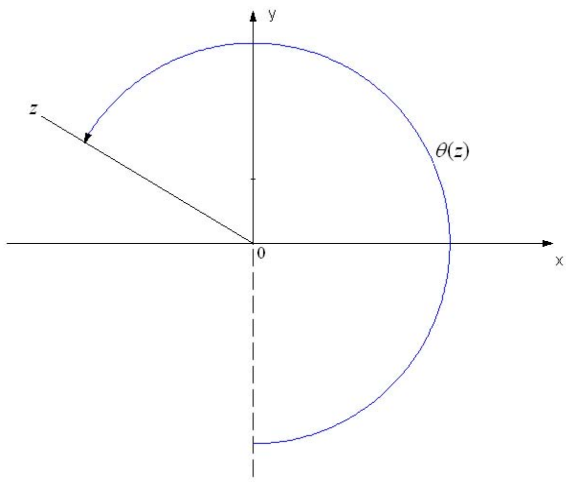
$$|\cos z| = \left|\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left(|e^{iz}|+|e^{-iz}|\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(|e^{ix-y}|+|e^{-ix+y}|\right) = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} = \cosh y \leq \cosh R\,.$$



■

10. Να βρεθεί ο κλάδος λογαρίθμου $w = \log z$ στον τόπο $D = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \leq 0\}$, τέτοιος ώστε $\log i = 5\pi i/2$. Αν $h_\lambda(z) = z^\lambda = e^{\lambda \log z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, να υπολογιστεί η παράγωγος $h'_{3/2}(-1)$.

Λύση. Είναι $\log z = \ln|z| + i\theta(z) + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, όπου $\theta(z) \in (-\pi/2,\, 3\pi/2)$.



Επειδή

$$\log i = \ln|i| + i\theta(i) + 2k\pi i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i = \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i$$

και $\log i = 5\pi i/2$, συνεπάγεται ότι $k = 1$. Άρα,

$$\log z = \ln|z| + i\left[\theta(z) + 2\pi\right]\,.$$

Είναι $\log(-1) = 3\pi i$ και

$$h'_\lambda(z) = e^{\lambda \log z} \cdot \frac{\lambda}{z} = e^{\lambda \log z} \cdot \frac{\lambda}{e^{\log z}} = \lambda e^{(\lambda-1)\log z} = \lambda z^{\lambda-1} = \lambda h_{\lambda-1}(z)\,.$$

Επομένως,

$$h'_{3/2}(-1) = \frac{3}{2} h_{1/2}(-1) = \frac{3}{2} e^{\log(-1)/2} = \frac{3}{2} e^{3\pi i/2} = -\frac{3i}{2}\,.$$

■

2η Σειρά Ασκήσεων στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

1. (α') Να αποδειχθεί ότι

$$\left| \oint_\gamma e^{\overline{z}\Im z}\, dz \right| \leq (2+\sqrt{2})e\,.$$

όπου γ το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία 0, 1 και $1+i$.

(β') Έστω C, με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$, το τόξο του κύκλου με κέντρο 0 και ακτίνα $R > 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$\left| \int_C e^{iz^2}\, dz \right| \leq \frac{\pi}{4R}\left(1 - e^{-R^2}\right)\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Είναι $\sin\theta \geq 2\theta/\pi$, για κάθε $\theta \in [0, \pi/2]$.

Λύση.

(α') Αν $z = x + iy$ είναι σημείο του τριγώνου γ, τότε $0 \leq x, y \leq 1$ και επομένως

$$\left| e^{\overline{z}\Im z} \right| = \left| e^{(x-iy)y} \right| = e^{xy} \leq e\,, \quad \text{για κάθε}\, z \in \gamma\,.$$

Επειδή το μήκος του τριγώνου γ είναι ίσο με $2+\sqrt{2}$, τελικά έχουμε

$$\left| \oint_\gamma e^{\overline{z}\Im z}\, dz \right| \leq e \int_\gamma |dz| = e \times (\text{μήκος του τριγώνου } \gamma) = (2+\sqrt{2})e\,.$$

(β') Αν $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$, τότε

$$\begin{aligned} \left| e^{iz(\theta)^2} \right| &= \left| e^{iR^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} \right| \\ &= e^{-R^2 \sin 2\theta} \leq e^{-R^2 4\theta/\pi}\,. \qquad (\text{επειδή } \sin 2\theta \geq 4\theta/\pi) \end{aligned}$$

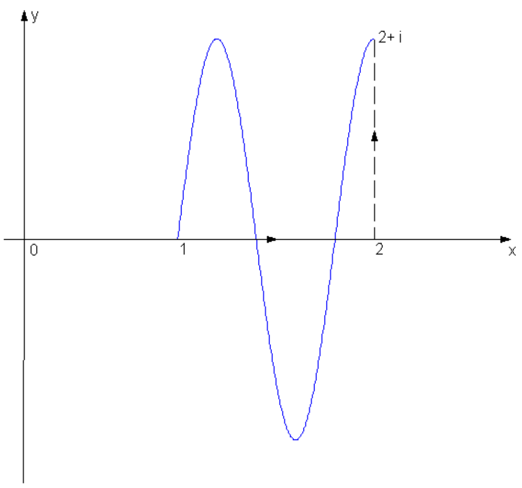
Επομένως,

$$\begin{aligned}\left|\int_C e^{iz^2}\,dz\right| &\le \int_C \left|e^{iz^2}\right|\,|dz| \\ &= \int_0^{\pi/4} \left|e^{iz(\theta)^2}\right| \left|z'(\theta)\right|\,d\theta \\ &\le \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 4\theta/\pi} R\,d\theta \\ &= -\frac{\pi}{4R} e^{-R^2 4\theta/\pi}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} = \frac{\pi}{4R}\left(1-e^{-R^2}\right).\end{aligned}$$

■

2. Δείξτε ότι

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2}\ln 5 + i\arctan\left(\frac{1}{2}\right),$$



όπου $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι η καμπύλη του επιπέδου με εξίσωση $\gamma(t) = 1 + t + i\sin\left(\frac{5}{2}\pi t\right)$.

Λύση. *1ος τρόπος*. Η καμπύλη γ βρίσκεται στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ όπου ο κύριος(πρωτεύον) κλάδος του λογαρίθμου

$$\mathrm{Log}\,z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z\,, \quad \text{με} \quad -\pi < \mathrm{Arg}\,z < \pi\,,$$

είναι η παράγουσα του $1/z$, δηλαδή $(\mathrm{Log}\,z)' = 1/z$. Από το θεμελιώδες θεώρημα ολοκλήρωσης

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz &= \operatorname{Log}\gamma(1) - \operatorname{Log}\gamma(0)\\
&= \operatorname{Log}(2+i) - \operatorname{Log}(1)\\
&= \operatorname{Log}(2+i) = \frac{1}{2}\ln 5 + i\arctan\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

<u>*2ος τρόπος*</u>. Στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ το ολοκλήρωμα της αναλυτικής συνάρτησης $f(z)=1/z$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης. Μπορούμε λοιπόν να ολοκληρώσουμε πρώτα πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[1,2]$ και στη συνέχεια πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[2,2+i]$, με εξίσωση $z(y)=2+iy$, $0\le y\le 1$. Επομένως,

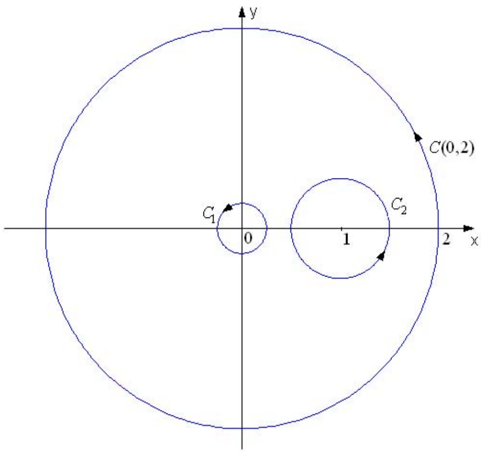
$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz &= \int_{[1,2]}\frac{1}{z}\,dz + \int_{[2,2+i]}\frac{1}{z}\,dz\\
&= \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + i\int_0^1 \frac{1}{2+iy}\,dy\\
&= \ln 2 + i\int_0^1 \frac{2-iy}{2^2+y^2}\,dy\\
&= \ln 2 + i\int_0^1 \frac{2}{4+y^2}\,dy + \int_0^1 \frac{y}{4+y^2}\,dy\\
&= \ln 2 + i\,\arctan\left(\frac{y}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} + \frac{1}{2}\,\ln\left(4+y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=1}\\
&= \ln 2 + i\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 4 = \frac{1}{2}\ln 5 + i\arctan\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

■

3. Χρησιμοποιώντας το γενικευμένο θεώρημα Cauchy, σε συνδυασμό με τους ολοκληρωτικούς τύπους Cauchy, να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{z(z-1)^2}\,dz = 1 - \sin 1 - \cos 1\,.$$

Λύση. Έστω C_1 και C_2 δύο κύκλοι που δεν τέμνονται και βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $|z|=2$, έτσι ώστε ο C_1 περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο 0 και ο C_2 περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο 1.



Από το γενικευμένο θεώρημα του Cauchy έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{z(z-1)^2}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1^+}\frac{\cos z}{z(z-1)^2}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2^+}\frac{\cos z}{z(z-1)^2}\,dz\,.$$

Όμως από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy είναι

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1^+}\frac{\cos z}{z(z-1)^2}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1^+}\frac{\cos z/(z-1)^2}{z}\,dz=\left.\frac{\cos z}{(z-1)^2}\right|_{z=0}=1$$

και από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2^+}\frac{\cos z}{z(z-1)^2}\,dz&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2^+}\frac{\cos z/z}{(z-1)^2}\,dz\\&=\left.\left(\frac{\cos z}{z}\right)'\right|_{z=1}\\&=\left.\frac{-z\sin z-\cos z}{z^2}\right|_{z=1}=-\sin 1-\cos 1\,.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{z(z-1)^2}\,dz=1-\sin 1-\cos 1\,.$$

■

4. Έστω D ένα κλειστό και φραγμένο συνεκτικό σύνολο του επιπέδου, που το σύνορό του ∂D αποτελείται από ένα πεπερασμένο αριθμό από απλές κλειστές και τμηματικά λείες καμπύλες που δεν τέμνει η μία την άλλη και είναι θετικά προσανατολισμένες. Αν η συνάρτηση $f:D\to\mathbb{C}$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, έχει συνεχείς μερικές παραγώγους (θεωρούμε την f σαν συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών), χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green

στο επίπεδο- κλασικό θεώρημα της διανυσματικής ανάλυσης - να αποδειχθούν οι παρακάτω "μιγαδικές μορφές " του θεωρήματος του Green

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial z}\,dxdy = -\frac{1}{2i}\oint_{\partial D} f\,d\bar{z}\,, \tag{1.8}$$

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,dxdy = \frac{1}{2i}\oint_{\partial D} f\,dz\,. \tag{1.9}$$

Υπενθυμίζεται ότι

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2i}\oint_{\partial D} f\,d\bar{z} &= -\frac{1}{2i}\oint_{\partial D}(u+iv)\,(dx-idy)\\
&= \frac{1}{2}\oint_{\partial D}(-vdx+udy) + \frac{i}{2}\oint_{\partial D} udx+vdy\\
&= \frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy + \frac{i}{2}\iint_D\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy\\
&\qquad\qquad \text{(από το θεώρημα Green)}\\
&= \iint_D \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dxdy\\
&= \iint_D \frac{\partial f}{\partial z}\,dxdy\,.
\end{aligned}$$

Η απόδειξη της (1.9) είναι παρόμοια. ■

5. Χρησιμοποιώντας τις μιγαδικές μορφές (1.8) και (1.9) του θεωρήματος Green, δηλαδή με δύο διαφορετικούς τρόπους, να αποδειχθεί ότι

$$\iint_{|z|\le 1} \cos z\,dxdy = \pi\,.$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.8) έχουμε

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{|z|\leq 1} \cos z \, dxdy &= \iint\limits_{|z|\leq 1} \frac{\partial}{\partial z}(\sin z)\ dxdy \\
&= -\frac{1}{2i}\oint_{|z|=1} \sin z \, d\overline{z} && \text{(τύπος (1.8))} \\
&= -\frac{1}{2i}\oint_{|z|=1} \sin z \, d\left(\frac{1}{z}\right) && \text{(επειδή } |z|=1 \Leftrightarrow z\overline{z}=1 \Leftrightarrow \overline{z}=\tfrac{1}{z}\text{)} \\
&= \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}\, dz \\
&= \pi\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}\, dz\right) \\
&= \pi\ (\sin z)'\big|_{z=0} && \text{(ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για παραγώγους)} \\
&= \pi\cos 0 = \pi\,.
\end{aligned}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (1.9), τότε

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{|z|\leq 1} \cos z \, dxdy &= \iint\limits_{|z|\leq 1} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\overline{z}\cos z)\ dxdy \\
&= \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1} \overline{z}\cos z \, dz \\
&= \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z}\, dz && \text{(επειδή } |z|=1 \Leftrightarrow z\overline{z}=1 \Leftrightarrow \overline{z}=\tfrac{1}{z}\text{)} \\
&= \pi\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z}\, dz\right) \\
&= \pi\cos 0 = \pi\,. && \text{(ολοκληρωτικός τύπος Cauchy)}
\end{aligned}$$

■

6. Υποθέτουμε ότι η ακέραια συνάρτηση $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta \leq r^{5/2}\,, \quad \text{για κάθε}\, r>0\,.$$

Να αποδειχθεί ότι $f^{(n)}(0)=0$, $n=0,1,2,\ldots$. Τι συμπεραίνετε για τη συνάρτηση f;

Λύση. Είναι $z(\theta)=re^{i\theta}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$, η εξίσωση του κύκλου $|z|=r$ με κέντρο 0 ακτίνα r και θετική φορά διαγραφής. Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για παραγώγους είναι

$$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz=\frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}ire^{i\theta}\,d\theta=\frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{e^{in\theta}}\,d\theta$$

Επομένως, για κάθε $r > 0$ από την υπόθεση έχουμε

$$\frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f\left(re^{i\theta}\right)}{e^{in\theta}}\,d\theta\right| \le \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\,d\theta \le \frac{1}{2\pi}r^{5/2-n}. \tag{1.10}$$

Αν $n \ge 3$, τότε $n - 5/2 \ge 3 - 5/2 = 1/2 > 0$ και από την (1.10) έχουμε

$$\frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} \le \frac{1}{2\pi}r^{5/2-n} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{r^{n-5/2}} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0\,, \quad \text{δηλαδή } f^{(n)}(0) = 0\,.$$

Αν $n \le 2$, τότε $5/2 - n \ge 5/2 - 2 = 1/2 > 0$ και από την (1.10) έχουμε

$$\frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} \le \frac{1}{2\pi}r^{5/2-n} \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0\,, \quad \text{δηλαδή } f^{(n)}(0) = 0\,.$$

Άρα, $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Επειδή

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n}z^n = 0\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,,$$

συμπεραίνουμε ότι $f \equiv 0$. ■

7. Έστω $a \in \mathbb{R}$ (μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a > 0$). Ολοκληρώνοντας την $w = e^{-z^2}$ στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο γ με κορυφές $-R$, R, $R+ia$ και $-R+ia$, $R > 0$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-(x+ia)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Λύση. Επειδή

$$\left|e^{-(x+ia)^2}\right| = e^{a^2}\cdot e^{-x^2}$$

και ως γνωστόν το

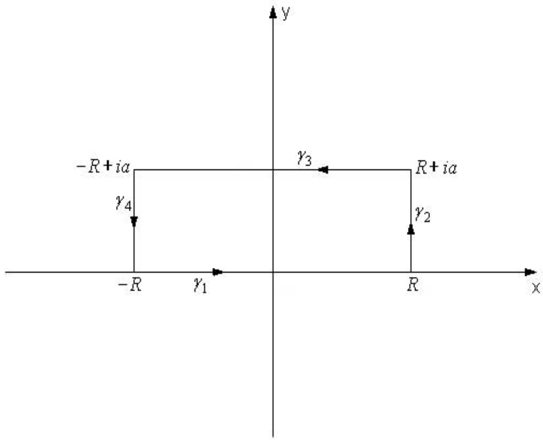
$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,,$$

έπεται ότι και το

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-(x+ia)^2}\,dx \quad \text{υπάρχει}\,.$$

Η συνάρτηση $w = e^{-z^2}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$. Επειδή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, από το θεώρημα του Cauchy είναι

$$\int_{\gamma_1} e^{-z^2}\,dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,dz + \int_{\gamma_3} e^{-z^2}\,dz + \int_{\gamma_4} e^{-z^2}\,dz = 0\,.$$



Οι εξισώσεις των γ_1, γ_2, $-\gamma_3$ και $-\gamma_4$ είναι αντίστοιχα $z\,(x) = x$, $-1 \leq x \leq 1$, $z\,(y) = R + iy$, $0 \leq y \leq a$, $z\,(x) = x + ia$, $-R \leq x \leq R$ και $z\,(y) = -R + iy$, $0 \leq y \leq a$. Επομένως,

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx + \int_0^a e^{-(R+iy)^2}\,idy - \int_{-R}^{R} e^{-(x+ia)^2}\,dx - \int_0^a e^{-(-R+iy)^2}\,idy = 0$$

και μετά από πράξεις

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx + ie^{-R^2}\int_0^a e^{y^2-2Ryi}\,dy - \int_{-R}^{R} e^{-(x+ia)^2}\,dx - ie^{-R^2}\int_0^a e^{y^2+2Ryi}\,dy = 0\,. \quad (1.11)$$

Επειδή

$$\left| ie^{-R^2}\int_0^a e^{y^2\pm 2Ryi}\,dy \right| \leq e^{-R^2}\int_0^a \left| e^{y^2\pm 2Ryi} \right| dy = e^{-R^2}\int_0^a e^{y^2}\,dy \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,,$$

είναι

$$\lim_{R\to\infty} ie^{-R^2}\int_0^a e^{y^2\pm 2Ryi}\,dy = 0\,.$$

Άρα, από την (1.11), παίρνοντας το $R \to \infty$, προκύπτει ότι

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-(x+ia)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

■

8. Υποθέτουμε ότι η ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι τέτοια ώστε $|f'(z)| \leq |z|$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Από τη γενίκευση του θεωρήματος Liouville(παραπέμπουμε στο [9]) η f' είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 1 και επομένως η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2. Να αποδειχθεί ότι

$$f(z) = a + bz^2\,, \quad a, b \in \mathbb{C} \text{ με } |b| \leq \frac{1}{2}\,.$$

Λύση. Η υπόθεση $|f'(z)| \le |z|$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$, συνεπάγεται ότι $f'(0) = 0$. Επομένως,

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 = a + bz^2\,, \quad a, b \in \mathbb{C}\,.$$

Όμως από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy είναι

$$\begin{aligned} |f''(0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f'(z)}{z^2}\,dz\right| &\le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{|f'(z)|}{|z|^2}\,|dz| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{|z|}{|z|^2}\,|dz| \quad \text{(επειδή } |f'(z)| \le |z|\text{, για κάθε } z \in \mathbb{C}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}|dz| = \frac{1}{2\pi}2\pi = 1\,. \end{aligned}$$

Άρα,

$$|b| = \frac{|f''(0)|}{2} \le \frac{1}{2}\,.$$

■

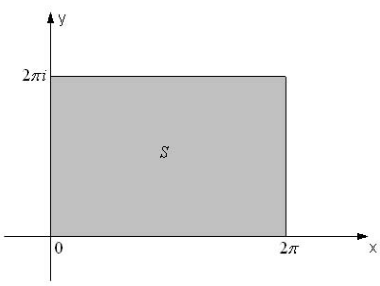
3η Σειρά Ασκήσεων στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

1. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της

$$|\sin z| = |\sin(x + iy)| = \left(\sin^2 x + \sinh^2 y\right)^{1/2}$$

στο τετράγωνο $S = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Λύση. Η $f(z) = \sin z$ είναι ακέραια, δηλαδή αναλυτική στο $\mathbb{C}$. Από την αρχή μεγίστου η $|f(z)| = |\sin z|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο του τετραγώνου S.



Έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) $\underline{0 \le x \le 2\pi,\ y = 0}$. Τότε $|\sin z| = |\sin x|$ και η μέγιστη τιμή είναι $|\sin(\pi/2)| = |\sin(3\pi/2)| = 1$.

(ii) $\underline{0 \le y \le 2\pi,\ x = 2\pi}$. Τότε $|\sin z| = \sinh y$ και ως γνωστόν η συνάρτηση $u = \sinh y$ είναι γνήσια αύξουσα. Επομένως, η μέγιστη τιμή είναι $\sinh 2\pi$.

(iii) $\underline{0 \le x \le 2\pi,\ y = 2\pi}$. Τότε $|\sin z| = \left(\sin^2 x + \sinh^2 2\pi\right)^{1/2}$ και η μέγιστη τιμή είναι

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi i\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi i\right)\right| = \left(1 + \sinh^2 2\pi\right)^{1/2} = \cosh 2\pi\,.$$

(iv) $\underline{0 \le y \le 2\pi,\ x = 0}$. Τότε $|\sin z| = \sinh y$. Επομένως, όπως και στη δεύτερη περίπτωση, η μέγιστη τιμή είναι $\sinh 2\pi$.

Άρα, η μέγιστη τιμή της $|\sin z|$ είναι

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi i\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi i\right)\right| = \cosh 2\pi\,.$$

■

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z^2 - 3z}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z-1)^2}\,.$$

Να βρεθούν τα αναπτύγματα κατά Laurent της f με κέντρο το $z_0 = -1$ σε όλους τους δυνατούς δακτυλίους.

Λύση. Ως γνωστόν, παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$, $|w| < 1$, έχουμε

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) w^n\,, \quad |w| < 1\,.$$

(i) $\underline{0 < |z+1| < 2}$: Είναι

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{[(z+1)-2]^2} \\ &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{4\left[1 - \frac{z+1}{2}\right]^2} \\ &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z+1}{2}\right)^n = \frac{1}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}(z+1)^n\,. \end{aligned}$$

(ii) $\underline{|z+1| > 2}$: Είναι

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{[(z+1)-2]^2} \\ &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2\left[1-\frac{2}{z+1}\right]^2} \\ &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{2}{z+1}\right)^n = \frac{1}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)\frac{1}{(z+1)^{n+2}}\,. \end{aligned}$$

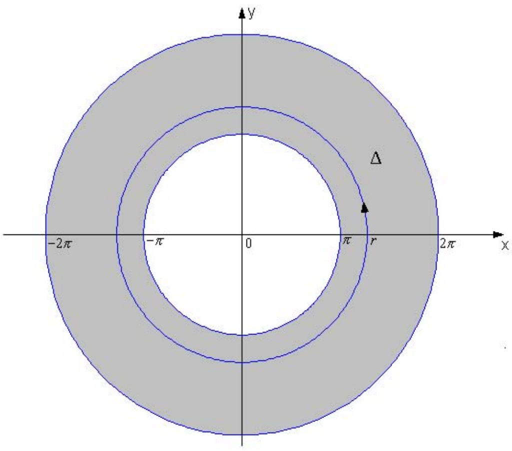
■

3. Έστω $\frac{1}{\sin z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα κατά Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ στο δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \pi < |z| < 2\pi\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, $n < 0$.

Λύση. Από το θεώρημα του Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,r)} \frac{1}{z^{n+1}\sin z}\,dz\,,$$

όπου ο κύκλος $C^+(0,r)$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $\pi < r < 2\pi$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ.



(i) $\underline{n = -1}$: Σ' αυτή την περίπτωση τα ανώμαλα σημεία $-\pi$, 0 και π της $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ βρίσκοντα στο εσωτερικό του κύκλου $C^+(0,r)$ και είναι απλοί πόλοι. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,r)} \frac{1}{\sin z}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin z}, -\pi\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin z}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin z}, \pi\right) \\
&= \left.\frac{1}{(\sin z)'}\right|_{z=-\pi} + \left.\frac{1}{(\sin z)'}\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{(\sin z)'}\right|_{z=\pi} \\
&= \frac{1}{\cos(-\pi)} + \frac{1}{\cos 0} + \frac{1}{\cos \pi} = -1\,.
\end{aligned}$$

(ii) $\underline{n \leq -2}$: Σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$g(z) = \frac{1}{z^{n+1}\sin z} = \frac{z^{-(n+1)}}{\sin z}\,, \quad \text{με } -(n+1) \geq 1$$

και επομένως τα ανώμαλα σημεία $-\pi$ και π της g βρίσκοντα στο εσωτερικό του κύκλου $C^+(0,r)$ και είναι απλοί πόλοι. Επειδή το 0 είναι ρίζα τόσο του αριθμητή όσο και του παρανομαστή της $g(z) = \frac{z^{-(n+1)}}{\sin z}$, το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Άρα, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,r)} \frac{1}{z^{n+1}\sin z}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-(n+1)}}{\sin z}, -\pi\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-(n+1)}}{\sin z}, \pi\right) \\
&= \left.\frac{z^{-(n+1)}}{(\sin z)'}\right|_{z=-\pi} + \left.\frac{z^{-(n+1)}}{(\sin z)'}\right|_{z=\pi} \\
&= \frac{(-\pi)^{-(n+1)}}{\cos(-\pi)} + \frac{\pi^{-(n+1)}}{\cos\pi} \\
&= \pi^{-(n+1)}\left[(-1)^{-n} - 1\right] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{αν } -n \text{ είναι άρτιος}\,, \\ -2\pi^{-(n+1)} & \text{αν } -n \text{ είναι περιττός}\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

■

4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\left[z^3\cos\left(z^{-1}\right) + \frac{\sin\pi z}{(z-1)^2}\right]dz\,.$$

Λύση. Το 0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της συνάρτησης $f(z) = z^3\cos(z^{-1})$ και βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = 2$. Επειδή

$$z^3\cos(z^{-1}) = z^3\left(1 - \frac{z^{-2}}{2!} + \frac{z^{-4}}{4!} - \frac{z^{-6}}{6!} + \cdots\right) = z^3 - \frac{z}{2!} + \frac{z^{-1}}{4!} - \frac{z^{-3}}{6!} + \cdots\,,$$

είναι $\operatorname{Res}\left(z^3 \cos\left(z^{-1}\right), 0\right) = 1/4!$. Το 1 είναι ανώμαλο σημείο της συνάρτησης $g(z) = \sin \pi z/(z-1)^2$ και βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = 2$. Επειδή το 1 είναι απλή ρίζα του αριθμητή και διπλή ρίζα του παρανομαστή, το 1 είναι απλός πόλος της συνάρτησης g. Επομένως, από γνωστό τύπο έχουμε

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\sin \pi z}{(z-1)^2}, 1\right) = 2\left.\frac{(\sin \pi z)'}{((z-1)^2)''}\right|_{z=1} = 2\left.\frac{\pi \cos \pi z}{2}\right|_{z=1} = -\pi\,.$$

Άρα, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$I = \operatorname{Res}\left(z^3 \cos(z^{-1}), 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{\sin \pi z}{(z-1)^2}, 1\right) = \frac{1}{4!} - \pi = \frac{1}{24} - \pi\,.$$

<u>*Σημείωση*</u>. Ως γνωστόν, αν το z_0 είναι απλός πόλος μιας συνάρτησης g, το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της g στο z_0 δίνεται από τον τύπο

$$\operatorname{Res}(g, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, g(z)\,.$$

Επομένως,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\sin \pi z}{(z-1)^2}, 1\right) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\sin \pi z}{(z-1)^2} = \lim_{z\to 1}\frac{\sin \pi z}{z-1} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{z\to 1} \pi \cos \pi z = -\pi\,.$$

■

5. Αν $a > 0$, δείξτε ότι

$$\int_0^{\pi/2} \frac{a}{a^2 + \sin^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{a}{2a^2 + 1 - \cos\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{a}{a^2 + \sin^2\theta}\, d\theta &= \int_0^{\pi/2} \frac{2a}{2a^2 + 1 - \cos 2\theta}\, d\theta \\ &= a\int_0^{\pi} \frac{1}{2a^2 + 1 - \cos\phi}\, d\phi \qquad \text{(αντικατάσταση } \phi = 2\theta) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{a}{2a^2 + 1 - \cos\phi}\, d\phi\,.\end{aligned}$$

(η συνάρτηση $f(\phi) = a/\left(2a^2 + 1 - \cos\phi\right)$ είναι περιοδική με περίοδο 2π)

Αν $z = e^{i\theta}$, τότε

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \text{ και } dz = ie^{i\theta}d\theta = iz d\theta \Leftrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{a}{a^2+\sin^2\theta}\,d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{a}{2a^2+1-\cos\theta}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{a}{2a^2+1-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{dz}{iz} \\ &= -\frac{a}{i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2-2(1+2a^2)z+1}\,dz\,.\end{aligned}$$

Επειδή $z_{1,2} = 1+2a^2 \pm 2a\sqrt{1+a^2}$ είναι απλές ρίζες της εξίσωσης $z^2-2(1+2a^2)z+1=0$, τα σημεία $1+2a^2\pm 2a\sqrt{1+a^2}$ είναι απλοί πόλοι της συνάρτησης $g(z) = \frac{1}{z^2-2(1+2a^2)z+1}$. Το $1+2a^2-2a\sqrt{1+a^2}$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $|z|=1$, ενώ το $1+2a^2+2a\sqrt{1+a^2}$ βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $|z|=1$. Άρα, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{a}{a^2+\sin^2\theta}\,d\theta &= -\frac{a}{i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2-2(1+2a^2)+1}\,dz \\ &= -\frac{a}{i}2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2-2(1+2a^2)z+1},\, 1+2a^2-2a\sqrt{1+a^2}\right) \\ &= -2a\pi\, \frac{1}{(z^2-2(1+2a^2)z+1)'}\bigg|_{z=1+2a^2-2a\sqrt{1+a^2}} \\ &= -2a\pi \frac{1}{2(1+2a^2-2a\sqrt{1+a^2})-2(1+2a^2)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}\,.\end{aligned}$$

■

6. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx\,.$$

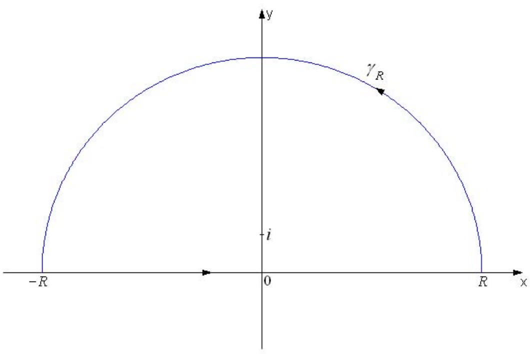
Λύση. Αν

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx\,, \quad \text{τότε} \quad I+iJ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx\,.$$

Ας σημειωθεί ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα I και J συγκλίνουν. Τα σημεία $\pm i$ είναι πόλοι τάξης 2 της $f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$. Το i βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο και είναι

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}, i\right) &= \lim_{z\to i}\left((z-i)^2\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\right)' \\ &= \lim_{z\to i}\left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\right)' \\ &= \lim_{z\to i}\left(\frac{ie^{iz}}{(z+i)^2}-\frac{2e^{iz}}{(z+i)^3}\right) \\ &= \frac{ie^{-1}}{(2i)^2}-\frac{2e^{-1}}{(2i)^3} = -\frac{i}{2e}\,.\end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελείται από το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου γ_R, με εξίσωση $z(\theta)=Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[-R,R]$. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο έτσι ώστε το ανώμαλο σημείο $z=i$ της f να βρίσκεται στο εσωτερικό του ημικύκλιου γ_R.



Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx+\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz = 2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}, i\right)=\frac{\pi}{e}\,. \tag{1.12}$$

Όμως, από το λήμμα του Jordan είναι

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz=0\,.$$

Επομένως, από την (1.12) προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{\pi}{e}\,.$$

Άρα,

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{\pi}{e}\quad\text{και}\quad J=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx=0\,.$$

■

7. Έστω $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^6}{az^7 - 1}\, dz\,.$$

Λύση. (i) Αν $|a| < 1$, η $f(z) = \frac{z^6}{az^7-1}$ είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = 1$. Επομένως, από το θεώρημα του Cauchy είναι

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^6}{az^7 - 1}\, dz = 0\,.$$

(ii) Αν $|a| > 1$, τότε

$$\begin{aligned}
&\oint_{|z|=1} \frac{z^6}{az^7 - 1}\, dz \\
&= \frac{2\pi i}{7a} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(az^7-1)'}{az^7-1}\, dz \right\} \\
&= \frac{2\pi i}{7a} \times \left\{ \text{αριθμός των ριζών της } f(z) = az^7 - 1 \text{ στο εσωτερικό του κύκλου } |z| = 1 \right\} \\
&\hfill \text{(αρχή ορίσματος)} \\
&= \frac{2\pi i}{7a} \times 7 = \frac{2\pi i}{a}\,.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^6}{az^7 - 1}\, dz = \begin{cases} 0 & \text{αν } |a| < 1\,, \\ \frac{2\pi i}{a} & \text{αν } |a| > 1\,. \end{cases}$$

■

8. Να βρεθεί ο αριθμός των ριζών του πολυωνύμου

$$P(z) = 3z^9 + 8z^6 + z^5 + 2z^3 + 1$$

στο δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Λύση. Για $|z| = 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|P(z) - 3z^9| &= |8z^6 + z^5 + 2z^3 + 1| \\
&\leq 8|z|^6 + |z|^5 + 2|z|^3 + 1 \\
&= 561 < 1536 = |3z^9|\,.
\end{aligned}$$

Επειδή το πολυώνυμο $Q_1(z) = 3z^9$ έχει 9 ρίζες στο δίσκο $|z| < 2$, από το θεώρημα Rouché και το πολυώνυμο P θα έχει 9 ρίζες στο δίσκο $|z| < 2$.
Για $|z| = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} |P(z) - 8z^6| &= |3z^9 + z^5 + 2z^3 + 1| \\ &\leq 3|z|^9 + |z|^5 + 2|z|^3 + 1 \\ &= 7 < 8 = |8z^6| \,. \end{aligned}$$

Επειδή το πολυώνυμο $Q_2(z) = 8z^6$ έχει 6 ρίζες στο δίσκο $|z| < 1$, από το θεώρημα Rouché και το πολυώνυμο P θα έχει 6 ρίζες στο δίσκο $|z| < 1$. Άρα, το πολυώνυμο P θα έχει $9 - 6 = 3$ ρίζες στο δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$. ■

9. Έστω $\lambda > 1$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$ze^{\lambda - z} = 1$$

έχει ακριβώς μία ρίζα ξ στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και ότι $\xi \in \mathbb{R}$.

Λύση. Έστω $f(z) = ze^{\lambda - z} - 1$. Αν $|z| = 1$, τότε $|\Re z| \leq 1$ και επομένως

$$\left|ze^{\lambda - z}\right| = \left|e^{\lambda - z}\right| = e^{(\lambda - \Re z)} \geq e^{(\lambda - 1)} > e^0 = 1 = \left|f(z) - ze^{\lambda - z}\right| .$$

Επειδή η $g(z) = ze^{\lambda - z}$ έχει μία ρίζα, το 0, από το θεώρημα Rouché και η f θα έχει ακριβώς μία ρίζα στο δίσκο $|z| < 1$. Ισοδύναμα, η εξίσωση $ze^{\lambda - z} = 1$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο δίσκο $|z| < 1$. Έστω $\xi e^{\lambda - \xi} = 1$, $\xi \in \mathbb{C}$ με $|\xi| < 1$.
Παρατηρούμε ότι για $x \in \mathbb{R}$ η συνεχής πραγματική συνάρτηση $g(x) = xe^{\lambda - x}$ είναι αύξουσα για $x \leq 1$. Πράγματι, είναι $g'(x) = e^{\lambda - x}(1 - x)$. Επειδή $g(0) = 0$ και $g(1) = e^{\lambda - 1} > e^0 = 1$, από το θεώρημα Bolzano ή ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 1 \Leftrightarrow e^{\lambda - \xi} = 1$. ■

10. Έστω η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0,\,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Υποθέτουμε ότι $|f(z)| = 1$, αν $|z| = 1$ και ότι η f δεν είναι σταθερή.
    (i) Να αποδειχθεί ότι η f έχει ρίζα στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
    (ii) Να αποδειχθεί ότι η εικόνα της f περιέχει το μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1)$. Δηλαδή ότι για κάθε $w_0 \in \mathbb{C}$, $|w_0| < 1$, υπάρχει $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| < 1$, τέτοιο ώστε $f(z_0) = w_0$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε την αρχή μεγίστου και το θεώρημα Rouché.

Απόδειξη. (i) Επειδή η αναλυτική συνάρτηση f δεν είναι σταθερή και $|f(z)| = 1$, αν $|z| = 1$, από την αρχή μεγίστου για κάθε $\xi \in D(0, 1)$ το $f(\xi) \in D(0, 1)$. Για ένα τέτοιο ξ έστω $g(z) := f(z) - f(\xi)$. Τότε

$$|g(z) - f(z)| = |f(\xi)| < 1 = |f(z)|, \quad \text{για κάθε}\, |z| = 1\,.$$

Επειδή η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $D(0, 1)$, από το θεώρημα Rouché και η f θα έχει ρίζα στο μοναδιαίο δίσκο $D(0, 1)$.

(ii) Έστω $|w_0| < 1$. Αν $h(z) = f(z) - w_0$, τότε

$$|h(z) - f(z)| = |w_0| < 1 = |f(z)|, \quad \text{για κάθε}\, |z| = 1\,.$$

Επειδή από την (α') η f έχει ρίζα στο μοναδιαίο δίσκο $D(0, 1)$, από το θεώρημα Rouché και η h θα έχει ρίζα στο μοναδιαίο δίσκο $D(0, 1)$. Δηλαδή υπάρχει $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| < 1$, τέτοιο ώστε $f(z_0) = w_0$.

Σημείωση. Από την υπόθεση, τη (β') και την αρχή μεγίστου προκύπτει ότι η εικόνα της f είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος $\overline{D}(0, 1)$. Δηλαδή, η f απεικονίζει το $\overline{D}(0, 1)$ στον εαυτό του.

□

Κεφάλαιο 2

Θέματα Εξετάσεων

2.1 Ακαδημαϊκό έτος 2016–17

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξετάσεις στη Μιγαδική Ανάλυση

29 Ιουνίου, 2017

Θ1. (α΄) Αν το G είναι ένας τόπος, δηλαδή ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο στο $\mathbb{C}$, να βρεθούν όλες οι αναλυτικές συναρτήσεις $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ στο G τέτοιες ώστε $u(x,y) = v^2(x,y)$, για κάθε $z = x+iy \in G$. (1 μον.)

(β΄) Αν η συνάρτηση $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, να βρεθούν όλες οι αρμονικές συναρτήσεις της μορφής

$$\varphi(x,y) := g(\sqrt{x^2+y^2})\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο G, ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann:

$$\left\{\begin{matrix} v_y = u_x \\ v_x = -u_y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} v_y = 2vv_x \\ v_x = -2vv_y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} v_y = 2vv_x \\ v_x = -4v^2v_x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} v_y = 2vv_x \\ \left(1+4v^2\right)v_x = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Επομένως, $v_x = v_y = u_x = u_y = 0$ και κατά συνέπεια $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 0$ στο τόπο G. Τότε από γνωστή πρόταση η f καθώς επίσης και οι u, v είναι σταθερές στο G. Άρα,

$$f(z) = \lambda^2 + i\lambda\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

(β΄) Αν $t = \sqrt{x^2+y^2}$, είναι

$$\varphi_x = \frac{x}{t}g'(t)\,,\ \varphi_{xx} = \frac{x^2}{t^2}g''(t) + \frac{y^2}{t^3}g'(t) \quad \text{και} \quad \varphi_y = \frac{y}{t}g'(t)\,,\ \varphi_{yy} = \frac{y^2}{t^2}g''(t) + \frac{x^2}{t^3}g'(t)\,.$$

Επομένως

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \frac{x^2+y^2}{t^2}g''(t) + \frac{x^2+y^2}{t^3}g'(t) = g''(t) + \frac{1}{t}g'(t) = \frac{1}{t}(tg''(t) + g'(t))\,.$$

Επειδή η συνάρτηση φ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, δηλαδή $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$, έχουμε

$$0 = tg''(t) + g'(t) \Leftrightarrow [tg'(t)]' = 0\,, \quad \text{για κάθε } t > 0\,.$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι $g(t) = c_1 \ln t + c_2$, $t > 0$, με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$\varphi(x,y) = c_1 \ln\sqrt{x^2+y^2} + c_2\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

■

Θ2. (α΄) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση, δηλαδή αναλυτική στο $\mathbb{C}$. Αν

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

είναι το ανάπτυγμα Taylor της f, από το θεώρημα Cauchy-Taylor για κάθε $R > 0$ οι συντελεστές της δυναμοσειράς δίνονται από τον τύπο

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\,.$$

Δείξτε ότι αν η f είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$, δηλαδή αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. (1 μον.)

(β΄) Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακέραια συνάρτηση $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$|g(z)| > |z|\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,. \qquad (*)$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$\begin{aligned} |c_n| = \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=R}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}\,|dz| \\ &\leq \frac{M}{2\pi}\oint_{|z|=R}\frac{1}{R^{n+1}}\,|dz| && (|f(z)| \leq M) \\ &= \frac{M}{2\pi R^{n+1}}\oint_{|z|=R}|dz| = \frac{M}{2\pi R^{n+1}}2\pi R = M\cdot\frac{1}{R^n} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,. \end{aligned}$$

Επομένως $c_n = 0$, για κάθε $n \geq 1$. Άρα $f(z) = c_0$, δηλαδή η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

(β΄) Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακέραια συνάρτηση $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε η $(*)$ ισχύει. Τότε η συνάρτηση g δεν μηδενίζεται, δηλαδή δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{C}$. Πράγματι, αν $g(z_0) = 0$ για κάποιο $z_0 \in \mathbb{C}$, τότε

$$|g(z_0)| = 0 \leq |z_0|\,. \qquad \text{(άτοπο λόγω της } (*))$$

Επομένως η συνάρτηση $h(z) := \frac{z}{g(z)}$ είναι ακέραια και από την $(*)$ έχουμε

$$|h(z)| = \frac{|z|}{|g(z)|} < 1\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

Δηλαδή η ακέραια συνάρτηση h είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$ και από το (α΄), δηλαδή από το θεώρημα Liouville, η h είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. Έστω $h(z) = \frac{z}{g(z)} = c$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Όμως $h(0) = 0$ και αυτό συνεπάγεται ότι $c = 0$. Επομένως

$$\frac{z}{g(z)} = 0\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα, δεν υπάρχει ακέραια συνάρτηση $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ που να ικανοποιεί την $(*)$.

■

Θ3. (α΄) Έστω

$$f(z) = \frac{i}{z(z+i)(z^2+1)}\,.$$

Να βρεθούν όλοι οι δυνατοί δακτύλιοι με κέντρο το $z_0 = -i$ στους οποίους η f αναπτύσσεται σε σειρά Laurent και να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $1 - 2i$. (1,5 μον.)

(β΄) Έστω $\dfrac{z}{\sin(\pi z)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $g(z) = \frac{z}{\sin(\pi z)}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\} \text{ με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν ο συντελεστής a_n, για κάθε $n \le 0$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$f(z) = \frac{i}{z(z+i)(z^2+1)} = -\frac{(z-i)-z}{z(z-i)(z+i)^2} = -\frac{1}{z(z+i)^2} + \frac{1}{(z-i)(z+i)^2}\,.$$

Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι: 0 και $\pm i$. Επομένως, το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $-i$ μπορεί να γίνει στους δακτυλίους

$$\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+i| < 1\}\,, \quad \Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z+i| < 2\}$$

και $\Delta_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| > 2\}$. Επειδή $|(1-2i)+i| = |1-i|$ και $1 < |1-i| = \sqrt{2} < 2$, το $1-2i \in \Delta_2$. Θα αναπτύξουμε την f στο δακτύλιο Δ_2 που είναι ο μεγαλύτερος δακτύλιος που περιέχει το σημείο $1-2i$. Επειδή ως γνωστόν

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n\,, \quad |w| < 1\,, \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{z(z+i)^2} + \frac{1}{(z-i)(z+i)^2} \\
&= -\frac{1}{(z+i)^2[(z+i)-i]} + \frac{1}{(z+i)^2[(z+i)-2i]} \\
&= -\frac{1}{(z+i)^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{i}{z+i}\right)} - \frac{1}{2i(z+i)^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z+i}{2i}\right)} \\
&= -\frac{1}{(z+i)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z+i}\right)^n - \frac{1}{2i(z+i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^n \\
&\qquad \left(\left|\tfrac{i}{z+i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+i| > 1 \text{ και } \left|\tfrac{z+i}{2i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+i| < 2\right) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{1}{(z+i)^{n+3}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)^{n+1}}(z+i)^{n-2}\,.
\end{aligned}$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα ισχύει στο δακτύλιο $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z+i| < 2\}$ που είναι ο μεγαλύτερος δυνατός δακτύλιος που περιέχει το σημείο $1-2i$.

(β') Είναι $\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow \pi z = k\pi \Leftrightarrow z = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Τα $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της g. Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z/\sin(\pi z)}{z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z^{-n}}{\sin(\pi z)}\, dz\,,$$

όπου ο κύκλος $|z| = r$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $1 < r < 2$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ. Τα σημεία 0 και ± 1 βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$.

(i) $\underline{n = 0}$: Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1}{\sin(\pi z)}\, dz\,.$$

Τα σημεία 0 και ± 1 είναι απλοί πόλοι της $h(z) = \frac{1}{\sin(\pi z)}$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1}{\sin(\pi z)}\, dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(\pi z)}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(\pi z)}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(\pi z)}, 1\right)\\
&= \left.\frac{1}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=-1} + \left.\frac{1}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=1}\\
&= \frac{1}{\pi\cos(-\pi)} + \frac{1}{\pi\cos 0} + \frac{1}{\pi\cos\pi}\\
&= -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}\,.
\end{aligned}$$

(ii) $\underline{n \le -1}$: Σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$h(z) = \frac{z^{-n}}{\sin(\pi z)}\,, \quad \text{με } -n \ge 1\,.$$

Τα σημεία ± 1 είναι απλοί πόλοι της h ενώ το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της

h. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{z^{-n}}{\sin(\pi z)}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n}}{\sin(\pi z)},\,-1\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n}}{\sin(\pi z)},\,1\right)\\
&= \left.\frac{z^{-n}}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=-1}+\left.\frac{z^{-n}}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=1}\\
&= \frac{(-1)^{-n}}{\pi\cos(-\pi)}+\frac{1}{\pi\cos\pi}\\
&= (-1)^{-n+1}\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\pi}\\
&= \begin{cases} -\frac{2}{\pi} & \text{αν } -n \text{ άρτιος}\\ 0 & \text{αν } -n \text{ περιττός}\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

■

Θ4. Αν $n\in\mathbb{N}^*$, να λυθεί η εξίσωση $3z^n+i=0$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{z^{n-1}}{3z^n+i}\,dz\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Επειδή

$$3z^n+i=0\Leftrightarrow 3z^n=-i=e^{-i\pi/2}\Leftrightarrow z^n=\frac{1}{3}e^{-i\pi/2}\,,$$

οι ρίζες της εξίσωσης $3z^n+i=0$ δίνονται από τον τύπο

$$z_k=\frac{1}{\sqrt[n]{3}}e^{i\frac{2k\pi-\pi/2}{n}}\,,\quad k=0,1,\ldots,n-1\,.$$

Επειδή οι z_k, $k=0,1,\ldots,n-1$, είναι απλές ρίζες της εξίσωσης $3z^n+i=0$ με $|z_k|=1/\sqrt[n]{3}<1$, τα z_k είναι απλοί πόλοι της συνάρτησης $f(z)=z^{n-1}/(3z^n+i)$ στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$. Επομένως από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\begin{aligned}
I &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{n-1}}{3z^n+i},\,z_0\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{z^{n-1}}{3z^n+i},\,z_1\right)+\cdots+\operatorname{Res}\left(\frac{z^{n-1}}{3z^n+i},\,z_{n-1}\right)\\
&= \left.\frac{z^{n-1}}{(3z^n+i)'}\right|_{z=z_0}+\left.\frac{z^{n-1}}{(3z^n+i)'}\right|_{z=z_1}+\cdots+\left.\frac{z^{n-1}}{(3z^n+i)'}\right|_{z=z_{n-1}}\\
&= \frac{z_0^{n-1}}{3nz_0^{n-1}}+\frac{z_1^{n-1}}{3nz_1^{n-1}}+\cdots+\frac{z_{n-1}^{n-1}}{3nz_{n-1}^{n-1}}=n\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

■

Θ5. Έστω P, Q δύο πολυώνυμα. Αν γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με παραμετρική εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, διατυπώστε το λήμμα Jordan για το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}\, dz\,, \quad \lambda > 0\,.$$

Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα πολυώνυμα;

Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση και το λήμμα Jordan, δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 2}\, dx = \Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x^2 - 2x + 2}\, dx\right) = -\pi e^{-\pi}\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. *Λήμμα Jordan*: Αν βαθμός $Q(z) \geq$ βαθμός $P(z) + 1$ και $\lambda > 0$, τότε

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}\, dz = 0\,.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{z^2 - 2z + 2}\,.$$

Τα $1 \pm i$ είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f και το $1 + i$ βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο. Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη $\gamma = [-R, R] \cup \gamma_R$, με θετική φορά, όπου γ_R είναι το ημικύκλιο στο άνω ημιεπίπεδο με παραμετρική εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ και $R > |1 + i| = \sqrt{2}$. Η συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό της γ εκτός από το σημείο $z = 1 + i$ που είναι απλός πόλος της f. Επειδή

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f(z)e^{i\pi z}, 1 + i\right) &= \lim_{z \to 1+i} (z - (1 + i)) \frac{1}{(z - (1 + i))(z - (1 - i))} e^{i\pi z} \\
&= \frac{e^{i\pi(1+i)}}{2i} = e^{i\pi} \frac{e^{-\pi}}{2i} = -\frac{e^{-\pi}}{2i}\,,
\end{aligned}$$

από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\pi x}\, dx + \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\pi z}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z)e^{i\pi z}, 1 + i\right) = -\pi e^{-\pi}\,. \qquad (**)$$

Επειδή βαθμός $(z^2 - 2z + 2) = 2 > 1 =$ βαθμός $(1) + 1$ και $\pi > 0$, από το λήμμα Jordan

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\pi z}\, dz = \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2 - 2z + 2} e^{i\pi z}\, dz = 0\,.$$

Παίρνοντας στη (∗∗) το $R \to \infty$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 2}\, dx = \Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x^2 - 2x + 2}\, dx\right) = -\pi e^{-\pi}\,.$$

∎

2.2 Ακαδημαϊκό έτος 2015–16

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξετάσεις στη Μιγαδική Ανάλυση

24 Ιουνίου, 2016

Θ1. Να βρεθούν όλα τα σημεία του $\mathbb{C}$ στα οποία η $f(z) = \cos\overline{z}$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγος. Σε ποια σημεία του $\mathbb{C}$ είναι η f αναλυτική; (1 μον.)

Λύση. Είναι $f(z) = f(x+iy) = \cos(x-iy)$. Επειδή $f_x = -\sin(x-iy)$ και $f_y = i\sin(x-iy)$, οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann. Έχουμε

$$f_x = -if_y \Leftrightarrow -\sin(x-iy) = \sin(x-iy) \Leftrightarrow \sin(x-iy) = 0 \Leftrightarrow x - iy = k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Επομένως, η $f(z) = \cos\overline{z}$ είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, του πραγματικού άξονα με παράγωγο

$$f'(z_k) = f_x|_{z_k=k\pi} = -\sin(k\pi) = 0\,.$$

Επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε καμία περιοχή των σημείων $z_k = k\pi$, η f δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$. ■

Θ2. (α΄) Διατυπώστε την *αρχή ελαχίστου* για ένα φραγμένο τόπο $G \subset \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και συνεχής στον κύκλο $|z| = 1$ που είναι το σύνορο του $D(0,1)$. Αν $f(0) = i$ και $|f(z)| > 1$, για κάθε $|z| = 1$, δείξτε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $D(0,1)$. (1,3 μον.)

(β΄) Έστω $\alpha \in D(0,1)$. Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $\varphi_\alpha : D(0,1) \to D(0,1)$ με

$$\varphi_\alpha(z) := \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

είναι αναλυτική, $1-1$ και απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ στον εαυτό του. Δηλαδή η συνάρτηση φ_α είναι $1-1$ και επί. Η

$$\varphi_{-\alpha}(z) = \frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}$$

είναι η αντίστροφη συνάρτηση της φ_α.

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ με $f(\alpha) = 0$ και $|f(z)| \leq 1$, για κάθε $|z| < 1$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Schwarz για τη συνάρτηση $g(z) := f(\varphi_{-\alpha}(z))$ στην ειδική περίπτωση του μοναδιαίου δίσκου $D(0,1)$, δείξτε ότι

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1}{1-|\alpha|^2}\,.$$

(1,2 μον.)

Λύση.

(α΄) *Αρχή ελαχίστου*: Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f δε μηδενίζεται στο G. Αν η f είναι συνεχής στο $\overline{G}$, αναλυτική στο G και μη σταθερή, τότε η $|f|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο ∂G του G και μόνο εκεί.

Υποθέτουμε ότι η f δεν έχει καμία ρίζα στο $D(0,1)$, δηλαδή δε μηδενίζεται στο μοναδιαίο δίσκο. Τότε, από την αρχή ελαχίστου η $|f|$ θα παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο του $D(0,1)$ που είναι ο μοναδιαίος κύκλος $|z| = 1$. Όμως από την υπόθεση είναι $|f(z)| > 1$, για κάθε $|z| = 1$, ενώ $|f(0)| = |i| = 1$. Άτοπο. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι η συνάρτηση f δε μηδενίζεται στο μοναδιαίο δίσκο. Αρα, η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $D(0,1)$.

(β΄) Η συνάρτηση g είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$. Επειδή $|f(z)| \leq 1$ για κάθε $|z| < 1$, είναι $|g(z)| \leq 1$ για κάθε $|z| < 1$ με $g(0) = f(\varphi_{-\alpha}(0)) = f(\alpha) = 0$, από το λήμμα του Schwarz έπεται ότι $|g(z)| \leq |z|$, για κάθε $|z| < 1$ και $|g'(0)| \leq 1$. Όμως

$$g'(z) = f'(\varphi_{-\alpha}(z))(\varphi_{-\alpha})'(z) = f'(\varphi_{-\alpha}(z))\frac{1-|\alpha|^2}{(1+\overline{\alpha}z)^2}$$

και επομένως

$$|g'(0)| = |f'(\alpha)|(1-|\alpha|^2) \leq 1 \Leftrightarrow |f'(\alpha)| \leq \frac{1}{1-|\alpha|^2}\,.$$

■

Θ3. Έστω f αναλυτική στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$. Αν η f έχει ρίζα στο G που δεν είναι μεμονωμένο σημείο του Z_f(Z_f είναι το σύνολο των ριζών της f στο G), από το θεώρημα ταυτοτισμού είναι γνωστό ότι η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο G.

Υποθέτουμε ότι ο τόπος G περιέχει τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

(α΄) Αν $f(1/(n+1)) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $f \equiv 0$ στο G. (1 μον.)

(β΄) Έστω g αναλυτική συνάρτηση στον τόπο G και έστω $k \in \mathbb{N}$. Αν

$$\oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{((n+1)z-1)^{k+2}}\, dz = 0\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,,$$

δείξτε ότι η g είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ k στο G. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή $1/(n+1) \in G$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f(1/(n+1)) = 0$, η $(1/(n+1))$ είναι ακολουθία ριζών της f στο G. Επειδή $\lim_{n\to\infty} 1/(n+1) = 0 \in G$ και η f είναι συνεχής στο G, από το θεώρημα μεταφοράς έχουμε $0 = \lim_{n\to\infty} f\left(1/(n+1)\right) = f(0)$, δηλαδή το 0 είναι ρίζα της f στο G. Επειδή $\lim_{n\to\infty} 1/(n+1) = 0 \in G$, το 0 είναι ρίζα της f στο G που δεν είναι μεμονωμένο σημείο του Z_f. Επομένως, από το θεώρημα ταυτοτισμού έπεται ότι $f \equiv 0$ στο G.

(β΄) Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned} g^{(k+1)}\left(\frac{1}{n+1}\right) &= \frac{(k+1)!}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{(z-1/(n+1))^{k+2}}\, dz \\ &= (n+1)^{k+2}\frac{(k+1)!}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{((n+1)z-1)^{k+2}}\, dz = 0\,, \end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή $g^{(k+1)}(1/(n+1)) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, από το (α΄) έπεται ότι $g^{(k+1)} \equiv 0$ στο G. Επομένως, η g είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ k στο G.

■

Θ4. (α΄) Να βρεθεί η σειρά(ανάπτυγμα) Laurent της

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z^2+1)}$$

με κέντρο το $z_0 = -i$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $1+i$.(1 μον.)

(β΄) Έστω $\dfrac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $g(z) = \frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\} \ \text{ με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \leq -1$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) είναι

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z^2+1)} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)}\,.$$

Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι: $-i$ και i. Επομένως, το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $-i$ μπορεί να γίνει στους δακτυλίους $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+i| < 2\}$ και $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| > 2\}$. Επειδή $|(1+i)+i| = |1+2i| = \sqrt{5} > 2$, το $1+i \in \Delta_2$. Θα αναπτύξουμε την f στο δακτύλιο Δ_2 που είναι ο μεγαλύτερος δακτύλιος που περιέχει το σημείο $1+i$. Επειδή ως γνωστόν

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n\,, \quad |w| < 1\,, \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z+i)^2(z-i)} \\ &= \frac{1}{(z+i)^2[(z+i)-2i]} \\ &= \frac{1}{(z+i)^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{2i}{z+i}\right)} \\ &= \frac{1}{(z+i)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{z+i}\right)^n \qquad \left(\left|\tfrac{2i}{z+i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+i| > 2\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(2i)^n\frac{1}{(z+i)^{n+3}}\,. \end{aligned}$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα ισχύει στο δακτύλιο $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| > 2\}$ που είναι ο μεγαλύτερος δυνατός δακτύλιος που περιέχει το σημείο $1+i$.

(β΄) Είναι $\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow \pi z = k\pi \Leftrightarrow z = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Τα $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της g. Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{z(z^2-1)/\sin^2(\pi z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{z^{-n}(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}\,dz\,,$$

όπου ο κύκλος $|z| = r$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $1 < r < 2$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ. Τα σημεία 0 και ± 1 βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$.

(i) $\underline{n = -1}$: Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}\, dz\,.$$

Τα σημεία 0 και ± 1 είναι απλοί πόλοι της $h(z) = \frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_{-1} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}\, dz \\
&= \operatorname{Res}\left(\frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}, 1\right) \\
&= \lim_{z\to -1} z(z-1)\left(\frac{z+1}{\sin(\pi z)}\right)^2 + \lim_{z\to 0}(z^2-1)\left(\frac{z}{\sin(\pi z)}\right)^2 \\
&\quad + \lim_{z\to 1} z(z+1)\left(\frac{z-1}{\sin(\pi z)}\right)^2 \\
&= 2\lim_{z\to -1}\left(\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}\right)^2 - \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}\right)^2 + 2\lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}\right)^2 \\
&\hspace{20em} \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= 2\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} + 2\frac{1}{\pi^2} = \frac{3}{\pi^2}\,.
\end{aligned}$$

(ii) $\underline{n \leq -2}$: Σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$h(z) = \frac{z^{-n}(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}\,, \quad \text{με } -n \geq 2\,.$$

Τα σημεία ± 1 είναι απλοί πόλοι της g ενώ το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της

g. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{z^{-n}(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)}\,dz \\
&= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n}(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)},\,-1\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n}(z^2-1)}{\sin^2(\pi z)},\,1\right) \\
&= \lim_{z\to -1} z^{-n}(z-1)\left(\frac{z+1}{\sin(\pi z)}\right)^2+\lim_{z\to 1} z^{-n}(z+1)\left(\frac{z-1}{\sin(\pi z)}\right)^2 \\
&= -2(-1)^{-n}\lim_{z\to -1}\left(\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}\right)^2+2\lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{\pi\cos(\pi z)}\right)^2 \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= 2(-1)^{-n+1}\frac{1}{\pi^2}+2\frac{1}{\pi^2} \\
&= \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} & \text{αν } -n \text{ περιττός} \\ 0 & \text{αν } -n \text{ άρτιος}\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

■

Θ5. Έστω τα πολυώνυμα $P(z)=1$ και $Q(z)=z^4+4$.

(α΄) (i) Δείξτε ότι για R_0 αρκετά μεγάλο, $R_0>\sqrt{2}$, υπάρχει σταθερά $M>0$ τέτοια ώστε

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|\le\frac{M}{|z|^4}\,,\quad \text{για κάθε } |z|\ge R_0\,.$$

(ii) Αν γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με εξίσωση $\gamma(t)=Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$, δείξτε ότι

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz=0\,. \tag{2.1}$$

(1 μον.)

(β΄) Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση, δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+4}\,dx=\frac{\pi}{8}\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) (i) Από γνωστή πολυωνυμική ανισότητα υπάρχει $R_0\ge 1$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{2}|z|^4\le|Q(z)|\le\frac{3}{2}|z|^4\,,\quad \text{για κάθε } |z|\ge R_0$$

Επειδή $Q(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 = -4 = 4e^{\pi i}$, οι ρίζες του πολυωνύμου Q είναι

$$z_k = \sqrt[4]{4}e^{(2k\pi+\pi)i/4} = \sqrt{2}e^{(2k\pi+\pi)i/4}\,, \quad k = 0, 1, 2, 3\,.$$

Δηλαδή $z_k = \pm 1 \pm i$. Παίρνουμε το $R_0 > \sqrt{2}$ έτσι ώστε ο κύκλος $|z| = R_0$ να περιέχει τις ρίζες $\pm 1 \pm i$ του πολυωνύμου Q. Τότε, για κάθε $|z| \geq R_0$ είναι

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{1}{\frac{1}{2}|z|^4} = \frac{2}{|z|^4}\,.$$

(ii) Είναι

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\right| &\leq \int_{\gamma_R} \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| |dz| \\
&\leq \int_{\gamma_R} \frac{2}{R^4}\,|dz| && \text{(από το } (i) \text{ για } |z| = R \geq R_0) \\
&= \frac{2}{R^4}\pi R = \frac{2\pi}{R^3} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0\,.$$

(β΄) Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 4}$$

έχει μεμονωμένα ανώμαλα σημεία τα $\pm 1 \pm i$ και τα $\pm 1 + i$ βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο. Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη $\gamma = [-R, R] \cup \gamma_R$, με θετική φορά, όπου γ_R είναι το ημικύκλιο στο άνω ημιεπίπεδο με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ και $R > \sqrt{2}$. Η συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό της γ εκτός από το $\pm 1 + i$ που είναι απλοί πόλοι της f. Επειδή

$$\operatorname{Res}(f, \pm 1 + i) = \left.\frac{1}{(z^4 + 4)'}\right|_{z=\pm 1+i} = \frac{1}{4(\pm 1 + i)^3} = \frac{1}{8(\mp 1 + i)}\,,$$

από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz &= 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f, 1 + i) + \operatorname{Res}(f, -1 + i)\right] \\
&= 2\pi i\left[\frac{1}{8(-1 + i)} + \frac{1}{8(1 + i)}\right] = \frac{\pi}{4}\,. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Επειδή από την (2.1)

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0\,,$$

παίρνοντας στην (∗) το $R \to \infty$ έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

και άρα

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^4+4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{8}\,.$$

■

Επαναληπτική Εξέταση στη Μιγαδική Ανάλυση

30 Σεπτεμβρίου, 2016

Θ1. Να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση $u(x,y) = 3x^2y + ay^3 + 2x$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Στη συνέχεια να βρεθεί η συζυγής αρμονική v της u καθώς επίσης και η ακέραια συνάρτηση $f = u + iv$, με $f(0) = i$. Να εκφράσετε την f σαν συνάρτηση του $z = x + iy$. (1,5 μον.)

Λύση. Είναι $u_{xx} + u_{yy} = 6y + 6ay = 6(a+1)y$. Επειδή η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης, για να είναι η u αρμονική θα πρέπει να ισχύει η εξίσωση Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ και ισοδύναμα $6(a+1)y = 0$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Επομένως $a = -1$ και κατά συνέπεια

$$u(x,y) = 3x^2y - y^3 + 2x\,.$$

Ως γνωστόν, στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C}$ υπάρχει συζυγής αρμονική v της u. Δηλαδή η $f = u + iv$ είναι ακέραια συνάρτηση. Από την εξίσωση Cauchy–Riemann $u_x = v_y$ έχουμε $v_y = 6xy + 2$ και επομένως $v(x,y) = 3xy^2 + 2y + c(x)$. Από τη δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann $v_x = -u_y$ προκύπτει ότι

$$3y^2 + c'(x) = -3x^2 + 3y^2 \Leftrightarrow c'(x) = -3x^2 \text{ και άρα } c(x) = -x^3 + c\,.$$

Δηλαδή

$$v(x,y) = 3xy^2 + 2y - x^3 + c$$

και κατά συνέπεια

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = 2z - iz^3 + ic\,,$$

$c \in \mathbb{R}$. Όμως $f(0) = i$, οπότε $c = 1$. Άρα,

$$f(z) = -iz^3 + 2z + i\,.$$

■

Θ2. Έστω $f : D \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στον απλά συνεκτικό τόπο $D \subseteq \mathbb{C}$ με $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$ και έστω $z_0 \in D$.

(α΄) Παίρνουμε μια τιμή του $\log f(z_0)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $F : D \to \mathbb{C}$ με

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta + \log f(z_0)\,.$$

Δείξτε ότι η F είναι αναλυτική στο D με $e^{F(z)} = f(z)$ για κάθε $z \in D$ και

$$F'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}\,, \quad \text{για κάθε } z \in D\,. \tag{2.2}$$

(1 μον.)

(β΄) Αν $[z_0, z_1]$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα στο D και $w = \exp z$ είναι η εκθετική συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\exp\left(\int_{[z_0,z_1]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta\right) = \frac{f(z_1)}{f(z_0)}\,.$$

(0,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στις σημειώσεις του μαθήματος.

(β΄) Επειδή από την (2.2) είναι $F'(z) = f'(z)/f(z)$, για κάθε $z \in D$, από το θεμελιώδες θεώρημα ολοκλήρωσης έχουμε

$$\int_{[z_0,z_1]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = F(z_1) - F(z_0)$$

Όμως από το (α΄) είναι $e^{F(z_1)} = f(z_1)\,,\ e^{F(z_0)} = f(z_0)$ και επομένως

$$\exp\left(\int_{[z_0,z_1]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta\right) = e^{F(z_1)-F(z_0)} = \frac{e^{F(z_1)}}{e^{F(z_0)}} = \frac{f(z_1)}{f(z_0)}\,.$$

■

Θ3. (α΄) Διατυπώστε την *αρχή μεγίστου* και την *αρχή ελαχίστου* για ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$, δηλαδή για ένα φραγμένο τόπο. (0,5 μον.)

(β΄) Υποθέτουμε ότι οι μιγαδικές συναρτήσεις f, g είναι αναλυτικές στον ανοικτό δίσκο $D(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $r > 0$, συνεχείς στο κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$ και ότι $f(z) \neq 0$, $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \overline{D}(0,r)$. Αν $|f(z)| = |g(z)|$ για κάθε $|z| = r$, δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά $c \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $|c| = 1$ και $f(z) = cg(z)$ για κάθε $z \in \overline{D}(0,r)$. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στις σημειώσεις του μαθήματος.

(β΄) Η συνάρτηση $h(z) := \dfrac{f(z)}{g(z)}$ είναι αναλυτική και ικανοποιεί τις υποθέσεις της αρχής μεγίστου και της αρχής ελαχίστου στο φραγμένο τόπο $D(0,r)$. Επομένως υπάρχουν u, v στο κύκλο $C(0,r) = \{z : |z| = r\}$, που είναι το σύνορο του δίσκου $D(0,r)$, τέτοια ώστε

$$|h(u)| \leq |h(z)| \leq |h(v)|\,, \quad \text{για κάθε } z \in \overline{D}(0,r)\,.$$

Επειδή από την υπόθεση είναι $|f(z)| = |g(z)|$ για κάθε $z \in C(0,r)$, έπεται ότι $|h(z)| = 1$ για κάθε $z \in \overline{D}(0,r)$. Τότε όμως από γνωστή πρόταση η h θα είναι σταθερή στο $\overline{D}(0,r)$, έστω $h(z) = c \in \mathbb{C}$ με $|c| = 1$ για κάθε $z \in \overline{D}(0,r)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι θα είναι $f(z) = cg(z)$, με $|c| = 1$, για κάθε $z \in \overline{D}(0,r)$.

■

Θ4. (α΄) Να βρεθεί η σειρά(ανάπτυγμα) Laurent της

$$f(z) = \frac{7z-2}{z(z+1)(z-2)} = \frac{1}{z} - \frac{3}{z+1} + \frac{2}{z-2}$$

με κέντρο το $z_0 = -1$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $2i + 1$. (1 μον.)

(β΄) Έστω $\dfrac{1}{z(e^z - e^{-z})} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $g(z) = \frac{1}{z(e^z - e^{-z})}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \pi < |z| < 2\pi\} \ \text{ με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \leq -1$. (2 μον.)

Λύση.

(α΄) Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι: -1, 0 και 2. Επομένως το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το -1 μπορεί να γίνει στους δακτυλίους $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 1\}$(διάτρητος δίσκος), $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z+1| < 3\}$ και $\Delta_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| > 3\}$(εξωτερικός δακτύλιος). Επειδή $|(2i+1)+1| = \sqrt{8} < 3$, το $2i+1 \in \Delta_2$. Θα αναπτύξουμε την f στο δακτύλιο Δ_2 που είναι ο μεγαλύτερος δακτύλιος που περιέχει το σημείο $2i+1$. Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$, $|w| < 1$, έχουμε

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z+1)-1} = \frac{\frac{1}{z+1}}{1-\frac{1}{z+1}} = \frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^n}$$
$$\left(\left|\frac{1}{z+1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+1| > 1\right)$$

και

$$\frac{2}{z-2} = \frac{2}{(z+1)-3} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{3}} = -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n (z+1)^n\,.$$
$$\left(\left|\frac{z+1}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+1| < 3\right)$$

Επομένως

$$f(z) = -\frac{3}{z+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^n} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}(z+1)^n\,.$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα ισχύει στο δακτύλιο $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z+1| < 3\}$ που είναι ο μεγαλύτερος δυνατός δακτύλιος που περιέχει το σημείο $2i+1$.

(β΄) Επειδή

$$e^z - e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow 2z = 2k\pi i \Leftrightarrow z = k\pi i\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

τα $z_k = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης $g(z) = 1/z(e^z - e^{-z})$. Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{1/z(e^z-e^{-z})}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{z^{-n-2}}{e^z-e^{-z}}\,dz\,,$$

όπου ο κύκλος $|z| = r$ με $\pi < r < 2\pi$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ.

Αν

$$g(z) := \frac{z^{-n-2}}{e^z - e^{-z}}\,,$$

τα ανώμαλα σημεία $-\pi i$, 0 και πi της g βρίσκοντα στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$.

(i) $\underline{n=-1}$: Σ' αυτή την περίπτωση $g(z) = 1/z(e^z - e^{-z})$. Τα ανώμαλα σημεία $\pm\pi i$ είναι απλοί πόλοι και το 0 είναι πόλος τάξης 2 της g. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών

υπολοίπων έχουμε

$$
\begin{aligned}
a_{-1} &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1}{z(e^z - e^{-z})}\,dz \\
&= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-1}}{e^z - e^{-z}}, -\pi i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(e^z - e^{-z})}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-1}}{e^z - e^{-z}}, \pi i\right) \\
&= \left.\frac{z^{-1}}{(e^z - e^{-z})'}\right|_{z=-\pi i} + \lim_{z\to 0}\left(z^2\frac{1}{z(e^z - e^{-z})}\right)' + \left.\frac{z^{-1}}{(e^z - e^{-z})'}\right|_{z=\pi i} \\
&= \left.\frac{z^{-1}}{e^z + e^{-z}}\right|_{z=-\pi i} + \lim_{z\to 0}\frac{e^z - e^{-z} - z(e^z + e^{-z})}{(e^z - e^{-z})^2} + \left.\frac{z^{-1}}{e^z + e^{-z}}\right|_{z=\pi i} \\
&= \frac{1}{2\pi i} + \lim_{z\to 0}\frac{-z(e^z - e^{-z})}{2(e^z - e^{-z})(e^z + e^{-z})} - \frac{1}{2\pi i} \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

(ii) <u>$n = -2$:</u> Σ' αυτή την περίπτωση $g(z) = f(z) = 1/(e^z - e^{-z})$ και τα ανώμαλα σημεία $\pm\pi i$, 0 είναι απλοί πόλοι της g. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$
\begin{aligned}
a_{-2} &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1}{e^z - e^{-z}}\,dz \\
&= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^z - e^{-z}}, -\pi i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^z - e^{-z}}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^z - e^{-z}}, \pi i\right) \\
&= \left.\frac{1}{e^z + e^{-z}}\right|_{z=-\pi i} + \left.\frac{1}{e^z + e^{-z}}\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{e^z + e^{-z}}\right|_{z=\pi i} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

(ii) <u>$n \leq -3$:</u> Σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$
g(z) = \frac{z^{-n-2}}{e^z - e^{-z}} \quad \text{με } -n-2 \geq 1
$$

και επομένως τα ανώμαλα σημεία $\pm\pi i$ είναι απλοί πόλοι της g. Επειδή το 0 είναι ρίζα τάξης ≥ 1 του αριθμητή και απλή ρίζα του παρανομαστή της $g(z) = z^{-n-2}/(e^z - e^{-z})$, το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Άρα, από το θεώρημα ολοκληρωτικών

υπολοίπων έχουμε

$$
\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z^{-n-2}}{e^z - e^{-z}}\, dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n-2}}{e^z - e^{-z}}, -\pi i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n-2}}{e^z - e^{-z}}, \pi\right) \\
&= \left.\frac{z^{-n-2}}{(e^z - e^{-z})'}\right|_{z=-\pi i} + \left.\frac{z^{-n-2}}{(e^z - e^{-z})'}\right|_{z=\pi i} \\
&= \left.\frac{z^{-n-2}}{e^z + e^{-z}}\right|_{z=-\pi i} + \left.\frac{z^{-n-2}}{e^z + e^{-z}}\right|_{z=\pi i} \\
&= -\frac{(-\pi i)^{-n-2}}{2} - \frac{(\pi i)^{-n-2}}{2} \\
&= -\frac{(\pi i)^{-n-2}}{2}[(-1)^{-n-2} + 1] \\
&= \begin{cases} -(\pi i)^{-n-2} & \text{αν } n = -4, -6, \ldots \\ 0 & \text{αν } n = -3, -5, \ldots . \end{cases}
\end{aligned}
$$

■

Θ5. (α΄) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $z^4 + z^2 + 1 = 0$. Ποιές ρίζες βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο;

(0,5 μον.)

(β΄) Έστω τα πολυώνυμα $P(z) = z^2$ και $Q(z) = z^4 + z^2 + 1$.

(i) Δείξτε ότι για R_0 αρκετά μεγάλο, $R_0 > 1$, υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{|z|^2}, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R_0 .$$

(ii) Αν γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με εξίσωση $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, δείξτε ότι

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 0 . \tag{2.3}$$

(1 μον.)

(γ΄) Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση, δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\, dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} .$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Θέτοντας $w = z^2$, η λύση της εξίσωσης $z^4 + z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow w^2 + w + 1 = 0$ είναι $w_{1,2} = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. Οι λύσεις της εξίσωσης $z^2 = -1/2 + i\sqrt{3}/2 = e^{i2\pi/3}$ είναι

$$z_k = e^{2(k+1/3)\pi i/2}\,, \quad k = 0, 1$$

και της εξίσωσης $z^2 = -1/2 - i\sqrt{3}/2 = e^{i4\pi/3}$ είναι

$$z_k = e^{2(k+2/3)\pi i/2}\,, \quad k = 0, 1\,.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης $z^4 + z^2 + 1 = 0$ είναι οι

$$e^{i\pi/3}\,, \quad e^{i4\pi/3} = e^{-i2\pi/3}\,, \quad e^{i2\pi/3}\,, \quad \text{και} \quad e^{i5\pi/3} = e^{-i\pi/3}\,.$$

Από τις τέσσερις ρίζες μόνο οι $e^{i\pi/3} = (1 + i\sqrt{3})/2$, $e^{i2\pi/3} = (-1 + i\sqrt{3})/2$ βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο.

(β΄) (i) Από γνωστή πολυωνυμική ανισότητα υπάρχει $R_0 \geq 1$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{2}|z|^4 \leq |Q(z)| \leq \frac{3}{2}|z|^4\,, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R_0\,.$$

Επειδή οι ρίζες του πολυωνύμου Q βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, παίρνουμε το $R_0 > 1$ έτσι ώστε ο κύκλος $|z| = R_0$ να περιέχει τις ρίζες του πολυωνύμου Q. Τότε, για κάθε $|z| \geq R_0$ είναι

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{|z|^2}{\frac{1}{2}|z|^4} = \frac{2}{|z|^2}\,.$$

(ii) Είναι

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz\right| &\leq \int_{\gamma_R} \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| |dz| \\
&\leq \int_{\gamma_R} \frac{2}{R^2}\, |dz| && (\text{από το } (i) \text{ για } |z| = R \geq R_0) \\
&= \frac{2}{R^2}\pi R = \frac{2\pi}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 0\,.$$

(γ΄) Τα $e^{i\pi/3} = (1 + i\sqrt{3})/2$, $e^{i2\pi/3} = (-1 + i\sqrt{3})/2$ είναι τα μοναδικά μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης $f(z) = \frac{z^2}{z^4+z^2+1}$ που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο.

Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη $\gamma = [-R, R] \cup \gamma_R$, με θετική φορά, όπου γ_R είναι το ημικύκλιο στο άνω ημιεπίπεδο με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ και $R > 1$. Η συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό της γ εκτός από τα σημεία $(\pm 1 + i\sqrt{3})/2$ που είναι απλοί πόλοι της f. Επειδή

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\Big(f,\, (\pm 1 + i\sqrt{3})/2\Big) &= \left.\frac{z^2}{(z^4+z^2+1)'}\right|_{z=(\pm 1+i\sqrt{3})/2} \\
&= \left.\frac{z^2}{4z^3+2z}\right|_{z=(\pm 1+i\sqrt{3})/2} \\
&= \left.\frac{z}{4z^2+2}\right|_{z=(\pm 1+i\sqrt{3})/2} = \pm\frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{4\sqrt{3}i}\,,
\end{aligned}$$

από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz &= 2\pi i\left[\operatorname{Res}\Big(f,\,(1+i\sqrt{3})/2\Big) + \operatorname{Res}\Big(f,\,(-1+i\sqrt{3})/2\Big)\right] \\
&= \frac{\pi i}{2\sqrt{3}i}[(1+i\sqrt{3}) - (-1+i\sqrt{3})] = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Επειδή από τη (2.3)

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0\,,$$

παίρνοντας στην $(*)$ το $R \to \infty$ έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

και άρα

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,.$$

■

2.3 Ακαδημαϊκό έτος 2014–15

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξετάσεις στη Μιγαδική Ανάλυση

9 Ιουλίου, 2015

Θ1. (α΄) Έστω η συνάρτηση $w = \sin z$, $z \in \mathbb{C}$.

(i) Δείξτε ότι $|\sin z| \leq \cosh R$, για κάθε z στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0, R)$.

(ii) Δείξτε ότι $\sin \overline{z} = \overline{\sin z}$, $z \in \mathbb{C}$.

(1,3 μον.)

(β΄) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$, σαν συνάρτηση των x και y, έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$. Αν $h \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih}\,, \quad \text{για κάθε } z \in U\,,$$

δείξτε ότι η f είναι αναλυτική στο U. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) (i) Αν $z = x + iy \in \overline{D}(0, R)$, είναι $x^2 + y^2 \leq R^2$. Τότε $|y| \leq R \Leftrightarrow -R \leq y \leq R$ και επομένως $\cosh y \leq \cosh R$ (η $u = \cosh y$ είναι άρτια συνάρτηση, γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνήσια αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$). Επειδή $|e^{ix}| = |e^{-ix}| = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \left| \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right| \\ &\leq \frac{|e^{iz}| + |e^{-iz}|}{2} \\ &= \frac{|e^{ix}|e^{-y} + |e^{-ix}|e^{y}}{2} \\ &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y \leq \cosh R\,. \end{aligned}$$

(ii) Επειδή $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ και $\sin \overline{z} = \sin(x - iy) = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$, είναι

$$\sin \overline{z} = \overline{\sin z}\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

(β΄) Έστω $z = x + iy \in U$. Αν $z + h \in U$, τότε το $z + h = x + iy + h = (x + h) + iy$ ταυτίζεται με το σημείο $(x + h, y) \in U$ και

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = f_x(x, y)\,.$$

Αν $z + ih \in U$, τότε το $z + ih = x + iy + ih = x + i(y + h)$ ταυτίζεται με το σημείο $(x, y + h) \in U$ και

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{ih} \\ &= -i \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = -if_y(x, y)\,.\end{aligned}$$

Επομένως, $f_x(x, y) = -if_y(x, y)$ για κάθε $z = x + iy \in U$, δηλαδή ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο U. Επειδή από την υπόθεση η συνάρτηση f, σαν συνάρτηση των x και y, έχει συνεχείς μερικές παραγώγους, από γνωστό θεώρημα η f είναι αναλυτική στο U.

■

Θ2. (α΄) Έστω $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $z_0 \in U$ ρίζα τάξης $n \geq 1$ της f. Δείξτε ότι υπάρχει αναλυτική συνάρτηση ϕ σε μια περιοχή $D(z_0, \delta) \subset U$ του z_0, τέτοια ώστε

$$f(z) = \phi(z)^n\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0, \delta)\,, \tag{2.4}$$

με $\phi(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D'(z_0, \delta) = D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$. (1 μον.)

(β΄) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(z)| \leq A + B|z - i|^{3/2}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, όπου $A, B > 0$. Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες Cauchy, δείξτε ότι

$$f(z) = a_0 + a_1(z - i)\,, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{C},\ |a_0| \leq A\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή το z_0 είναι ρίζα τάξης n της f

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)\,,$$

όπου g αναλυτική συνάρτηση στο U με $g(z_0) \neq 0$. Τότε ως γνωστόν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0, \delta) \subset U$. Επειδή ο ανοικτός δίσκος $D(z_0, \delta)$ είναι ένας απλά συνεκτικός τόπος στον οποίο η αναλυτική συνάρτηση g δεν μηδενίζεται, από γνωστό θεώρημα υπάρχει αναλυτική n-οστή ρίζα h της g στο $D(z_0, \delta)$. Δηλαδή υπάρχει αναλυτική συνάρτηση h στο $D(z_0, \delta)$ με

$$g(z) = h(z)^n\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0, \delta)\,.$$

Τότε η συνάρτηση $\phi(z) := (z - z_0)h(z)$ είναι αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $D(z_0, \delta)$ και τέτοια ώστε

$$f(z) = \phi(z)^n\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0, \delta)\,,$$

με $\phi(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D'(z_0, \delta) = D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$.

(β΄) Επειδή η $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ακέραια συνάρτηση,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(i)}{n!}(z-i)^n\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

Έστω $C(i,\, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = R\}$ κύκλος με κέντρο i και ακτίνα $R > 0$. Από την υπόθεση έχουμε

$$\max_{|z-i|=R} |f(z)| \leq A + BR^{3/2}$$

και από τις ανισότητες Cauchy για κάθε $n \geq 2$ είναι

$$|a_n| = \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} \leq \frac{\max_{|z-i|=R} |f(z)|}{R^n} \leq \frac{A + BR^{3/2}}{R^n} = A\frac{1}{R^n} + B\frac{1}{R^{n-3/2}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,.$$

Επομένως $a_n = 0$, για κάθε $n \geq 2$. Άρα η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 1, δηλαδή $f(z) = a_0 + a_1(z - i)$, $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$. Επειδή $f(i) = a_0$, από την υπόθεση έπεται ότι $|a_0| \leq A$.

■

Θ3. (α΄) Να βρεθεί η σειρά(ανάπτυγμα) Laurent της

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2-1)}$$

με κέντρο το $z_0 = 1$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $-1 + i$.

(1 μον.)

(β΄) Έστω $\dfrac{z^3}{\sin(\pi z)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{z^3}{\sin(\pi z)}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\} \text{ με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \leq 2$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι: -1 και 1. Επομένως το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το 1 μπορεί να γίνει στους δακτυλίους

$$\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 2\} \quad \text{και} \quad \Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 2\}\,.$$

Επειδή το $-1+i \in \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 2\}$, θα αναπτύξουμε την f στο δακτύλιο Δ_2 που είναι ο μεγαλύτερος δακτύλιος που περιέχει το σημείο $-1+i$. Ως γνωστόν

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n\,, \quad |w| < 1\,. \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά παίρνουμε

$$-\frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n w^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n w^{n-1}\,, \quad |w| < 1\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z+1)^2(z-1)} \\
&= \frac{1}{((z-1)+2)^2(z-1)} \\
&= \frac{1}{(z-1)^3} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{2}{z-1}\right)^2} \\
&= \frac{1}{(z-1)^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \left(\frac{2}{z-1}\right)^{n-1} \qquad \left(\left|\frac{2}{z-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1| > 2\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{n-1} n \frac{1}{(z-1)^{n+2}}\,.
\end{aligned}$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα ισχύει στο δακτύλιο $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 2\}$ που είναι ο μεγαλύτερος δυνατός δακτύλιος που περιέχει το σημείο $-1+i$.

(β΄) Είναι $\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow \pi z = k\pi \Leftrightarrow z = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Τα $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f. Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z^3/\sin(\pi z)}{z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z^{-n+2}}{\sin(\pi z)}\, dz\,,$$

όπου ο κύκλος $|z| = r$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $1 < r < 2$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ. Τα σημεία 0 και ± 1 βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$.

(i) $\underline{n = 2}$: Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε

$$a_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{1}{\sin \pi z}\, dz\,.$$

Τα σημεία 0 και ± 1 είναι απλοί πόλοι της $g(z) = \frac{1}{\sin(\pi z)}$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} a_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{1}{\sin(\pi z)}\, dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(\pi z)}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(\pi z)}, 0\right) \\ &\quad + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin(\pi z)}, 1\right) \\ &= \left.\frac{1}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=-1} + \left.\frac{1}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=1} \\ &= -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}\,. \end{aligned}$$

(ii) $\underline{n \le 1}$: Σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$g(z) = \frac{z^{-n+2}}{\sin(\pi z)}\,, \quad \text{με } -n+2 \ge 1\,.$$

Τα σημεία ± 1 είναι απλοί πόλοι της g ενώ το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z^{-n+2}}{\sin(\pi z)}\, dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n+2}}{\sin(\pi z)}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n+2}}{\sin(\pi z)}, 1\right) \\ &= \left.\frac{z^{-n+2}}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=-1} + \left.\frac{z^{-n+2}}{(\sin(\pi z))'}\right|_{z=1} \\ &= -\frac{(-1)^{-n+2}}{\pi} - \frac{1}{\pi} \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{\pi} & \text{αν } -n \text{ άρτιος ή } n = 0 \\ 0 & \text{αν } -n \text{ περιττός ή } n = 1\,. \end{cases} \end{aligned}$$

■

Θ4. Έστω τα πολυώνυμα $P(z) = z$ και $Q(z) = (z^2 + 2z + 2)^2$.

(α΄) (i) Δείξτε ότι για R_0 αρκετά μεγάλο, $R_0 > \sqrt{2}$, υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{|z|^3}\,, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R_0\,.$$

(ii) Αν γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με εξίσωση $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, δείξτε ότι

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 0\,. \tag{2.5}$$

(1,5 μον.)

(β΄) Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2}\, dx\,.$$

(1,2 μον.)

Λύση.

(α΄) (i) Από γνωστή πολυωνυμική ανισότητα υπάρχει $R_0 \geq 1$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{2}|z|^4 \leq |Q(z)| \leq \frac{3}{2}|z|^4\,, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R_0$$

Παίρνουμε το $R_0 > \sqrt{2}$ έτσι ώστε ο κύκλος $|z| = R_0$ να περιέχει τις ρίζες $-1 \pm i$ του πολυωνύμου Q. Τότε, για κάθε $|z| \geq R_0$ είναι

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{|z|}{\frac{1}{2}||z|^4} = \frac{2}{|z|^3}\,.$$

(ii) Είναι

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz\right| &\leq \int_{\gamma_R} \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| |dz| \\
&\leq \int_{\gamma_R} \frac{2}{R^3}\, |dz| && \text{(από το (i) για } |z| = R \geq R_0) \\
&= \frac{2}{R^3}\pi R = \frac{2\pi}{R^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 0\,.$$

(β΄) Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+2z+2)^2}$$

έχει μεμονωμένα ανώμαλα σημεία τα $-1 \pm i$ και το $-1+i$ βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο. Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη $\gamma = [-R, R] \cup \gamma_R$, με θετική φορά, όπου γ_R είναι το ημικύκλιο στο άνω ημιεπίπεδο με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ και $R > \sqrt{2}$. Η συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό της γ εκτός από το $z = -1+i$ που είναι πόλος τάξης 2 της f. Επειδή

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, -1+i) &= \lim_{z \to -1+i} \left[(z+1-i)^2 \frac{z}{(z+1-i)^2 (z+1+i)^2} \right]' \\ &= \lim_{z \to -1+i} \left(\frac{z}{(z+1+i)^2} \right)' = \lim_{z \to -1+i} \frac{-z+1+i}{(z+1+i)^3} = -\frac{1}{4i}\,, \end{aligned}$$

από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1+i) = 2\pi i \left(-\frac{1}{4i} \right) = -\frac{\pi}{2}\,. \qquad (*)$$

Επειδή από τη (2.5)

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0\,,$$

παίρνοντας στην $(*)$ το $R \to \infty$ έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\,.$$

■

Επαναληπτική Εξέταση στη Μιγαδική Ανάλυση

2 Οκτωβρίου, 2015

Θ1. Υπάρχει ακέραια συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ με πραγματικό μέρος $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 7y$; Αν ναι, να βρεθεί η συζυγής αρμονική v της u καθώς επίσης και η ακέραια συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Να εκφράσετε την f σαν συνάρτηση του $z = x+iy$. (1 μον.)

Λύση. Επειδή η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης με $u_{xx} + u_{yy} = 6x - 6x = 0$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, η u είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Ως γνωστόν, στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C}$ υπάρχει συζυγής αρμονική v της u. Δηλαδή η $f = u + iv$ είναι ακέραια συνάρτηση. Από την εξίσωση Cauchy–Riemann $u_x = v_y$ έχουμε $v_y = 3x^2 - 3y^2$ και επομένως $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + c(x)$. Από τη δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann $v_x = -u_y$ προκύπτει ότι

$$6xy + c'(x) = -(-6xy - 7) \Leftrightarrow c'(x) = 7 \text{ και άρα } c(x) = 7x + c\,.$$

Δηλαδή

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 7x + c$$

και κατά συνέπεια

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) = z^3 + i(7z + c) = z^3 + 7iz + ic\,,$$

■

Θ2. (α΄) Διατυπώστε την 1η και τη 2η μορφή της αρχής μεγίστου και της αρχής ελαχίστου σ' ένα τόπο G του $\mathbb{C}$. (0,8 μον.)

(β΄) Έστω η συνάρτηση $f(z) = e^{z^3}$ και έστω $\overline{D}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος. Να βρεθούν τα σημεία του $\overline{D}(0, 1)$ στα οποία η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της καθώς επίσης και το $\max_{z\in\overline{D}(0,1)} |f(z)|$, $\min_{z\in\overline{D}(0,1)} |f(z)|$. (1,2 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [9].

(β΄) Επειδη η f είναι ακέραια συνάρτηση και δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{C}$, από την αρχή μεγίστου/ελαχίστου η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο του $\overline{D}(0, 1)$ που είναι ο μοναδιαίος κύκλος $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Αν $z = x + iy$, τότε

$$|f(z)| = |e^{z^3}| = \left|e^{x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3}\right| = e^{x^3-3xy^2} = e^{4x^3-3x}\,. \qquad (y^2 = 1 - x^2)$$

Δηλαδή $|f(z)| = e^{4x^3-3x}$, $-1 \le x \le 1$. Η μέγιστη τιμή της $|f(z)|$ είναι e για $x = -1/2$ και $x = 1$ και η ελάχιστη τιμή της είναι e^{-1} για $x = 1/2$ και $x = -1$. Επομένως

$$\max_{z\in\overline{D}(0,1)} |f(z)| = |f\left(-1/2 \pm i\sqrt{3}/2\right)| = |f(1)| = e$$

και

$$\min_{z\in\overline{D}(0,1)} |f(z)| = |f\left(1/2 \pm i\sqrt{3}/2\right)| = |f(-1)| = 1/e\,.$$

■

Θ3. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0,1) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq 1\}$. Αν $0 < |z| < 1$, δείξτε ότι

$$2\pi i f(z) = \oint_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \oint_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - 1/\overline{z}}\, d\zeta\,. \tag{$*$}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, να δείξετε τον *ολοκληρωτικό τύπο Poisson*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} f(e^{it})\, dt$$

και ισοδύναμα

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta - t) + r^2} f(e^{it})\, dt\,, \quad 0 < r < 1\,.$$

(2 μον.)

Λύση. Επειδή το $1/\overline{z}$ βρίσκεται εκτός του μοναδιαίου κύκλου $|\zeta| = 1$, από το θεώρημα Cauchy το ολοκλήρωμα

$$\oint_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - 1/\overline{z}}\, d\zeta = 0\,.$$

Επομένως, από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \Leftrightarrow 2\pi i f(z) = \oint_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \oint_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - 1/\overline{z}}\, d\zeta\,.$$

Επειδή $|\zeta| = 1 \Leftrightarrow \zeta\overline{\zeta} = 1$, είναι

$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - 1/\overline{z}} = \frac{1}{\zeta - z} - \frac{\overline{z}}{\zeta\overline{z} - 1} = \frac{1}{\zeta - z} + \frac{\overline{z}}{1 - \zeta\overline{z}} = \frac{1}{\zeta - z} + \frac{\overline{z}}{\zeta\overline{\zeta} - \zeta\overline{z}} = \frac{1-|z|^2}{\zeta|\zeta - z|^2}\,.$$

Η παραμετρική εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $\zeta(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, και επομένως από την $(*)$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{1-|z|^2}{\zeta|\zeta - z|^2} f(\zeta)\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{e^{it}|e^{it}-z|^2} f(e^{it}) i e^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} f(e^{it})\, dt\,. \end{aligned}$$

Αν $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$, ισοδύναμα έχουμε

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{|e^{it}-re^{i\theta}|^2} f(e^{it})\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-r\left(e^{i(\theta-t)}+e^{-i(\theta-t)}\right)+r^2} f(e^{it})\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} f(e^{it})\,dt\,. \end{aligned}$$

■

Θ4. (α΄) Να βρεθεί η σειρά(ανάπτυγμα) Laurent της

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$$

με κέντρο το $z_0 = -1$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο i.

(1,2 μον.)

(β΄) Έστω $\dfrac{z^3\cos z}{e^{2iz}-1} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{z^3\cos z}{e^{2iz}-1}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \pi < |z| < 2\pi\} \quad \text{με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \leq 2$. (1,8 μον.)

Λύση.

(α΄) Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι: -1 και 0. Επομένως το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το -1 μπορεί να γίνει στους δακτυλίους

$$\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 1\} \quad \text{και} \quad \Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| > 1\}\,.$$

Επειδή το $i \in \{z \in \mathbb{C} : |z+1| > 1\}$ θα αναπτύξουμε την f στο δακτύλιο Δ_2 που είναι ο μεγαλύτερος δακτύλιος που περιέχει το σημείο i. Ως γνωστόν

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n\,, \quad |w| < 1\,. \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά παίρνουμε

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1}\,, \quad |w| < 1\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2(z+1)} \\ &= \frac{1}{((z+1)-1)^2(z+1)} \\ &= \frac{1}{(z+1)^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z+1}\right)^2} \\ &= \frac{1}{(z+1)^3}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{z+1}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{(z+1)^{n+2}}\,. \quad \left(\left|\tfrac{1}{z+1}\right|<1 \Leftrightarrow |z+1|>1\right) \end{aligned}$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα ισχύει στο δακτύλιο $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| > 1\}$ που είναι ο μεγαλύτερος δυνατός δακτύλιος που περιέχει το σημείο i.

(β΄) Είναι $e^{2iz} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Leftrightarrow 2iz = 2k\pi i \Leftrightarrow z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Τα $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f. Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z^3\cos z/(e^{2iz}-1)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{z^{-n+2}\cos z}{e^{2iz}-1}\,dz\,,$$

όπου ο κύκλος $|z| = r$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $\pi < r < 2\pi$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ. Τα σημεία 0 και $\pm\pi$ βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$.

(i) $\underline{n = 2}$: Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε

$$a_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{\cos z}{e^{2iz}-1}\,dz\,.$$

Τα σημεία 0 και $\pm\pi$ είναι απλοί πόλοι της $g(z) = \frac{\cos z}{e^{2iz}-1}$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} a_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{\cos z}{e^{2iz}-1}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{\cos z}{e^{2iz}-1}, -\pi\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{\cos z}{e^{2iz}-1}, 0\right) \\ &\quad + \operatorname{Res}\left(\frac{\cos z}{e^{2iz}-1}, \pi\right) \\ &= \left.\frac{\cos z}{(e^{2iz}-1)'}\right|_{z=-\pi} + \left.\frac{\cos z}{(e^{2iz}-1)'}\right|_{z=0} + \left.\frac{\cos z}{(e^{2iz}-1)'}\right|_{z=\pi} \\ &= -\frac{1}{2i} + \frac{1}{2i} - \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2i}\,. \end{aligned}$$

(ii) $\underline{n \leq 1}$: Σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$g(z) = \frac{z^{-n+2}\cos z}{e^{2iz}-1}\,, \quad \text{με } -n+2 \geq 1\,.$$

Τα σημεία $\pm\pi$ είναι απλοί πόλοι της g ενώ το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z^{-n+2}\cos z}{e^{2iz}-1}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n+2}\cos z}{e^{2iz}-1}, -\pi\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n+2}\cos z}{e^{2iz}-1}, \pi\right) \\ &+ \left.\frac{z^{-n+2}\cos z}{(e^{2iz}-1)'}\right|_{z=-\pi} + \left.\frac{z^{-n+2}\cos z}{(e^{2iz}-1)'}\right|_{z=\pi} \\ &= -\frac{(-\pi)^{-n+2}}{2i} - \frac{\pi^{-n+2}}{2i} \\ &= \begin{cases} -\frac{\pi^{-n+2}}{i} & \text{αν } -n \text{ άρτιος ή } n=0 \\ 0 & \text{αν } -n \text{ περιττός ή } n=1\,. \end{cases} \end{aligned}$$

■

Θ5. Έστω P, Q δύο πολυώνυμα. Αν γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με παραμετρική εξίσωση $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, διατυπώστε το λήμμα Jordan για το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}\,dz\,, \quad \lambda > 0\,.$$

Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα πολυώνυμα;

Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση και το λήμμα Jordan, δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2} e^{i\lambda x}\,dx = \pi i e^{-\lambda a}\,, \quad a, \lambda > 0\,,$$

και στη συνέχεια υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx$. (2 μον.)

Λύση. *Λήμμα Jordan*: Αν βαθμός $Q(z) \geq$ βαθμός $P(z)+1$ και $\lambda > 0$, τότε

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}\,dz = 0\,.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z}{z^2+a^2}\,, \quad a > 0\,.$$

Τα $\pm ai$ είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f και το ai βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο. Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη $\gamma = [-R, R] \cup \gamma_R$, με θετική φορά, όπου γ_R είναι το ημικύκλιο στο άνω ημιεπίπεδο με παραμετρική εξίσωση $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, και $R > a$. Η συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό της γ εκτός από το σημείο $z = ai$ που είναι απλός πόλος της f. Επειδή

$$\operatorname{Res}\Big(f(z)e^{i\lambda z}, ai\Big) = \lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{z}{(z-ai)(z+ai)}e^{i\lambda z} = \frac{e^{-\lambda a}}{2}\,,$$

από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\lambda x}\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\Big(f(z)e^{i\lambda z}, ai\Big) = 2\pi i\left(\frac{e^{-\lambda a}}{2}\right) = \pi i e^{-\lambda a}\,. \quad (**)$$

Επειδή βαθμός $(z^2 + a^2) =$ βαθμός $(z) + 1$ και $\lambda > 0$, από το λήμμα Jordan

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z}\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{z}{z^2+a^2}e^{i\lambda z}\,dz = 0\,.$$

Παίρνοντας στην (∗∗) το $R \to \infty$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}e^{i\lambda x}\,dx = \pi i e^{-\lambda a}\,.$$

Επειδή $e^{i\lambda x} = \cos\lambda x + i\sin\lambda x$, για $\lambda = 1$ έπεται ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx = \pi e^{-a}\,.$$

■

2.4 Ακαδημαϊκό έτος 2013–14

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξετάσεις στη Μιγαδική Ανάλυση

8 Σεπτεμβρίου, 2014

Θ1. Έστω $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, αναλυτική συνάρτηση στον τόπο G.

(i) Αν $z = x + iy \in G$, δείξτε ότι η μερική παράγωγος $f_y(x, y)$ υπάρχει (θεωρούμε την f σαν συνάρτηση των x και y) και είναι

$$f'(z) = -if_y(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y)\,.$$

(0,6 μον.)

(ii) Αν το $\Re f = u$ είναι σταθερό στο G, δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο G. (0,6 μον.)

(iii) Έστω F_1, F_2, αναλυτικές συναρτήσεις στο G με

$$e^{F_1(z)} = e^{F_2(z)}\,, \quad \text{για κάθε } z \in G\,.$$

Δείξτε ότι $F_2 = F_1 + c$, για κάποιο $c \in \mathbb{C}$. (0,8 μον.)

Λύση.

(i) Αν $h = ik$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ με $z + h \in G$, τότε το $z + h = x + iy + ik = x + i(y + k)$ ταυτίζεται με το σημείο $(x, y + k) \in U$ και επομένως

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h=ik,k\in\mathbb{R}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{\substack{k\to 0\\ k\in\mathbb{R}}} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{ik} \\ &= -i \lim_{\substack{k\to 0\\ k\in\mathbb{R}}} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} = -if_y(x, y)\,. \end{aligned}$$

Άρα, η μερική παράγωγος $f_y(x, y)$ υπάρχει και η παράγωγος $f'(z) = -if_y(x, y) = -i(u_y(x, y) + iv_y(x, y)) = v_y(x, y) - iu_y(x, y)$.

(ii) Επειδή η u είναι σταθερή στο G, είναι $u_x = u_y = 0$ στο G και από τις εξισώσεις Cauchy–Riemann $\{u_x = v_y,\, u_y = -v_x\}$ έπεται ότι $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ στο G. Τότε από το (i) έχουμε ότι $f'(z) = 0$, για κάθε z στον τόπο G και επομένως από γνωστή πρόταση η f είναι σταθερή στο G.

(iii) Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$e^{F_2(z)-F_1(z)} = 1\,, \quad \text{για κάθε } z \in G$$

και επομένως $F_2(z) - F_1(z) = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Επειδή η συνάρτηση $F_2 - F_1$ είναι αναλυτική στο G με $\Re(F_2 - F_1) = 0$, από τη (ii) έπεται ότι η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή στο G, έστω $F_2 - F_1 = c$. Άρα, $F_2 = F_1 + c$, για κάποιο $c \in \mathbb{C}$.

<u>2ος τρόπος</u>: Επειδή $e^{F_1(z)} = e^{F_2(z)}$ για κάθε $z \in G$, παραγωγίζοντας έχουμε

$$F_1'(z)e^{F_1(z)} = F_2'(z)e^{F_2(z)} \Leftrightarrow F_1'(z) = F_2'(z) \Leftrightarrow (F_2 - F_1)'(z) = 0\,, \quad \text{για κάθε } z \in G\,.$$

Επομένως από γνωστή πρόταση η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή στον τόπο G, έστω $F_2 - F_1 = c$. Άρα, $F_2 = F_1 + c$, για κάποιο $c \in \mathbb{C}$.

■

Θ2. Έστω γ_R το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με κέντρο 0 ακτίνα $R > 0$, $R \neq 1$ και θετική φορά. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cauchy και τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy, δείξτε ότι

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\,dz = \begin{cases} -2\arctan R & \text{αν } 0 < R < 1 \\ \pi - 2\arctan R & \text{αν } R > 1\,. \end{cases}$$

(1,3 μον.)

Λύση. Τα $\pm i$ είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Η παραμετρική εξίσωση του ημικύκλιου γ_R είναι $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$. Θεωρούμε την απλή κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη $\gamma := [-R, R] + \gamma_R$ η οποία έχει θετική φορά.

(i) $\underline{0 < R < 1}$: Επειδή σ' αυτή την περίπτωση η f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό της καμπύλης γ, από το θεώρημα Cauchy

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\,dz = 0\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\, dz &= -\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ &= -\arctan x\big|_{x=-R}^{x=R} = -(\arctan R - \arctan(-R)) = -2\arctan R\,.\end{aligned}$$

(ii) $\underline{R > 1}$: Σ' αυτή την περίπτωση το i βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης γ. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{1+z^2}\, dz = \oint_{\gamma} \frac{1/(z+i)}{z-i}\, dz = 2\pi i\, \frac{1}{z+i}\bigg|_{z=i} = \pi\,.$$

Επομένως,

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\, dz = \oint_{\gamma} \frac{1}{1+z^2}\, dz - \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi - 2\arctan R\,.$$

■

Θ3. Έστω $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $z_0 \in U$ ρίζα τάξης $n \geq 1$ της f. Τότε υπάρχει αναλυτική συνάρτηση $g : U \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$f(z) = (z-z_0)^n g(z) \quad \text{με } g(z_0) \neq 0\,. \tag{2.6}$$

(i) Δείξτε ότι υπάρχει περιοχή $D(z_0, \delta) \subset U$ του z_0, ώστε $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0, \delta)$.

(0,5 μον.)

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει αναλυτική συνάρτηση h στην περιοχή $D(z_0, \delta)$ του z_0 ώστε

$$f(z) = (z-z_0)^n e^{h(z)}\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0, \delta)\,.$$

(0,5 μον.)

(iii) Αν $k \in \mathbb{N}$ και $0 < r < \delta$, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} z^k \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(i) Επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο z_0 με $g(z_0) \neq 0$, για $\varepsilon = |g(z_0)|/2$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \in U$ με $z \in D(z_0, \delta)$, δηλαδή $|z - z_0| < \delta$, να ισχύει $|g(z) - g(z_0)| < |g(z_0)|/2$. Επειδή το U είναι ανοικτό σύνολο, παίρνουμε το $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε $D(z_0, \delta) \subset U$. Τότε για κάθε $z \in D(z_0, \delta)$ έχουμε

$$||g(z)| - |g(z_0)|| \leq |g(z) - g(z_0)| < |g(z_0)|/2$$

και κατά συνέπεια

$$|g(z_0)| - |g(z_0)|/2 < |g(z)| < |g(z_0)| + |g(z_0)|/2 \Leftrightarrow |g(z_0)|/2 < |g(z)| < 3|g(z_0)|/2\,.$$

Επομένως $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0, \delta) \subset U$.

(ii) Επειδή το $D(z_0, \delta)$ είναι ένας απλά συνεκτικός τόπος στον οποίο η αναλυτική συνάρτηση g δεν μηδενίζεται, από γνωστό θεώρημα υπάρχει αναλυτική συνάρτηση h στο $D(z_0, \delta)$ με $e^{h(z)} = g(z)$ για κάθε $z \in D(z_0, \delta)$(η h είναι ένας αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου της $g(z)$). Επομένως είναι

$$f(z) = (z - z_0)^n e^{h(z)}\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0, \delta)\,.$$

(iii) Παραγωγίζοντας την (2.6) έχουμε $f'(z) = n(z-z_0)^{n-1}g(z)+(z-z_0)^n g'(z)$ και επομένως

$$z^k \frac{f'(z)}{f(z)} = n\frac{z^k}{z - z_0} + \frac{z^k g'(z)}{g(z)}\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0, \delta)\,.$$

Επειδή η συνάρτηση $w = \dfrac{z^k g'(z)}{g(z)}$ είναι αναλυτική στο δίσκο $D(z_0, \delta)$(είναι πηλίκο αναλυτικών συναρτήσεων με $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0, \delta)$), από το θεώρημα Cauchy

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{z^k g'(z)}{g(z)}\,dz = 0\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r} z^k \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r} n\frac{z^k}{z - z_0}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r} \frac{z^k g'(z)}{g(z)}\,dz \\
&= n\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r} \frac{z^k}{z - z_0}\,dz \\
&= n z_0^k\,. && \text{(ολοκληρωτικός τύπος Cauchy)}
\end{aligned}$$

■

Θ4. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $z_0 \in U$ ρίζα τάξης $n \geq 1$ της f. Τότε ως γνωστόν υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f_1 στο U και περιοχή $D(z_0, \delta) \subset U$ του z_0, ώστε

$$f(z) = (z - z_0)^n f_1(z)\,, \quad \text{με } f_1(z) \neq 0 \text{ για κάθε } z \in D(z_0, \delta)\,.$$

Αν $f\left(D(z_0, \delta)\right) \subseteq D(0, R)$, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση g είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο $D'(0, R) : 0 < |w| < R$ και ότι το 0 είναι πόλος τάξης $m \geq 1$ της g. Δείξτε ότι το z_0 είναι πόλος τάξης mn της συνάρτησης $h := g \circ f$. (1 μον.)

Λύση. Επειδή το $w = 0$ είναι πόλος τάξης $m \geq 1$ της g,

$$g(w) = \frac{g_1(w)}{w^m}\,, \text{ όπου } g_1 \text{ αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο } |w| < R \text{ με } g_1(0) \neq 0\,.$$

Τότε

$$h(z) = g(f(z)) = \frac{g_1(f(z))}{f(z)^m} = \frac{g_1(f(z))}{(z - z_0)^{mn} f_1(z)^m} = \frac{H(z)}{(z - z_0)^{mn}}\,, \quad 0 < |z - z_0| < \delta\,,$$

όπου $H(z) := \dfrac{g_1(f(z))}{f_1(z)^m}$. Επειδή η H είναι πηλίκο αναλυτικών συναρτήσεων με $f_1(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0, \delta)$, η H είναι αναλυτική συνάρτηση στο $D(z_0, \delta)$ με

$$H(z_0) = \frac{g_1(f(z_0))}{f_1(z_0)^m} = \frac{g_1(0)}{f_1(z_0)^m} \neq 0\,.$$

Άρα, το z_0 είναι πόλος τάξης mn της συνάρτησης $w = h(z) = g(f(z))$. ■

Θ5. (α΄) Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}\,.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα(η σειρά) Laurent της f με κέντρο το $z_0 = -i$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $3 - i$. (1 μον.)

(β΄) Έστω $\dfrac{z^2}{\sin z} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{z^2}{\sin z}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \pi < |z| < 2\pi\} \;\text{ με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \leq 1$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή
$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}\,,$$
τα $\pm i$ είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f. Επομένως το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $-i$ μπορεί να γίνει στους δακτυλίους: $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+i| < 2\}$ (διάτρητος δίσκος) και $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| > 2\}$. Επειδή το $3-i \in \Delta_2$, θα αναπτύξουμε την f στο δακτύλιο Δ_2. Θα χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρική σειρά
$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n\,, \quad |w| < 1\,.$$
Επομένως,
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{[(z+i)-2i](z+i)} \\ &= \frac{1}{(z+i)^2\left(1-\frac{2i}{z+i}\right)} \\ &= \frac{1}{(z+i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{z+i}\right)^n \qquad\qquad \left(\left|\tfrac{2i}{z+i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+i| > |2i| = 2\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(2i)^n\frac{1}{(z+i)^{n+2}} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}(2i)^{n-2}\frac{1}{(z+i)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-2}(2i)^{-n-2}(z+i)^n\,. \end{aligned}$$
Το παραπάνω ανάπτυγμα ισχύει στο δακτύλιο $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| > 2\}$ που είναι ο μεγαλύτερος δυνατός δακτύλιος που περιέχει το σημείο $3-i$.

(β΄) Τα $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f. Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{z^2/\sin z}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{z^{-n+1}}{\sin z}\,dz\,,$$
όπου ο κύκλος $|z| = r$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $\pi < r < 2\pi$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ. Τα σημεία 0 και $\pm\pi$ βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$.

(i) <u>$n = 1$:</u> Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε
$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{1}{\sin z}\,dz\,.$$

Τα σημεία 0 και $\pm\pi$ είναι απλοί πόλοι της $g(z) = \frac{1}{\sin z}$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1}{\sin z}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin z}, -\pi\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin z}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin z}, \pi\right) \\ &= \left.\frac{1}{(\sin z)'}\right|_{z=-\pi} + \left.\frac{1}{(\sin z)'}\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{(\sin z)'}\right|_{z=\pi} \\ &= -1 + 1 - 1 = -1\,. \end{aligned}$$

(ii) $\underline{n \le 0}$: Σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$g(z) = \frac{z^{-n+1}}{\sin z}\,, \quad \text{με } -n+1 \ge 1\,.$$

Τα σημεία $\pm\pi$ είναι απλοί πόλοι της g ενώ το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z^{-n+1}}{\sin z}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n+1}}{\sin z}, -\pi\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n+1}}{\sin z}, \pi\right) \\ &= \left.\frac{z^{-n+1}}{(\sin z)'}\right|_{z=-\pi} + \left.\frac{z^{-n+1}}{(\sin z)'}\right|_{z=\pi} \\ &= -(-\pi)^{-n+1} - \pi^{-n+1} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{αν } -n \text{ άρτιος} \\ -2\pi^{-n+1} & \text{αν } -n \text{ περιττός}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

■

Θ6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta - i\sin\theta}\,d\theta\,.$$

(1,2 μον.)

Λύση. Θέτουμε $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, οπότε $\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta} = 1/z$ και

$$dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \Leftrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}\,.$$

Επομένως,

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta - i\sin\theta}\,d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{e^{1/z}}{iz}\,dz = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{e^{1/z}}{z}\,dz\,.$$

Επειδή
$$\frac{e^{1/z}}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n+1}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^3} + \cdots\,, \quad |z| > 0\,,$$
το $\operatorname{Res}\left(\frac{e^{1/z}}{z}, 0\right) = 1$ και από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta - i\sin\theta}\, d\theta = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{e^{1/z}}{z}\, dz = \frac{1}{i}2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{1/z}}{z}, 0\right) = 2\pi\,.$$

■

Επαναληπτική εξέταση στη Μιγαδική Ανάλυση

22 Σεπτεμβρίου, 2014

Θ1. Να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση $u(x, y) = e^{-y}\cos x + ax^2y - y^3$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Στη συνέχεια να βρεθεί η συζυγής αρμονική v της u καθώς επίσης και η ακέραια συνάρτηση $f = u + iv$, με $f(0) = 1 - i$. Να εκφράσετε την f σαν συνάρτηση του $z = x + iy$. (1,5 μον.)

Λύση. Είναι $u_{xx} + u_{yy} = (-e^{-y}\cos x + 2ay) + (e^{-y}\cos x - 6y) = 2(a - 3)y$. Για να είναι η u αρμονική θα πρέπει να ισχύει $u_{xx} + u_{yy} = 0$ και ισοδύναμα $2(a - 3)y = 0$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Επομένως $a = 3$ και κατά συνέπεια
$$u(x, y) = e^{-y}\cos x + 3x^2y - y^3\,.$$

Ως γνωστόν, στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C}$ υπάρχει συζυγής αρμονική v της u. Δηλαδή η $f = u + iv$ είναι ακέραια συνάρτηση. Από την εξίσωση Cauchy–Riemann $u_x = v_y$ έχουμε $v_y = -e^{-y}\sin x + 6xy$ και επομένως $v(x, y) = e^{-y}\sin x + 3xy^2 + c(x)$. Από τη δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann $v_x = -u_y$ προκύπτει ότι
$$e^{-y}\cos x + 3y^2 + c'(x) = e^{-y}\cos x - 3x^2 + 3y^2 \Leftrightarrow c'(x) = -3x^2 \text{ και άρα } c(x) = -x^3 + c\,.$$

Δηλαδή
$$v(x, y) = e^{-y}\sin x + 3xy^2 - x^3 + c$$

και κατά συνέπεια

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = \cos z + i(\sin z - z^3 + c) = e^{iz} - iz^3 + ic\,,$$

$c \in \mathbb{R}$. Όμως $f(0) = 1 - i$, οπότε $c = -1$. Άρα,

$$f(z) = e^{iz} - iz^3 - i\,.$$

■

Θ2. Έστω f ακέραια συνάρτηση και έστω γ κλειστή λεία καμπύλη.

(α΄) Αν η γ είναι απλή και περιέχει τα σημεία -1 και 1, χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy δείξτε ότι

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^2-1}\,dz = \pi i\,(f(1) - f(-1))\;.$$

(0,7 μον.)

(β΄) Αν η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης γ είναι: $z(\theta) + 1 = \sqrt{3}e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 4\pi$, χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z+1)^2(z-1)^3}\,dz\,.$$

(0,8 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^2-1}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)(z+1)}\,dz \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-1}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z+1}\,dz\right) \\
&= \frac{1}{2}\,(f(1) - f(-1)) \qquad \text{(ολοκληρωτικός τύπος Cauchy)}
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^2-1}\,dz = \pi i\,(f(1) - f(-1))\;.$$

(β΄) Η καμπύλη γ είναι κύκλος με κέντρο -1 και ακτίνα $\sqrt{3}$. Ο κύκλος περιστρέφεται δύο φορές γύρω από το -1 με θετική φορά και επομένως ο δείκτης στροφής της γ ως προς το σημείο -1 είναι $I(\gamma, -1) = 2$. Επειδή το σημείο 1 βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου, από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z+1)^2(z-1)^3}\,dz &= 2\pi i\left[\frac{1!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)/(z-1)^3}{(z+1)^2}\,dz\right]\\ &= 2\pi i I(\gamma,-1)\left(\frac{f(z)}{(z-1)^3}\right)'\Bigg|_{z=-1}\\ &= 4\pi i\,\frac{f'(z)(z-1)^3-3(z-1)^2 f(z)}{(z-1)^6}\Bigg|_{z=-1}\\ &= -\pi i\frac{3f(-1)+2f'(-1)}{4}\,.\end{aligned}$$

■

Θ3. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ απλά συνεκτικός τόπος.

(i) Αν $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική συνάρτηση με $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι υπάρχει αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου της $f(z)$ στο Ω, δείξτε ότι υπάρχει αναλυτική συνάρτηση g στο Ω τέτοια ώστε

$$f(z) = g^2(z)\,, \quad \text{για κάθε } z \in \Omega\,. \tag{2.7}$$

(0,5 μον.)

(ii) Αν $u : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι αρμονική συνάρτηση με $u(x, y) \neq 0$ για κάθε $(x, y) \in \Omega$, δείξτε ότι υπάρχουν αρμονικές συναρτήσεις p, q στο Ω τέτοιες ώστε

$$u(x,y) = p^2(x,y) - q^2(x,y)\,, \quad \text{για κάθε } (x,y) \in \Omega\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(i) Έστω F ένας αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου της $f(z)$, δηλαδή η F είναι αναλυτική συνάρτηση στο Ω με $e^{F(z)} = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$. Θέτουμε

$$g(z) := e^{\frac{1}{2}F(z)}\,, \quad \text{για κάθε } z \in \Omega\,.$$

Τότε η συνάρτηση g είναι αναλυτική στο Ω με

$$g^2(z) = e^{F(z)} = f(z)\,, \quad \text{για κάθε } z \in \Omega\,.$$

(ii) Ως γνωστόν στον απλά συνεκτικό τόπο Ω η αρμονική συνάρτηση u έχει συζυγή αρμονική v, δηλαδή η συνάρτηση $f = u + iv$ είναι αναλυτική στο Ω. Επειδή $u(x,y) \neq 0$ για κάθε $(x,y) \in \Omega$, είναι $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$ και επομένως από το (i) υπάρχει αναλυτική συνάρτηση g στο Ω τέτοια ώστε $f(z) = g^2(z)$, για κάθε $z \in \Omega$. Αν $g(z) = p(x,y) + iq(x,y)$, τότε ως γνωστόν οι συναρτήσεις p, q είναι αρμονικές στο Ω με

$$\begin{aligned} u(x,y) + iv(x,y) = f(z) = g^2(z) &= (p(x,y) + iq(x,y))^2 \\ &= p^2(x,y) - q^2(x,y) + i2p(x,y)q(x,y)\,. \end{aligned}$$

Άρα, $u(x,y) = p^2(x,y) - q^2(x,y)$, για κάθε $(x,y) \in \Omega$.

■

Θ4. Έστω $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$.

(i) Διατυπώστε τις δύο μορφές της "*αρχής μεγίστου*" για τον ανοικτό δίσκο $D(0,r)$, $0 < r < 1$. (0,5 μον.)

(ii) Αν $|f(z^2)| \geq |f(z)|$ για κάθε $z \in D(0,1)$, τι συμπεραίνετε για τη συνάρτηση f; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(1 μον.)

Λύση.

(i) Παραπέμπουμε στο [9].

(ii) Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι σταθερή στον ανοικτό δίσκο $D(0,r)$, $0 < r < 1$. Τότε από την αρχή μεγίστου η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο του δίσκου $D(0,r)$ που είναι ο κύκλος $|z| = r$ και μόνο εκεί. Έστω z_r, $|z_r| = r$, με $|f(z_r)| = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Επειδή $|z_r^2| = |z_r|^2 = r^2 < r$, το $z_r^2 \in D(0,r)$ και από την υπόθεση έχουμε

$$|f(z_r^2)| \geq |f(z_r)| = \max_{|z|=r} |f(z)|\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Επομένως η f είναι σταθερή στο δίσκο $D(0,r)$ και άρα από το θεώρημα μοναδικότητας η f θα είναι σταθερή στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$.

■

Θ5. (α΄) Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+i)}\,.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα(η σειρά) Laurent της f με κέντρο το $z_0 = -i$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το 1. (1 μον.)

(β΄) Έστω $\dfrac{1}{e^z+1} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{e^z+1}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \pi < |z| < 3\pi\} \text{ με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \le 0$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Τα 0, $-i$ είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f. Επομένως το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $-i$ μπορεί να γίνει στους δακτυλίους: $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+i| < 1\}$ (διάτρητος δίσκος) και $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| > 1\}$. Επειδή το $1 \in \Delta_2$, θα αναπτύξουμε την f στο δακτύλιο Δ_2. Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$, $|w| < 1$, έχουμε

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1}\,, \quad |w| < 1\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{\left((z+i)-i\right)^2(z+i)} \\
&= \frac{1}{(z+i)^3\left(1-\frac{i}{z+i}\right)^2} \\
&= \frac{1}{(z+i)^3}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{i}{z+i}\right)^{n-1} \qquad \left(\left|\tfrac{i}{z+i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+i| > |i| = 1\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n i^{n-1}\frac{1}{(z+i)^{n+2}} \\
&= \sum_{n=3}^{\infty}(n-2)i^{n-3}\frac{1}{(z+i)^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-3}(n+2)i^{-n-3}(z+i)^n\,.
\end{aligned}$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα ισχύει στο δακτύλιο $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| > 1\}$ που είναι ο μεγαλύτερος δυνατός δακτύλιος που περιέχει το 1.

(β΄) Επειδή

$$e^z + 1 = 0 \Leftrightarrow e^z = -1 = e^{\pi i} \Leftrightarrow e^{z-\pi i} = 1\,,$$

τα $z_k = 2k\pi i + \pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f. Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1/(e^z+1)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1}{z^{n+1}(e^z+1)}\,dz\,,$$

όπου ο κύκλος $|z| = r$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $\pi < r < 3\pi$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ. Τα σημεία 0 και $\pm\pi i$ βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$.

(i) <u>$n = 0$:</u> Σ᾽ αυτή την περίπτωση έχουμε

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1}{z(e^z+1)}\,dz\,.$$

Τα σημεία 0 και $\pm\pi i$ είναι απλοί πόλοι της $g(z) = \frac{1}{z(e^z+1)}$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1}{z(e^z+1)}\,dz \\
&= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(e^z+1)}, -\pi i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(e^z+1)}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(e^z+1)}, \pi i\right) \\
&= \left.\frac{z^{-1}}{(e^z+1)'}\right|_{z=-\pi i} + \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z(e^z+1)} + \left.\frac{z^{-1}}{(e^z+1)'}\right|_{z=\pi i} \\
&= \frac{1}{\pi i} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi i} = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

(ii) <u>$n \le -1$:</u> Σ᾽ αυτή την περίπτωση είναι

$$g(z) = \frac{z^{-(n+1)}}{e^z+1}\,, \quad \text{με } -(n+1) \ge 0\,.$$

Τα σημεία $\pm\pi i$ είναι απλοί πόλοι της g και από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z^{-(n+1)}}{e^z+1}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-(n+1)}}{e^z+1},\,-\pi i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-(n+1)}}{e^z+1},\,\pi i\right) \\
&= \left.\frac{z^{-(n+1)}}{(e^z+1)'}\right|_{z=-\pi i} + \left.\frac{z^{-(n+1)}}{(e^z+1)'}\right|_{z=\pi i} \\
&= -(-\pi i)^{-(n+1)} - (\pi i)^{-(n+1)} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{αν } -n \text{ άρτιος} \\ -2(\pi i)^{-(n+1)} & \text{αν } -n \text{ περιττός}\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

■

Θ6. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+4}\,dx\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Η λύση της εξίσωσης

$$z^4+4=0 \Leftrightarrow z^4=-4=4e^{\pi i} \quad \text{είναι} \quad z_k=\sqrt{2}e^{(2k+1)\pi i/4}, \quad k=0,1,2,3\,.$$

Δηλαδή $z_0=\sqrt{2}e^{\pi i/4}=1+i$, $z_1=\sqrt{2}e^{3\pi i/4}=-1+i$, $z_2=\sqrt{2}e^{5\pi i/4}=-1-i$ και $z_3=\sqrt{2}e^{7\pi i/4}=1-i$. Μόνο τα σημεία $z_0=1+i$, $z_1=-1+i$ βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο και είναι απλοί πόλοι της $f(z)=\frac{1}{z^4+4}$. Είναι

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+4},\,z_k\right) = \left.\frac{1}{(z^4+4)'}\right|_{z=z_k} = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{1}{16}z_k\,, \quad k=0,1\,.$$

Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελείται από το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου γ_R, με εξίσωση $z(\theta)=Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[-R,R]$. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο έτσι ώστε το ανώμαλα σημεία z_0 και z_1 της f να βρίσκονται στο εσωτερικό του ημικύκλιου γ_R. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^4+4}\,dx + \int_{\gamma_R}\frac{1}{z^4+4}\,dz &= 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+4},\,z_0\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+4},\,z_1\right)\right] \\
&= -\frac{2\pi i}{16}(z_0+z_1) = -\frac{\pi i}{8}(1+i-1+i) = \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

Η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z^4+4}$ είναι πηλίκο των πολυωνύμων $P(z) = 1$ και $Q(z) = z^4 + 4$. Επειδή

$$\text{βαθμός } Q(z) > \text{ βαθμός } P(z) + 2\,,$$

τότε από γνωστό λήμμα $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^4+4} = 0$. Επομένως,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+4}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+4}\, dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

■

2.5 Ακαδημαϊκό έτος 2012–13

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξετάσεις στη Μιγαδική Ανάλυση

2 Ιουλίου, 2013

Θ1. (α΄) Να βρεθούν τα σημεία του $\mathbb{C}$ στα οποία η συνάρτηση $f(z) = 2x + y^2 + i(x^2 - y^2)$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγος. (0,8 μον.)

(β΄) Έστω $g : G \to \mathbb{C}$, $g = u + iv$, αναλυτική συνάρτηση στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$. Αν $u(x, y) - v(x, y) = c$, δείξτε ότι η g είναι σταθερή στο G. (0,7 μον.)

(γ΄) Θεωρούμε το χωρίο

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re z \leq \frac{\pi}{2}\,,\, \Im z \geq 0 \right\}$$

του z-επιπέδου. Να βρεθεί οι εικόνα του χωρίου Ω μέσω του μετασχηματισμού

$$w = \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Οι $u = 2x + y^2$, $v = x^2 - y^2$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους. Για να είναι η f παραγωγίσιμη θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann. Έχουμε

$$\left\{ \begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 2 &= -2y \\ 2y &= -2x \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -1 \end{aligned} \right\}.$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $z = 1 - i$ με $f'(1 - i) = u_x(1, -1) + iv_x(1, -1) = 2 + 2i$.

(β΄) Είναι $u = v + c$. Επειδή η g είναι αναλυτική στο G, πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy–Riemann:

$$\left\{ \begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} v_x &= v_y \\ v_y &= -v_x \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} v_x &= 0 \\ v_y &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Τότε $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ και επομένως $g'(z) = 0$ για κάθε $z \in G$. Άρα από γνωστή πρόταση η g είναι σταθερή στο G.

(γ΄) Είναι $w = u + iv$, όπου $u = \sin x \cosh y$ και $v = \cos x \sinh y$.

(i) Αν $x = 0$ και $y \geq 0$, τότε $u = 0$ και $v \geq 0$.

(ii) Αν $0 \leq x \leq \pi/2$ και $y = 0$, τότε $0 \leq u \leq 1$ και $v = 0$.

(iii) Αν $x = \pi/2$ και $y \geq 0$, τότε $u \geq 1$ και $v = 0$.

Επομένως το σύνορο του Ω απεικονίζεται στους θετικούς ημιάξονες του w-επιπέδου.

(iv) Αν τώρα $0 \leq x \leq \pi/2$, $y = y_0$ με $y_0 > 0$ είναι ένα οριζόντιο ευθ. τμήμα του Ω, τότε $u = \sin x \cosh y_0$, $v = \cos x \sinh y_0$ και επομένως

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y_0} + \frac{v^2}{\sinh^2 y_0} = 1\,, \quad y_0 > 0\,. \qquad \text{(τμήμα έλλειψης στο α΄ τεταρτημόριο)}$$

Καθώς το y_0 μεταβάλλεται στο Ω, τα τμήματα των ελλείψεων θα καλύπτουν το α΄ τεταρτημόριο. Άρα, η εικόνα του χωρίου Ω μέσω του μετασχηματισμού $w = \sin z$ είναι το α΄ τεταρτημόριο.

■

Θ2. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση.

(α΄) Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ και $R > 0$, χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους αποδείξτε ότι

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \max\{|f(z)| : |z - z_0| = R\}\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Αν

$$|f(z)| \leq |z| + 2|z|^2\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,, \qquad (*)$$

δείξτε ότι

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2$$

με $|a_1| \leq 1$ και $|a_2| \leq 2$. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\,.$$

Αν $K = \max\{|f(z)| : |z-z_0| = R\}$, τότε

$$\begin{aligned}|f^{(n)}(z_0)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| \\ &\le \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=R} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\,|dz| \\ &\le \frac{n!K}{2\pi R^{n+1}}\oint_{|z-z_0|=R} |dz| \\ &= \frac{n!K}{2\pi R^{n+1}} 2\pi R = \frac{n!K}{R^n}\,.\end{aligned}$$

(β΄) Η $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ είναι ακέραια συνάρτηση και επομένως

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n\,, \quad \text{για κάθε } z\in\mathbb{C}.$$

Αν $M = \max_{|z|=R}|f(z)|$, από την $(*)$ έχουμε

$$M \le R + 2R^2$$

και από το (α΄)(ανισότητες Cauchy) για $z_0 = 0$ και για κάθε $n > 2$ είναι

$$|a_n| = \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} \le \frac{M}{R^n} \le \frac{R+2R^2}{R^n} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,.$$

Επομένως $a_n = 0$, για κάθε $n > 2$. Άρα η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2, δηλαδή $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$. Από την $(*)$ έχουμε $f(0) = 0$ οπότε $a_0 = 0$ και κατά συνέπεια

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2\,.$$

Είναι

$$|a_1| = |f'(0)| \le \frac{M}{R} \le \frac{R+2R^2}{R} = 1 + 2R \xrightarrow[R\to 0]{} 1$$

και

$$|a_2| = \frac{\left|f^{(2)}(0)\right|}{2!} \le \frac{M}{R^2} \le \frac{R+2R^2}{R^2} = \frac{1}{R} + 2 \xrightarrow[R\to\infty]{} 2\,.$$

■

Θ3. Διατυπώστε την "αρχή μεγίστου" για ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Έστω f αναλυτική συνάρτηση στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,3) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3\}$. Αν $f(\pm 1) = f(\pm i) = 0$, αποδείξτε ότι

$$|f(0)| \leq \frac{1}{80} \max_{|z|=3} |f(z)| \,. \tag{2.8}$$

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει η ισότητα στη (2.8). (1,5 μον.)

Λύση. *Αρχή μεγίστου*: Έστω G ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\overline{G}$, αναλυτική στο G και μη σταθερή, τότε η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο ∂G του G και μόνο εκεί.

Τα $\pm 1, \pm i$ είναι ρίζες της f και επομένως

$$f(z) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)g(z) = (z^4 - 1)g(z) \,,$$

όπου g αναλυτική συνάρτηση στο $\overline{D}(0,3)$. Από την αρχή μεγίστου έχουμε

$$|g(0)| \leq \max_{|z|=3} |g(z)|$$

και επομένως

$$\begin{aligned} |f(0)| = |g(0)| &\leq \max_{|z|=3} |g(z)| \\ &= \max_{|z|=3} \frac{|f(z)|}{|z^4 - 1|} \\ &\leq \max_{|z|=3} \frac{|f(z)|}{|z|^4 - 1} \\ &= \frac{1}{3^4 - 1} \max_{|z|=3} |f(z)| = \frac{1}{80} \max_{|z|=3} |f(z)| \,. \end{aligned}$$

Η ισότητα στην (2.8) συνεπάγεται ότι $|g(0)| = \max_{|z|=3} |g(z)|$ και από την αρχή μεγίστου έπεται ότι η g είναι σταθερή στο $D(0,3)$, έστω $g(z) = c$. Επομένως από το θεώρημα μοναδικότητας θα είναι $g(z) = c$ για κάθε $z \in G$ και κατά συνέπεια $f(z) = c(z^4 - 1)$, για κάθε $z \in G$. Άρα, όλες οι αναλυτικές συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει η ισότητα στην (2.8) είναι της μορφής $f(z) = c(z^4 - 1)$, όπου $c \in \mathbb{C}$. ■

Θ4. (α΄) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι φραγμένη και αναλυτική στο διάτρητο δίσκο Δ : $0 < |z| < R$. Αν

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

είναι το ανάπτυγμα Laurent της f, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent στο διάτρητο δίσκο Δ αποδείξτε ότι $a_n = 0$ για κάθε $n < 0$. Δηλαδή το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f. (1 μον.)

(β΄) Έστω

$$g(z) = \exp\left(\frac{z + 1/z}{2}\right) = e^{(z+1/z)/2}\,.$$

Αν $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ είναι το ανάπτυγμα Laurent της g στο διάτρητο δίσκο $0 < |z| < \infty$, υπολογίστε το c_0 και αποδείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\, dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (n!)^2}\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz\,,$$

όπου $|z| = r$ είναι ο κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα r, $0 < r < R$. Αν $|f(z)| \le M$ για κάθε $z \in \Delta$, τότε

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \right| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}\, |dz| \\
&\le \frac{M}{2\pi r^{n+1}} \oint_{|z|=r} |dz| \\
&= \frac{M}{2\pi r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M}{r^n} = M r^{-n}\,.
\end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $n \le -1 \Leftrightarrow -n \ge 1$, είναι

$$|a_n| \le M r^{-n} \xrightarrow[r \to 0^+]{} 0\,.$$

Επομένως $a_n = 0$ για $n = -1, -2, -3, \ldots$ και άρα το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f.

(β΄) Το 0 είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της $g(z) = e^{z/2} \cdot e^{1/2z}$. Επειδή

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\,, \quad \text{για κάθε } w \in \mathbb{C},$$

το ανάπτυγμα Laurent της g στο διάτρητο δίσκο: $0 < |z| < \infty$ είναι

$$\begin{aligned} g(z) &= \left(1 + \frac{z/2}{1!} + \frac{(z/2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(z/2)^n}{n!} + \cdots\right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{1!(2z)} + \frac{1}{2!(2z)^2} + \cdots + \frac{1}{n!(2z)^n} + \cdots\right) \\ &= \cdots + \left(1 + \frac{1}{4(1!)^2} + \frac{1}{4^2(2!)^2} + \cdots + \frac{1}{4^n(n!)^2} + \cdots\right) + \cdots \\ &= \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(n!)^2} + \cdots \end{aligned}$$

και επομένως

$$c_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(n!)^2}\,.$$

Όμως από το θεώρημα Laurent

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^{(z+1/z)/2}}{z}\, dz\,.$$

Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $z = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Επειδή $dz = ie^{it}dt$, έχουμε

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{(e^{it}+e^{-it})/2}}{e^{it}} ie^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\, dt$$

και άρα

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\, dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(n!)^2}\,.$$

■

Θ5. (α΄) Έστω η συνάρτηση

$$f\,(z) = \frac{1}{(z-1)((z-1)^2+4)}\,.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα(η σειρά) Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 1$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $2 - 2i$. (1 μον.)

(β΄) Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+4}\, dx\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Τα ανώμαλα σημεία της f είναι: 1 και $1 \pm 2i$. Επομένως έχουμε τους δακτυλίους $\Delta_1 : 0 < |z-1| < 2$ και $\Delta_2 : |z-1| > 2$. Το σημείο $2-2i$ ανήκει στο δακτύλιο Δ_2. Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά $1/(1+w) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w| < 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)^3}\frac{1}{1+4/(z-1)^2} \\ &= \frac{1}{(z-1)^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{(z-1)^2}\right)^n \qquad (|4/(z-1)^2| < 1 \Leftrightarrow |z-1| > 2) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n \frac{1}{(z-1)^{2n+3}}\,. \end{aligned}$$

Ο μεγαλύτερος δακτύλιος στον οποίο το παραπάνω ανάπτυγμα Laurent της f ισχύει είναι ο $\Delta_2 : |z-1| > 2$.

(β΄) Είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x^2+4}\,dx = \Re\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3ix}}{x^2+4}\,dx\right).$$

Τα σημεία $\pm 2i$ είναι απλοί πόλοι της $f(z) = \frac{e^{3iz}}{z^2+4}$. Το $2i$ βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο και είναι

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{3iz}}{z^2+4}, 2i\right) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{e^{3iz}}{(z-2i)(z+2i)} = \frac{e^{-6}}{4i}\,.$$

Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελείται από το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου γ_R, με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[-R, R]$. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο έτσι ώστε το ανώμαλο σημείο $z = 2i$ της f να βρίσκεται στο εσωτερικό του ημικύκλιου γ_R. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{3ix}}{x^2+4}\,dx + \int_{\gamma_R}\frac{e^{3iz}}{z^2+4}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{3iz}}{z^2+4}, 2i\right) = \frac{\pi}{2}e^{-6}\,.$$

Όμως από το λήμμα του Jordan είναι

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{3iz}}{z^2+4}\,dz = 0$$

και επομένως

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3ix}}{x^2+4}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{3ix}}{x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-6}\,.$$

Άρα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+4}\, dx = \Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix}}{x^2+4}\, dx\right) = \frac{\pi}{2}e^{-6}\,.$$

■

Επαναληπτική εξέταση στη Μιγαδική Ανάλυση

14 Μαρτίου, 2014

Θ1. Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

(α΄) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις u, v είναι αρμονικές στο Ω. (1,3 μον.)

(β΄) Αν $U, V : \Omega \to \mathbb{R}$ με

$$U(x,y) = e^{u(x,y)^2 - v(x,y)^2} \cos(2u(x,y)v(x,y))$$

και

$$V(x,y) = e^{u(x,y)^2 - v(x,y)^2} \sin(2u(x,y)v(x,y))\,,$$

για κάθε $(x,y) \in \Omega$, αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις U, V είναι αρμονικές στο Ω και ότι η V είναι συζυγής αρμονική της U.

Υπόδειξη. Να εκφράσετε την $F = U + iV$ συναρτήσει της f. (1,2 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή η f είναι αναλυτική στο Ω, η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη με

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,, \quad \text{για κάθε } z = x+iy \in \Omega\,.$$

Τότε

$$f''(z) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$$

και

$$f''(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}\left(-i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,,$$

για κάθε $z = x + iy \in \Omega$. Επομένως

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0\,, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0\,,$$

για κάθε $z = x + iy \in \Omega$. Δηλαδή οι u, v ικανοποιούν την εξίσωση Laplace και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους άπειρης τάξης στο Ω(επειδή η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο Ω). Άρα οι u, v είναι αρμονικές στο Ω.

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned} F &= U + iV \\ &= e^{u^2-v^2}\cos(2uv) + ie^{u^2-v^2}\sin(2uv) \\ &= e^{u^2-v^2}(\cos(2uv) + i\sin(2uv)) \\ &= e^{u^2-v^2}\cdot e^{2iuv} \\ &= e^{u^2-v^2+2iuv} = e^{(u+iv)^2} = e^{f^2}\,. \end{aligned}$$

Επειδή η f είναι αναλυτική στο Ω και η $F = U + iV = e^{f^2}$ θα είναι αναλυτική στο Ω. Από το (α΄) οι U, V είναι αρμονικές στο Ω και η V είναι συζυγής αρμονική της U.

■

Θ2. (α΄) Έστω

$$P_n(z) := \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$$

το *πολυώνυμο Legendre* βαθμού n, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(i) Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους δείξτε ότι

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\oint_\gamma \frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta\,, \qquad (*)$$

όπου γ απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη που περιέχει το σημείο $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Αν $z = -1$, χρησιμοποιώντας τον τύπο $(*)$ υπολογίστε το $P_n(-1)$.

(1,5 μον.)

(β΄) Έστω $\alpha \in \mathbb{C}$ με $0 < |\alpha| < 1$. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση στο μοναδιαίο κύκλο $|z| = 1$ δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2}\, d\theta = \frac{2\pi}{1-\alpha^2}\,.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) (i) Είναι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\oint_\gamma \frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+1}}\, d\zeta &= \frac{1}{2^n n!}\left[\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+1}}\, d\zeta\right] \\ &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n \\ &\qquad \text{(ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για παραγώγους)} \\ &= P_n(z)\,.\end{aligned}$$

(ii) Από τον τύπο (∗) για $z = -1$ έχουμε

$$\begin{aligned}P_n(-1) &= \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\oint_\gamma \frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta+1)^{n+1}}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\oint_\gamma \frac{(\zeta-1)^n(\zeta+1)^n}{(\zeta+1)^{n+1}}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2^n}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(\zeta-1)^n}{\zeta+1}\, d\zeta\right] \\ &= \frac{1}{2^n}(-1-1)^n \qquad \text{(ολοκληρωτικός τύπος Cauchy)} \\ &= \frac{1}{2^n}(-2)^n = (-1)^n\,.\end{aligned}$$

(β΄) Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ είναι $z = e^{i\theta}$, $-\pi \le \theta \le \pi$, με $dz = ie^{i\theta}d\theta =$

$izd\theta$. Επειδή $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ και $d\theta = (1/iz)dz$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2}\, d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{1 - \alpha(z + z^{-1}) + \alpha^2} \frac{dz}{iz} \\
&= -\frac{1}{\alpha i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 - (\alpha + \alpha^{-1})z + 1}\, dz \\
&= -\frac{1}{\alpha i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z - \alpha)(z - \alpha^{-1})}\, dz \\
&= -\frac{2\pi}{\alpha} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(z - \alpha^{-1})^{-1}}{z - \alpha}\, dz \right] && (|\alpha^{-1}| > 1) \\
&= -\frac{2\pi}{\alpha} \frac{1}{\alpha - \alpha^{-1}} && (\text{τύπος Cauchy}) \\
&= \frac{2\pi}{1 - \alpha^2}\,.
\end{aligned}$$

■

Θ3. (α΄) Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z^2 - z + 3}{(z + 2)(z - 1)^2}\,.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα(η σειρά) Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 0$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $1 + i$. (1,5 μον.)

(β΄) Έστω

$$\frac{1}{z^2 \sin z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $g(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \pi < |z| < 2\pi\} \quad \text{με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent καθώς επίσης και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν οι συντελεστές a_{-3} και a_{-5}. (1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$f(z) = \frac{z^2 - z + 3}{(z + 2)(z - 1)^2} = \frac{(z - 1)^2 + (z + 2)}{(z + 2)(z - 1)^2} = \frac{1}{z + 2} + \frac{1}{(z - 1)^2}\,.$$

Έχουμε τους δακτυλίους

$$\Delta_1 : 0 \le |z| < 1\,, \quad \Delta_2 : 1 < |z| < 2 \quad \text{και} \quad \Delta_3 : |z| > 2\,.$$

Το σημείο $1+i$ ανήκει στο δακτύλιο Δ_2. Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$, $|w|<1$, προκύπτει ότι

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1}, \quad |w| < 1 .$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z+2} + \frac{1}{(z-1)^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1+(z/2)} + \frac{1}{z^2}\frac{1}{(1-1/z)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} \\
&\qquad (|z/2|<1 \Leftrightarrow |z|<2 \text{ και } |1/z|<1 \Leftrightarrow |z|>1) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{z^{n+1}} .
\end{aligned}$$

Ο μεγαλύτερος δακτύλιος στον οποίο το παραπάνω ανάπτυγμα Laurent της f ισχύει είναι ο $\Delta_2 : 1 < |z| < 2$.

(β΄) Τα $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $g(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$. Η συνάρτηση g είναι αναλυτική στο δακτύλιο Δ και αναπτύσσεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \text{ για κάθε } z \in \Delta ,$$

όπου η σειρά συγκλίνει απόλυτα στο Δ και ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του Δ. Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{g(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{1/z^2\sin z}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{z^{-n-3}}{\sin z}\,dz ,$$

όπου ο κύκλος $|z|=r$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $\pi < r < 2\pi$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ.

Αν

$$h(z) := \frac{z^{-n-3}}{\sin z} ,$$

τα ανώμαλα σημεία $-\pi$ και π της h βρίσκοντα στο εσωτερικό του κύκλου $|z|=r$ και είναι απλοί πόλοι.

(i) $\underline{n=-3}$: Σ' αυτή την περίπτωση είναι $h(z) = 1/\sin z$ και επομένως τα ανώμαλα σημεία $\pm\pi$ και 0 της h βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$ και είναι απλοί πόλοι. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} a_{-3} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{1}{\sin z}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin z},\,-\pi\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin z},\,0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin z},\,\pi\right) \\ &= \left.\frac{1}{(\sin z)'}\right|_{z=-\pi} + \left.\frac{1}{(\sin z)'}\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{(\sin z)'}\right|_{z=\pi} \\ &= -1+1-1=-1\,. \end{aligned}$$

(ii) $\underline{n=-5}$: Σ' αυτή την περίπτωση είναι $h(z) = z^2/\sin z$. Τα σημεία $\pm\pi$ είναι απλοί πόλοι της h ενώ το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της h. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} a_{-5} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{z^2}{\sin z}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{\sin z},\,-\pi\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{\sin z},\,\pi\right) \\ &= \left.\frac{z^2}{(\sin z)'}\right|_{z=-\pi} + \left.\frac{z^2}{(\sin z)'}\right|_{z=\pi} \\ &= \frac{(-\pi)^2}{-1} + \frac{\pi^2}{-1} = -2\pi^2\,. \end{aligned}$$

■

Θ4. (α΄) Διατυπώστε τη γενίκευση του θεωρήματος Liouville για ακέραιες συναρτήσεις.

(0,5 μον.)

(β΄) Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο διάτρητο δίσκο $\Delta : 0 < |z| < \infty$ και έστω $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της f με $a_n = 0$ για κάθε $n < 0$, δηλαδή το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f. Δώστε δύο τουλάχιστον ικανές συνθήκες για να είναι το 0 επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f. (0,5 μον.)

(γ΄) Υποθέτουμε ότι η $g : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική συνάρτηση με

$$|g(z)| \le |z|^{3/2}\,, \quad \text{για κάθε } |z| > 0\,.$$

Να βρεθεί η g. Δικαιολογείστε την απάντησή σας. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Παραπέμπουμε στο [9].

(β') Το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f αν και μόνο αν

$$\begin{aligned}&\text{Το όριο } \lim_{z\to 0} f(z) \text{ υπάρχει και είναι πεπερασμένο}\\ &\Leftrightarrow \text{Υπάρχουν } M>0,\ \delta>0, \text{ τέτοια ώστε } |f(z)|<M \text{ για } 0<|z|<\delta\\ &\Leftrightarrow \lim_{z\to 0} z f(z) = 0\,.\end{aligned}$$

(γ') Είναι

$$\lim_{z\to 0} |g(z)| \le \lim_{z\to 0} |z|^{3/2} = 0\,,$$

δηλαδή $\lim_{z\to 0} g(z) = 0$ και κατά συνέπεια το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Επομένως η g επεκτείνεται σε ακέραια συνάρτηση με $g(0)=0$. Επειδή

$$|g(z)| \le |z|^{3/2} \quad \text{για κάθε } z\in\mathbb{C}\,,$$

από τη γενίκευση του θεωρήματος Liouville η g είναι πολυώνυμο βαθμού 1. Δηλαδή

$$g(z) = az+b\,,\quad a,b\in\mathbb{C}\,.$$

Όμως $\lim_{z\to 0} g(z) = 0 \Rightarrow b=0$ και επομένως $g(z)=az$. Από την υπόθεση $|g(z)| = |az| \le |z|^{3/2}$ οπότε $|a|\le |z|^{1/2}$ για κάθε $|z|>0$ και αυτό συνεπάγεται ότι $a=0$. Άρα $g(z)\equiv 0$.

■

2.6 Ακαδημαϊκό έτος 2011–12

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξετάσεις στη Μιγαδική Ανάλυση

10 Ιουλίου, 2012

Θ1. (α΄) Να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση $u(x,y) = ax^3y + 4xy^3 + x$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Στη συνέχεια να βρεθεί η συζυγής αρμονική v της u καθώς επίσης και η ακέραια συνάρτηση $f = u + iv$, με $f(0) = -i$. Να εκφράσετε την f σαν συνάρτηση του $z = x + iy$.

(1,5 μον.)

(β΄) Θεωρούμε τη λωρίδα

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\Im z| \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

του z-επιπέδου. Να βρεθεί οι εικόνα του συνόρου της λωρίδας Ω, καθώς επίσης και του ευθ. τμήματος $x = x_0 \in \mathbb{R}$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, μέσω του μετασχηματισμού $w = e^z$. Ποια είναι η εικόνα της λωρίδας Ω μέσω του μετασχηματισμού $w = e^z$; (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι $u_{xx} + u_{yy} = 6axy + 24xy$. Για να είναι η u αρμονική θα πρέπει να ισχύει $u_{xx} + u_{yy} = 0$ και ισοδύναμα $6axy + 24xy = 0$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Επομένως $a = -4$ και κατά συνέπεια $u(x,y) = -4x^3y + 4xy^3 + x$. Ως γνωστόν, στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C}$ υπάρχει συζυγής αρμονική v της u. Δηλαδή η $f = u + iv$ είναι ακέραια συνάρτηση. Από την εξίσωση Cauchy–Riemann $u_x = v_y$ έχουμε

$$v_y = -12x^2y + 4y^3 + 1\,.$$

Επομένως,

$$v(x,y) = -6x^2y^2 + y^4 + y + c(x)\,.$$

Από τη δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann $v_x = -u_y$ προκύπτει ότι

$$-12xy^2 + c'(x) = 4x^3 - 12xy^2 \Leftrightarrow c'(x) = 4x^3\,. \quad \text{Άρα } c(x) = x^4 + c\,.$$

Δηλαδή $v(x,y) = -6x^2y^2 + y^4 + y + x^4 + c$ και κατά συνέπεια

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = z + i(z^4 + c)\,,$$

$c \in \mathbb{R}$. Όμως $f(0) = -i$, οπότε $c = -1$. Άρα,

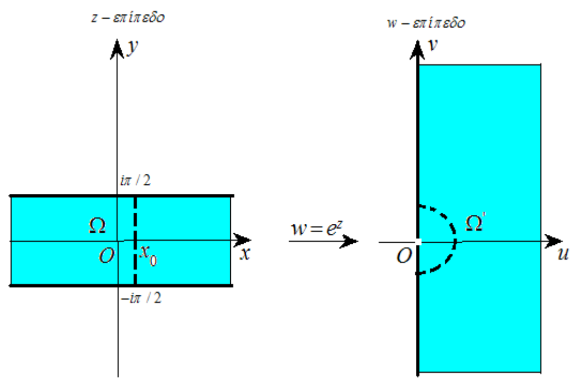
$$f(z) = iz^4 + z - i\,.$$

(β΄) Ως γνωστόν ο περιορισμός της $w = e^z$ στη λωρίδα Ω είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση με $w \neq 0$. Αν $y = \pm\pi/2$, τότε $w = e^{x \pm i\pi/2} = \pm ie^x$. Επομένως η ευθεία $y = \pi/2$ απεικονίζεται στο θετικό φανταστικό ημιάξονα και η η ευθεία $y = -\pi/2$ απεικονίζεται στον αρνητικό φανταστικό ημιάξονα. Δηλαδή το σύνορο της λωρίδας Ω απεικονίζεται στο φανταστικό άξονα.

Αν $x = x_0 \in \mathbb{R}$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, τότε $w = e^{x_0}e^{iy}$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, είναι ημικύκλιο με κέντρο O και ακτίνα $R = e^{x_0}$ στο δεξιό ημιεπίπεδο του w-επιπέδου. Επομένως, καθώς το x_0 μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, τα ημικύκλια καλύπτουν το δεξιό ημιεπίπεδο του w-επιπέδου.

Άρα, η εικόνα της λωρίδας Ω μέσω του μετασχηματισμού $w = e^z$ είναι το χωρίο

$$\Omega' = \{w \in \mathbb{C} : |\Re w| \geq 0,\ w \neq 0\}\ .$$



■

Θ2. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση, δηλαδή

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \cdots , \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

(α΄) **(Γενίκευση του θεωρήματος Liouville)** Υποθέτουμε ότι για κάποιο $k \geq 0$ υπάρχουν σταθερές $A \geq 0$ και $B > 0$, τέτοιες ώστε

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k \quad \text{για κάθε } |z| > R_0 > 0\,. \tag{2.9}$$

Αν $R > R_0$, χρησιμοποιώντας τις ανισότητες Cauchy δείξτε ότι

$$|a_n| \leq \frac{A + BR^k}{R^n}\,.$$

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ k. Τι συμπεραίνετε αν η f είναι φραγμένη για κάθε $z \in \mathbb{C}$; (1,3 μον.)

(β΄) Αν $\lim\limits_{|z|\to\infty} \dfrac{f(z)}{z} = 0$, δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση. (1,2 μον.)

Απόδειξη. (α΄) Παραπέμπουμε στο [9].

(β΄) Επειδή $\lim\limits_{|z|\to\infty} \dfrac{f(z)}{z} = 0$, υπάρχει $R_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\left|\frac{f(z)}{z}\right| < 1$ για κάθε $|z| > R_0$. Ισοδύναμα,

$$|f(z)| < |z| \quad \text{για κάθε } |z| > R_0\,.$$

Από το (α΄) έπεται ότι το f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 1, έστω $f(z) = az + b$ με $a, b \in \mathbb{C}$. Όμως από την υπόθεση είναι

$$\lim_{|z|\to\infty} \left(\frac{az+b}{z}\right) = \lim_{|z|\to\infty} \left(a + \frac{b}{z}\right) = 0$$

και επομένως $a = 0$. Άρα $f(z) = b$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, δηλαδή η f είναι σταθερή συνάρτηση.

$\square$

Θ3. (α΄) Διατυπώστε την “ αρχή μεγίστου” για ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο δακτύλιο $\Delta : 1 < |z| < 3$ και συνεχής στο σύνορο του Δ. Αν $|f(z)| \leq 1$ για κάθε $|z| = 1$ και $|f(z)| \leq 9$ για κάθε $|z| = 3$, αποδείξτε ότι $|f(2i)| \leq 4$. (1,2 μον.)

(β′) Έστω $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ και έστω C η καμπύλη με εξίσωση $z(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 4\pi$, όπου $0 < r < 1$. Αν το 0 είναι απλή ρίζα της συνάρτησης f, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z^3}\, dz$$

με δύο τρόπους: (i) με τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους και (ii) με το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων. (1,3 μον.)

Λύση.

(α′) *Αρχή μεγίστου*: Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο $G \subset \mathbb{C}$ και συνεχής στο σύνορο ∂G του G, τότε η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο ∂G του G εκτός και αν η f είναι σταθερή στο G.

Έστω $g(z) := \dfrac{f(z)}{z^2}$. Η g είναι αναλυτική στο ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο $\Delta : 1 < |z| < 3$ και συνεχής στο σύνορο του Δ που είναι οι κύκλοι $|z| = 1$ και $|z| = 3$. Από την υπόθεση έχουμε $|g(z)| \leq 1$ για κάθε $|z| = 1$ και $|g(z)| \leq 1$ για κάθε $|z| = 3$. Από την αρχή μεγίστου θα είναι $|g(z)| \leq 1$ για κάθε $z \in \Delta$. Άρα,

$$|f(z)| \leq |z|^2 \quad \text{για κάθε } z \in \Delta$$

και κατά συνέπεια $|f(2i)| \leq |2i|^2 = 4$.

(β′) Ο δείκτης στροφής της κλειστής καμπύλης C ως προς το σημείο 0 είναι $I(C,0) = 2$.

(i) Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z^3}\, dz &= \frac{1}{2}\left\{\frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z^3}\, dz\right\}\\ &= \frac{1}{2} I(C,0) \cdot f''(0) = f''(0)\,.\end{aligned}$$

(ii) Επειδή το 0 είναι απλή ρίζα της f, δηλαδή $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ και ρίζα τάξης 3 της z^3, το 0 είναι πόλος τάξης 2 της $w = f(z)/z^3$. Άρα, από το θεώρημα ολοκληρωτικών

υπολοίπων έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z^3}\,dz &= I(C,0)\cdot \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^3},\,0\right)\\
&= 2\cdot\lim_{z\to 0}\left[z^2\cdot\frac{f(z)}{z^3}\right]'\\
&= 2\cdot\lim_{z\to 0}\left[\frac{f(z)}{z}\right]'\\
&= 2\cdot\lim_{z\to 0}\frac{zf'(z)-f(z)}{z^2}\\
&= 2\cdot\lim_{z\to 0}\frac{zf''(z)}{2z} && \text{(κανόνας L'Hôpital)}\\
&= f''(0)\,.
\end{aligned}
$$

■

Θ4. (α΄) Έστω η συνάρτηση

$$f\,(z)=\frac{1}{z\,(z^2+5)^2}\,.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα(η σειρά) Laurent της f με κέντρο το $z_0=0$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $2-2i$. (1 μον.)

(β΄) Διατυπώστε το θεώρημα Laurent για τη συνάρτηση $f(z)=\dfrac{1}{\cos\pi z}$ στο δακτύλιο

$$\Delta=\left\{z\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}\right\}\quad \text{με κέντρο το } z_0=0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν οι συντελεστές των z^{-1} και z^{-2} στο ανάπτυγμα(στη σειρά) Laurent της $f(z)=\frac{1}{\cos\pi z}$ στο δακτύλιο Δ.

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Έχουμε τους δακτυλίους $\Delta_1:0<|z|<\sqrt{5}$ και $\Delta_2:|z|>\sqrt{5}$. Το σημείο $2-2i$ ανήκει στο δακτύλιο Δ_2. Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά $1/\left(1+w\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w|<1$, έχουμε

$$-\frac{1}{(1+w)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n w^{n-1}\Leftrightarrow \frac{1}{(1+w)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n w^{n-1}\,,\quad |w|<1\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^5}\frac{1}{(1+5/z^2)^2} \\ &= \frac{1}{z^5}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\left(\frac{5}{z^2}\right)^{n-1} \qquad (|5/z^2|<1 \Leftrightarrow |z|>\sqrt{5}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n5^{n-1}\frac{1}{z^{2n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)5^n\frac{1}{z^{2n+5}}\,. \end{aligned}$$

Ο μεγαλύτερος δακτύλιος στον οποίο το παραπάνω ανάπτυγμα Laurent της f ισχύει είναι ο $\Delta_2 : |z| > \sqrt{5}$.

(β΄) Η $f(z) = \frac{1}{\cos \pi z}$ είναι αναλυτική στο δακτύλιο Δ και αναπτύσσεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\frac{1}{\cos \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \text{ για κάθε } z \in \Delta\,,$$

όπου η σειρά συγκλίνει απόλυτα στο Δ και ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του Δ. Οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,r)} \frac{1}{z^{n+1}\cos \pi z}\,dz\,,$$

όπου ο κύκλος $C^+(0,r)$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $1/2 < r < 3/2$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ.

(i) $\underline{n=-1}$: Είναι

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,r)} \frac{1}{\cos \pi z}\,dz\,.$$

Τα ανώμαλα σημεία $-1/2$ και $1/2$ της $f(z) = 1/\cos \pi z$ βρίσκοντα στο εσωτερικό του κύκλου $C^+(0,r)$ και είναι απλοί πόλοι. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,r)} \frac{1}{\cos \pi z}\,dz \\ &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\cos \pi z}, -\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\cos \pi z}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \left.\frac{1}{(\cos \pi z)'}\right|_{z=-1/2} + \left.\frac{1}{(\cos \pi z)'}\right|_{z=1/2} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = 0\,. \end{aligned}$$

(ii) $\underline{n=-2}$: Είναι

$$a_{-2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,r)} \frac{1}{z^{-1}\cos \pi z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,r)} \frac{z}{\cos \pi z}\,dz\,.$$

Τα ανώμαλα σημεία $-1/2$ και $1/2$ της $g(z) = z/\cos \pi z$ βρίσκοντα στο εσωτερικό του κύκλου $C^+(0, r)$ και είναι απλοί πόλοι. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} a_{-2} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+(0,r)} \frac{z}{\cos \pi z}\, dz \\ &= \operatorname{Res}\left(\frac{z}{\cos \pi z}, -\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z}{\cos \pi z}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{z}{(\cos \pi z)'}\bigg|_{z=-1/2} + \frac{z}{(\cos \pi z)'}\bigg|_{z=1/2} = -\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} = -\frac{1}{\pi}\,. \end{aligned}$$

■

Θ5. (α΄) Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ και $R > 0$, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο

$$0 < |z - z_0| < R$$

και δεν είναι αναλυτική στο z_0.

(i) Αν το z_0 είναι πόλος τάξης $N \in \mathbb{N}$ της f, δείξτε ότι το z_0 είναι πόλος τάξης $N + 1$ της f'. (0,8 μον.)

(ii) Πότε το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f; Δώστε τουλάχιστον δύο ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι το z_0 επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f. (0,7 μον.)

(β΄) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική και φραγμένη. Να βρεθεί η συνάρτηση f. Δικαιολογείστε την απάντησή σας. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) (i) Το z_0 είναι πόλος τάξης N της f αν και μόνο αν υπάρχει αναλυτική συνάρτηση g στο δίσκο $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ τέτοια ώστε $g(z_0) \neq 0$ και

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^N}\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0, R),\ z \neq z_0\,.$$

Τότε,

$$f'(z) = \frac{(z - z_0)g'(z) - Ng(z)}{(z - z_0)^{N+1}}\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0, R),\ z \neq z_0\,.$$

Επομένως

$$f'(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^{N+1}}\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0, R),\ z \neq z_0\,,$$

όπου η συνάρτηση $h(z) := (z - z_0)g'(z) - Ng(z)$ είναι αναλυτική στο $D(z_0, R)$ με $h(z_0) = -Ng(z_0) \neq 0$. Άρα, το z_0 είναι πόλος τάξης $N + 1$ της f'.

(ii) Το z_0 είναι επουσιώδες (απαλείψιμο) ανώμαλο σημείο της f αν στο ανάπτυγμα Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $0 < |z - z_0| < R$, είναι $a_n = 0$ για κάθε $n \leq -1$. Δηλαδή

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \,, \quad \text{για } 0 < |z - z_0| < R \,.$$

Παρατήρηση. Αν ορίσουμε $f(z_0) = a_0$, τότε παίρνουμε μία συνάρτηση η οποία είναι αναλυτική σ' όλο το δίσκο $|z - z_0| < R$.

Το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f αν και μόνο αν

Το όριο $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο

$\Leftrightarrow$ Υπάρχουν $M > 0$, $\delta > 0$, τέτοια ώστε $|f(z)| < M$ για $0 < |z - z_0| < \delta$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0 \,.$

(β΄) Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Έστω n οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός. Η συνάρτηση f είναι αναλυτική και φραγμένη στη διάτρητη περιοχή $0 < |z - n| < 1$ του n και κατά συνέπεια το n είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f. Δηλαδή

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - n)^k \,, \quad \text{για } 0 < |z - n| < 1 \,.$$

Επειδή $\lim_{z \to n} f(z) = a_0$, είναι $|a_0| \leq M$. Αν ορίσουμε $f(n) = a_0$, τότε παίρνουμε μία συνάρτηση η οποία είναι αναλυτική στο n. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η f επεκτείνεται αναλυτικά σ' όλο το $\mathbb{C}$(ακέραια συνάρτηση) με $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα, από το κλασικό θεώρημα Liouville η f είναι σταθερή.

■

Να επιλέξετε 4 θέματα

Επαναληπτική εξέταση στη Μιγαδική Ανάλυση

30 Αυγούστου, 2012

Θ1. Έστω η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$, $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, όπου A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και έστω $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$.

(α΄) Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0. Θεωρώντας την f σαν συνάρτηση των πραγματικών μεταβλητών x, y, δείξτε ότι οι μερικές παράγωγοι

$$f_x(x_0,y_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)\,, \quad f_y(x_0,y_0) = u_y(x_0,y_0) + iv_y(x_0,y_0)$$

υπάρχουν και ισχύει

$$f'(z_0) = f_x(x_0,y_0) = -if_y(x_0,y_0)\,.$$

(1 μον.)

(β΄) Αν $f : A \to \mathbb{R}$, δηλαδή η f παίρνει πραγματικές τιμές, αποδείξτε ότι είτε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο z_0 ή $f'(z_0) = 0$. (0,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Από την υπόθεση η παράγωγος

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

υπάρχει.

(i) Αν $h \in \mathbb{R}$ με $z_0 + h \in A$, τότε το $z_0 + h = x_0 + iy_0 + h = (x_0+h) + iy_0$ ταυτίζεται με το σημείο $(x_0+h, y_0) \in A$ και επομένως

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = f_x(x_0,y_0)\,.$$

(ii) Αν $h = ik$, $k \in \mathbb{R}$, με $z_0 + h \in A$, τότε το $z_0 + h = x_0 + iy_0 + ik = x_0 + i(y_0+k)$ ταυτίζεται με το σημείο $(x_0, y_0+k) \in A$ και επομένως

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h=ik,k\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{\substack{k\to 0\\ k\in\mathbb{R}}} \frac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{ik} \\ &= -i \lim_{\substack{k\to 0\\ k\in\mathbb{R}}} \frac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k} = -if_y(x_0,y_0)\,. \end{aligned}$$

Άρα οι μερικές παράγωγοι $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν και είναι $f'(z_0) = f_x(x_0, y_0) = -if_y(x_0, y_0)$.

(β΄) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο z_0. Επειδή η f παίρνει πραγματικές τιμές, από το (α΄) έπεται ότι $f'(z_0) = f_x(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ και $if'(z_0) = f_y(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι $f'(z_0) = 0$.

■

Θ2. Έστω η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$, $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, όπου A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Δώστε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η f αναλυτική στο A.

Αν $\varphi : A \to \mathbb{R}$ είναι μία αρμονική συνάρτηση, δείξτε ότι η συνάρτηση $g := \varphi_x - i\varphi_y$ είναι αναλυτική στο A. (1 μον.)

Λύση. Η f είναι αναλυτική στο A αν και μόνο αν η f(σαν συνάρτηση των πραγματικών μεταβλητών x, y) έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο A και ικανοποιεί τις εξισώσεις (συνθήκες) Cauchy-Riemann

$$f_x = -if_y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_x = v_y \\ \\ u_y = -v_x \end{array} \right\} .$$

Επειδή η φ είναι αρμονική στο A, η φ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης στο A και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace: $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$. Επίσης είναι $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$.

Αν $U := \varphi_x$ και $V := -\varphi_y$, οι συναρτήσεις U, V έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο A με

$$U_x - V_y = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad \text{και} \quad U_y + V_x = \varphi_{xy} - \varphi_{yx} = 0\,.$$

Επομένως οι U, V ικανοποιούν τις εξισώσεις (συνθήκες) Cauchy-Riemann και κατά συνέπεια η συνάρτηση $g = \varphi_x - i\varphi_y = U + iV$ είναι αναλυτική στο A. ■

Θ3. (α΄) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, ακέραια συνάρτηση(αναλυτική σ' όλο το $\mathbb{C}$). Αν $\Re f(z) = u(x, y) > 0$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Liouville ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή. (1 μον.)

(β΄) Διατυπώστε την “ αρχή ελαχίστου” για ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Υπάρχει συνάρτηση f αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, συνεχής στο κύκλο $|z| = 1$ και τέτοια ώστε

$$|f(z)| = e^{|z|}, \quad \text{για κάθε } |z| \leq 1;$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) <u>*1ος τρόπος*</u>. Η συνάρτηση $g(z) := e^{-f(z)}$ είναι ακέραια με

$$|g(z)| = |e^{-f(z)}| = |e^{-u(x,y)-iv(x,y)}| = e^{-u(x,y)} < e^0 = 1$$

$$(u(x,y) > 0 \text{ για κάθε } (x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επομένως, από το κλασικό θεώρημα Liouville η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. Τότε και η $|g(z)| = e^{-u(x,y)}$ θα είναι σταθερή οπότε και η $\Re f(z) = u(x,y)$ είναι σταθερή. Άρα, από γνωστή πρόταση και η συνάρτηση f θα είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

<u>*2ος τρόπος*</u>. Αν $h := \dfrac{1}{1+f}$, τότε $h(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επειδή $\Re f = u > 0$, η h είναι ακέραια συνάρτηση. Πράγματι,

$$|1 + f(z)| \geq \Re(1 + f(z)) = 1 + u(x,y) > 1 \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}$$

οπότε και $1 + f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επίσης για κάθε $z \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$|h(z)| = \left|\frac{1}{1+f(z)}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1+u(x,y))^2 + v^2(x,y)}} \leq \frac{1}{1+u(x,y)} < 1\,,$$

δηλαδή η h είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$. Άρα, από το κλασικό θεώρημα Liouville η h είναι σταθερή και κατά συνέπεια η f θα είναι σταθερή.

<u>*Σημείωση*</u>. Για την απόδειξη θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τη συνάρτηση

$$h := \frac{1}{\alpha + f}\,, \quad \text{για κάποιο } \alpha > 0\,.$$

(β΄) *Αρχή ελαχίστου*: Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο $G \subset \mathbb{C}$, συνεχής στο σύνορο ∂G του G και $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in G$, τότε η $|f|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο ∂G του G εκτός και αν η f είναι σταθερή στο G.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση f αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο, συνεχής στο σύνορο $|z| = 1$ και τέτοια ώστε $|f(z)| = e^{|z|}$ για κάθε $|z| \leq 1$. Τότε η f δεν μηδενίζεται στο μοναδιαίο δίσκο. Επειδή για κάθε $|z| = 1$ είναι $|f(z)| = e^1 = e$ και $|f(0)| = e^0 = 1$, η $|f|$ δεν παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο $|z| = 1$. Επομένως από την αρχή ελαχίστου η f θα πρέπει να είναι σταθερή στο μοναδιαίο δίσκο. Όμως καμία σταθερή συνάρτηση δεν ικανοποιεί τη σχέση $|f(z)| = e^{|z|}$ για κάθε $|z| < 1$. Άτοπο. Άρα, δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση f.

■

Θ4. (α΄) Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}\,.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα(η σειρά) Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 1$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $2 - 3i$. (1 μον.)

(β΄) Διατυπώστε το θεώρημα Laurent για μια αναλυτική συνάρτηση f στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\},\ 0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty, \text{ με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Έστω $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ και $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n$ τα αναπτύγματα(οι σειρές) Laurent της $f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}$ στους δακτυλίους $\Delta_1 : 0 < |z| < 1$ και $\Delta_2 : 1 < |z| < 2$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, δείξτε ότι

$$d_n - c_n = -\frac{2}{\pi} \text{ για κάθε περιττό αριθμό } n\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Έχουμε τους δακτυλίους $\Delta_1 : 0 < |z-1| < 3$ και $\Delta_2 : |z-1| > 3$. Το σημείο $2 - 3i$ ανήκει στο δακτύλιο Δ_2. Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά $1/(1+w) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w| < 1$, έχουμε

$$-\frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n w^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n w^{n-1}\,, \quad |w| < 1\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z-1)\left[(z-1)+3\right]^2} \\
&= \frac{1}{(z-1)^3\left[1+3/(z-1)\right]^2} \\
&= \frac{1}{(z-1)^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\left(\frac{3}{z-1}\right)^{n-1} \qquad (|3/(z-1)|<1 \Leftrightarrow |z-1|>3) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n3^{n-1}\frac{1}{(z-1)^{n+2}} = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-2)3^{n-3}\frac{1}{(z-1)^n}\,.
\end{aligned}$$

Ο μεγαλύτερος δακτύλιος στον οποίο το παραπάνω ανάπτυγμα Laurent της f ισχύει είναι ο $\Delta_2 : |z-1| > 3$.

(β΄) Η αναλυτική συνάρτηση f στο δακτύλιο Δ αναπτύσσεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \text{ για κάθε } z \in \Delta\,,$$

όπου η σειρά συγκλίνει απόλυτα στο Δ και ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του Δ. Οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\,,$$

όπου ο κύκλος $|z|=\rho$ με κέντρο 0, ακτίνα ρ, $R_1<\rho<R_2$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ.

(i) $\underline{\Delta_1 : 0<|z|<1}$. Είναι

$$\frac{1}{\sin\pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n\,, \quad \text{για κάθε } z\in\Delta_1\,,$$

όπου

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho_1}\frac{1}{z^{n+1}\sin\pi z}\,dz \;\text{ με } 0<\rho_1<1\,.$$

Το 0 είναι το μοναδικό μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της $g(z) = \frac{1}{z^{n+1}\sin\pi z}$ στο εσωτερικό του κύκλου $|z|=\rho_1$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$c_n = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+1}\sin\pi z},\, 0\right)\,.$$

(ii) $\underline{\Delta_2 : 1 < |z| < 2}$. Είναι

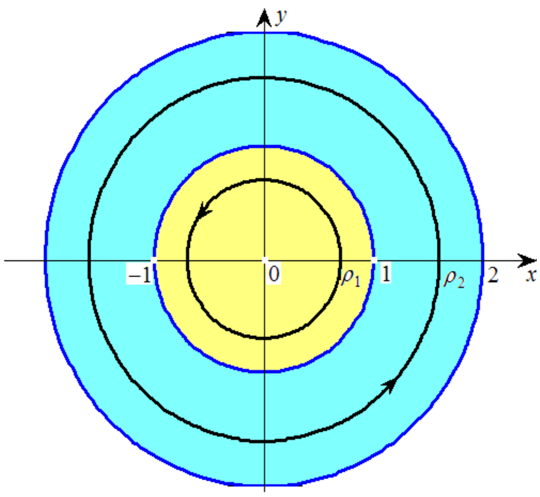
$$\frac{1}{\sin \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n \,, \quad \text{για κάθε } z \in \Delta_2 \,,$$

όπου

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho_2} \frac{1}{z^{n+1} \sin \pi z}\, dz \quad \text{με } 1 < \rho_2 < 2 \,.$$

Τα 0, ± 1 είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $g(z) = 1/z^{n+1} \sin \pi z$ στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = \rho_2$. Τα σημεία ± 1 είναι απλοί πόλοι της g. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$d_n = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+1} \sin \pi z}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+1} \sin \pi z}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{n+1} \sin \pi z}, 1\right) .$$



Επομένως

$$\begin{aligned}
d_n - c_n &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n-1}}{\sin \pi z}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n-1}}{\sin \pi z}, 1\right) \\
&= \left.\frac{z^{-n-1}}{(\sin \pi z)'}\right|_{z=-1} + \left.\frac{z^{-n-1}}{(\sin \pi z)'}\right|_{z=1} \\
&= \frac{(-1)^{-n-1}}{\pi \cos(-\pi)} + \frac{1}{\pi \cos \pi} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left((-1)^{-n-1} + 1\right) \\
&= -\frac{2}{\pi} \,. \qquad\qquad \text{(αν } n \text{ περιττός)}
\end{aligned}$$

■

Θ5. (α΄) Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ και $R > 0$, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο

$$\Delta : 0 < |z - z_0| < R$$

και δεν είναι αναλυτική στο z_0. Αν $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ είναι το ανάπτυγμα(η σειρά) Laurent της f με κέντρο το z_0 στο διάτρητο δίσκο Δ, πότε το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f; Δώστε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το z_0 ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f. (0,5 μον.)

(β΄) Έστω η συνάρτηση $g(z) = z\cos(1/z)$, $z \neq 0$. Υπολογίστε τα όρια $\lim_{n\to\infty} g(z_n)$ και $\lim_{n\to\infty} g(\zeta_n)$, όπου $z_n = i/n$ και $\zeta_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει το όριο $\lim_{z\to 0} g(z)$; Τι είδους μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της g είναι το 0; Υπολογίστε το $\mathrm{Res}\,(g, 0)$.

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f, αν στο ανάπτυγμα(στη σειρά) Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

της f στο διάτρητο δίσκο $\Delta : 0 < |z - z_0| < R$ είναι $a_n \neq 0$ για άπειρα το πλήθος $n < 0$.

Το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f

$\Leftrightarrow$ Το $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ δεν υπάρχει και δεν ισούται με ∞(δηλαδή $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| \neq \infty$)

$\Leftrightarrow$ Η f δεν είναι φραγμένη σε διάτρητη περιοχή του z_0 και $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| \neq \infty$.

(β΄) Είναι $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \zeta_n = 0$. Επειδή $\cos z = \frac{1}{2}(e^{in} + e^{-in})$, είναι

$$g(z_n) = \frac{i}{n}\cos\left(\frac{n}{i}\right) = i\frac{e^n + e^{-n}}{2n} \quad \text{και} \quad g(\zeta_n) = \frac{\cos n}{n}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} g(z_n) &= i \lim_{n\to\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2n} \\ &= i \lim_{n\to\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{2} && \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\ &= \infty\end{aligned}$$

και $\lim_{n\to\infty} g(\zeta_n) = 0$. Άρα το $\lim_{z\to 0} g(z)$ δεν υπάρχει και δεν ισούται με ∞. Κατά συνέπεια το 0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της g.

Επειδή

$$g(z) = z\cos\frac{1}{z} = z\left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \cdots\right) = z - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{4!z^3} - \cdots\,,$$

είναι $\operatorname{Res}(g,\, 0) = -\frac{1}{2}$.

■

Θ6. (α΄) Αν η μιγαδική συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$, δείξτε ότι

$$\oint_{|z|=1} z \cdot \overline{f(z)}\, dz = \pi i \cdot \overline{f''(0)}\,.$$

(1,2 μον.)

(β΄) Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5} + \cos t}\, dt\,.$$

(1,3 μον.)

Λύση. Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ είναι $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, με $dz = ie^{it}dt = izdt$.

(α΄) Είναι

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} z \cdot \overline{f(z)}\, dz &= \int_0^{2\pi} e^{it} \cdot \overline{f(e^{it})}\, ie^{it}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})}\, ie^{2it}\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})ie^{-2it}}\, dt \\
&= -\overline{\left(\int_0^{2\pi} f(e^{it})ie^{-2it}\, dt\right)} \\
&= -\overline{\left(\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{3it}} ie^{it}\, dt\right)} \\
&= -\overline{\left(\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^3}\, dz\right)} \\
&= \frac{2\pi i}{2!} \overline{\left(\frac{2!}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^3}\, dz\right)} = \pi i \cdot \overline{f''(0)}\,.
\end{aligned}$$

(ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για παραγώγους)

(β΄) Επειδή $\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) = \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right)$ και $dt = (1/iz)dz$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5} + \cos t}\, dt &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{5} + \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right)} \frac{1}{iz}\, dz \\
&= \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2\sqrt{5}\, z + 1}\, dz \\
&= \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z + \sqrt{5} - 2)(z + \sqrt{5} + 2)}\, dz\,.
\end{aligned}$$

Τα σημεία $-\sqrt{5} \pm 2$ είναι απλοί πόλοι της $f(z) = 1/(z + \sqrt{5} - 2)(z + \sqrt{5} + 2)$. Επειδή μόνο το σημείο $-\sqrt{5} + 2$ βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5} + \cos t}\, dt &= \frac{2}{i} 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f,\, -\sqrt{5} + 2) \\
&= 4\pi \lim_{z \to -\sqrt{5}+2} (z + \sqrt{5} - 2) \frac{1}{(z + \sqrt{5} - 2)(z + \sqrt{5} + 2)} \\
&= 4\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi\,.
\end{aligned}$$

■

2.7 Ακαδημαϊκό έτος 2009–10

ΣΧΟΛΗ ΗΜΜΥ

Κανονική Εξέταση στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

5 Ιουλίου, 2010

Θ1. (α΄) Έστω η μιγαδική συνάρτηση $f : G \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, όπου G είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Αν οι συναρτήσεις

$$\Re f(z),\ \Im f(z),\ \Re\left(zf(z)\right) \text{ και } \Im\left(zf(z)\right) \text{ είναι αρμονικές στο } G,$$

δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο G. (1 μον.)

(β΄) Να βρεθούν όλες οι ακέραιες (αναλυτικές στο $\mathbb{C}$) συναρτήσεις f, τέτοιες ώστε

$$|f'(z)| < |f(z)| \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

(1 μον.)

Λύση.

(α΄) Επειδή οι συναρτήσεις $\Re f(z) = u(x, y)$, $\Im f(z) = v(x, y)$ είναι αρμονικές στο G, οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης στο G και ικανοποιούν τις εξισώσεις Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0\,, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0\,.$$

Επίσης, οι συναρτήσεις $\Re zf(z) = xu(x, y) - yv(x, y)$, $\Im zf(z) = yu(x, y) + xv(x, y)$ είναι αρμονικές στο G. Επομένως,

$$\begin{aligned}
&(xu - yv)_{xx} + (xu - yv)_{yy} = 0\\
&\quad \Leftrightarrow (2u_x + xu_{xx} - yv_{xx}) + (xu_{yy} - 2v_y - yv_{yy}) = 0\\
&\quad \Leftrightarrow 2u_x - 2v_y + x\left(u_{xx} + u_{yy}\right) - y\left(v_{xx} + v_{yy}\right) = 0\\
&\quad \Leftrightarrow u_x = v_y \qquad\qquad (u_{xx} + u_{yy} = 0,\ v_{xx} + v_{yy} = 0)
\end{aligned}$$

και

$$
\begin{aligned}
&(yu+xv)_{xx}+(yu+xv)_{yy}=0\\
&\quad\Leftrightarrow (2v_x+yu_{xx}+xv_{xx})+(2u_y+yu_{yy}+xv_{yy})=0\\
&\quad\Leftrightarrow 2v_x+2u_y+y\,(u_{xx}+u_{yy})+x\,(v_{xx}+v_{yy})=0\\
&\quad\Leftrightarrow u_y=-v_x\,. \qquad\qquad (u_{xx}+u_{yy}=0,\ v_{xx}+v_{yy}=0)
\end{aligned}
$$

Επειδή οι συναρτήσεις u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο ανοικτό σύνολο G και ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann: $\{u_x = v_y,\, u_y = -v_x\}$, από γνωστό θεώρημα η συνάρτηση $f = u + iv$ είναι αναλυτική στο G.

(β΄) Επειδή $|f'(z)| < |f(z)|$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$, η f δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{C}$. Πράγματι, αν $f(z_0) = 0$ για κάποιο $z_0 \in \mathbb{C}$, τότε θα είναι $|f'(z_0)| < 0$ (άτοπο).

Αν $h(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}$, $z \in \mathbb{C}$, η h είναι ακέραια συνάρτηση (αναλυτική στο $\mathbb{C}$) με $|h(z)| < 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Τότε, από το κλασικό θεώρημα Liouville η συνάρτηση h είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. Έστω

$$h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = c\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}, \text{ όπου } |c| < 1\,.$$

Επειδή η f δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{C}$, από γνωστό θεώρημα, παραπέμπουμε στο [9]. υπάρχει αναλυτική συνάρτηση $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$e^{g(z)} = f(z)\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$g'(z)e^{g(z)} = f'(z) \Leftrightarrow g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}\,.$$

Επομένως, $g'(z) = c$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και κατά συνέπεια $g(z) = cz + d$. Τότε,

$$f(z) = e^{cz+d} = e^d e^{cz} = Ae^{cz}\,, \text{ όπου } A = e^d \neq 0\,.$$

Άρα,

$$f(z) = Ae^{cz}\,, \quad A, c \in \mathbb{C},\ A \neq 0 \text{ και } |c| < 1\,.$$

■

Θ2. Έστω

$$\sin\left(a(z+z^{-1})\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n\,, \quad a \in \mathbb{C}\,,$$

το ανάπτυγμα κατά Laurent της αναλυτικής συνάρτησης $f(z) = \sin\left(a(z+z^{-1})\right)$ στο διάτρητο δίσκο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Δείξτε ότι

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2a\cos\theta)\cos n\theta\, d\theta\,, \quad n \in \mathbb{Z}$$

και

$$\operatorname{Res}\left(\sin\left(\frac{i}{2}(z+z^{-1})\right)\,,\, 0\right) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh(\cos\theta)\cos\theta\, d\theta\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Από το θεώρημα του Laurent οι συντελεστές c_n δίνονται από τον τύπο

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{\sin\left(a(z+z^{-1})\right)}{z^{n+1}}\, dz\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

όπου ο μοναδιαίος κύκλος $|z| = 1$ με θετική φορά διαγραφής ανήκει στο διάτρητο δίσκο Δ. Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $z = e^{i\theta}$, $\pi \le \theta \le \pi$. Επειδή $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$, έχουμε

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{\sin\left(a(z+z^{-1})\right)}{z^{n+1}}\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(a\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)}{e^{in\theta}}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2a\cos\theta)\left(\cos n\theta - i\sin n\theta\right)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2a\cos\theta)\cos n\theta\, d\theta - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2a\cos\theta)\sin n\theta\, d\theta\,.
\end{aligned}$$

Όμως η συνάρτηση $f(\theta) = \sin(2a\cos\theta)\sin n\theta$ είναι περιττή και κατά συνέπεια

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2a\cos\theta)\sin n\theta\, d\theta = 0\,.$$

Επομένως,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2a\cos\theta)\cos n\theta\, d\theta\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Είναι

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\sin\left(\frac{i}{2}(z+z^{-1})\right)\,,\, 0\right) = c_{-1} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(i\cos\theta)\cos\theta\, d\theta \qquad (a = i/2) \\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh(\cos\theta)\cos\theta\, d\theta\,.
\end{aligned}$$

■

Θ3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_{|z|=1} \frac{\Im z}{z(z-1/2)}\, dz\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Αν το $z = x + iy$ ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο, τότε

$$\Im z = y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\,. \qquad (|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = z^{-1})$$

<u>*2ος τρόπος*</u>: Αν $z = e^{i\theta}$, $-\pi \le \theta \le \pi$, τότε

$$\Im z = \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\,.$$

Είναι

$$\oint_{|z|=1} \frac{\Im z}{z(z-1/2)}\, dz = \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1} \frac{z - z^{-1}}{z(z-1/2)}\, dz = \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1} \frac{z^2-1}{z^2(z-1/2)}\, dz$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} \frac{\Im z}{z(z-1/2)}\, dz &= \frac{1}{2i} 2\pi i \left[\mathrm{Res}\left(\frac{z^2-1}{z^2(z-1/2)}\,,\, 0\right)\right. \\
&\qquad \left. + \mathrm{Res}\left(\frac{z^2-1}{z^2(z-1/2)}\,,\, 1/2\right)\right] \\
&\qquad\qquad \text{(θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων)} \\
&= \pi\left[\lim_{z\to 0}\left(z^2\frac{z^2-1}{z^2(z-1/2)}\right)' + \lim_{z\to 1/2}(z-1/2)\frac{z^2-1}{z^2(z-1/2)}\right] \\
&= \pi\left[\lim_{z\to 0}\frac{z^2-z+1}{(z-1/2)^2} + \lim_{z\to 1/2}(1 - z^{-2})\right] \\
&= \pi[2^2 + 1 - 2^2] = \pi\,.
\end{aligned}$$

■

Επαναληπτική Εξέταση στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

29 Σεπτεμβρίου, 2010

Θ1. (α΄) Έστω η μιγαδική συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} z^2 \sin(1/z) & \text{αν } z \neq 0 \\ 0 & \text{αν } z = 0\,. \end{cases}$$

Να υπολογιστούν τα όρια

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x\in\mathbb{R}}} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{z\to 0\\ z=iy, y\in\mathbb{R}}} \frac{f(z)-f(0)}{z-0}\,.$$

Είναι η f παραγωγίσιμη στο σημείο 0; (1 μον.)

(β΄) Να βρεθούν οι αρμονικές συναρτήσεις $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε η συνάρτηση

$$\phi(x, y) := xu(x, y)$$

να είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Στη συνέχεια να βρεθούν οι συζυγείς αρμονικές v των u καθώς επίσης και οι ακέραιες συναρτήσεις $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. (1 μον.)

Λύση.

(α΄) Είναι

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x\in\mathbb{R}}} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z\to 0\\ z=iy, y\in\mathbb{R}}} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} &= \lim_{y\to 0} \frac{(iy)^2\sin(1/iy)}{iy} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{y^2\sin(i/y)}{iy} \\ &= \lim_{y\to 0} y\sinh(1/y)\,. && (\sin(i/y) = i\sinh(1/y)) \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0^+} y\sinh(1/y) &= \lim_{y\to 0^+} \frac{\sinh(1/y)}{1/y} \\ &= \lim_{t\to +\infty} \frac{\sinh t}{t} \\ &= \lim_{t\to +\infty} \cosh t && \text{(L'Hôpital)} \\ &= \lim_{t\to +\infty} \frac{e^t + e^{-t}}{2} = +\infty \end{aligned}$$

και $\lim_{y\to 0^-} y\sinh(1/y) = \lim_{y\to 0^+} y\sinh(1/y) = +\infty$. Δηλαδή $\lim_{y\to 0} y\sinh(1/y) = +\infty$. Άρα, η παράγωγος $f'(0)$ δεν υπάρχει.

(β΄) Επειδή η συνάρτηση u είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$, η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης στο $\mathbb{R}^2$ και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0\,.$$

Όμως και η συνάρτηση $\phi(x,y) = xu(x,y)$ είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$ οπότε

$$\begin{aligned}(xu)_{xx} + (xu)_{yy} = 0 &\Leftrightarrow (2u_x + xu_{xx}) + xu_{yy} = 0\\ &\Leftrightarrow 2u_x + x\,(u_{xx} + u_{yy}) = 0\\ &\Leftrightarrow u_x = 0 \qquad\qquad (u_{xx} + u_{yy} = 0)\end{aligned}$$

Επομένως $u(x,y) = c_1(y)$ και η εξίσωση Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ συνεπάγεται ότι $c_1''(y) = 0$. Άρα,

$$u(x,y) = c_1(y) = ay + b\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Αν v είναι η συζυγής αρμονική της u, από την εξίσωση Cauchy–Riemann $v_y = u_x$ έπεται ότι

$$v_y = 0\,, \quad \text{οπότε} \quad v(x,y) = c_2(x)\,.$$

Από τη δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann $u_y = -v_x$ προκύπτει ότι

$$a = -c_2'(x) \Leftrightarrow c_2'(x) = -a\,.\,\text{Επομένως}\,,\; c_2(x) = -ax + c\,.$$

Δηλαδή $v(x,y) = -ax + c$ και

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = b + i(-az + c) = -iaz + b + ic\,,$$

$c \in \mathbb{R}$.

■

Θ2. Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{20}{(z^4 - 4)(z^4 + 16)}\,.$$

Να αποδειχθεί ότι το ανάπτυγμα κατά Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 0$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο Δ που περιέχει το σημείο $3i/2$ είναι

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{4n} \quad \text{με } a_n = \begin{cases} 4^{-(n+1)} & \text{αν } n \leq -1 \\ (-1/16)^{n+1} & \text{αν } n \geq 0\,. \end{cases}$$

Ποιος είναι ο δακτύλιος Δ; (1,5 μον.)

Λύση. Είναι

$$f(z) = \frac{20}{(z^4-4)(z^4+16)} = \frac{1}{z^4-4} - \frac{1}{z^4+16}\,.$$

Ως γνωστόν,

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad \text{και} \quad \frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n\,, \qquad |w| < 1\,. \qquad \text{(γεωμετρικές σειρές)}$$

Αν $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2} < |z| < 2\}$, το $3i/2 \in \Delta$ και το ανάπτυγμα Laurent της f στο δακτύλιο Δ είναι

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^4-4} - \frac{1}{z^4+16} \\ &= \frac{1}{z^4}\frac{1}{1-4/z^4} - \frac{1}{16}\frac{1}{1+z^4/16} \\ &= \frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z^4}\right)^n - \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z^4}{16}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{4(n+1)}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{16^{n+1}}z^{4n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} 4^{-(n+1)} z^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{16}\right)^{n+1} z^{4n}\,. \end{aligned}$$

■

Θ3. Αν η μιγαδική συνάρτηση f είναι αναλυτική(ολόμορφη) στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, δείξτε ότι για κάθε z με $|z| < R$ είναι

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{Re^{it}}{Re^{it}-z} + \frac{\overline{z}}{Re^{-it}-\overline{z}}\right] f(Re^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-|z|^2}{|Re^{it}-z|^2} f(Re^{it})\,dt\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Επειδή

$$\frac{Re^{it}}{Re^{it}-z} + \frac{\overline{z}}{Re^{-it}-\overline{z}} = \frac{R^2-|z|^2}{(Re^{it}-z)\,\overline{(Re^{it}-z)}} = \frac{R^2-|z|^2}{|Re^{it}-z|^2}\,,$$

αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{Re^{it}}{Re^{it}-z}+\frac{\overline{z}}{Re^{-it}-\overline{z}}\right]f(Re^{it})\,dt\,.$$

Αν $|z|<R$, $z\neq 0$, τότε

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{Re^{it}}{Re^{it}-z}+\frac{\overline{z}}{Re^{-it}-\overline{z}}\right]f(Re^{it})\,dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{Re^{it}}{Re^{it}-z}+\frac{\overline{z}Re^{it}}{R^2-\overline{z}Re^{it}}\right]f(Re^{it})\,dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{Re^{it}-z}-\frac{1}{Re^{it}-(R^2/\overline{z})}\right]Re^{it}f(Re^{it})\,dt\\
&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,R)}\left[\frac{1}{w-z}-\frac{1}{w-(R^2/\overline{z})}\right]f(w)\,dw
\end{aligned}$$

(αντικατάσταση $w=Re^{it}$, $dw=iRe^{it}dt$)

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,R)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,R)}\frac{f(w)}{w-(R^2/\overline{z})}\,dw\,,$$

όπου $C^+(0,\,R)$ είναι ο κύκλος με κέντρο 0 ακτίνα $R>0$ και θετική φορά διαγραφής. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy είναι

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,R)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw\,.$$

Επειδή $|z|<R$, είναι $\left|R^2/\overline{z}\right|>R$ και επομένως από το θεώρημα του Cauchy έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,R)}\frac{f(w)}{w-(R^2/\overline{z})}f(w)\,dw=0\,.$$

Άρα,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{Re^{it}}{Re^{it}-z}+\frac{\overline{z}}{Re^{-it}-\overline{z}}\right]f(Re^{it})\,dt\,.$$

Αν $z=0$, τότε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{Re^{it}}{Re^{it}-z}+\frac{\overline{z}}{Re^{-it}-\overline{z}}\right]f(Re^{it})\,dt&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(Re^{it})\,dt\\
&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,R)}\frac{f(w)}{w}\,dw
\end{aligned}$$

(αντικατάσταση $w=Re^{it}$, $dt=dw/iw$)

$$=f(0)\,.$$

■

2.8 Ακαδημαϊκό έτος 2008–9

ΣΧΟΛΗ ΗΜΜΥ

Κανονική Εξέταση στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

17 Ιουλίου, 2009

Θ1. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $\tan z = i$. Να βρεθεί το είδος των μεμονωμένων ανώμαλων σημείων της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{\tan z - i}$$

και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{\tan z - i}\, dz\,.$$

(1 μον.)

Λύση. Είναι

$$\{\tan z = i\} \Leftrightarrow \left\{\frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)/2i}{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)/2} = i\right\} \Leftrightarrow \left\{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -1\right\} \Leftrightarrow \left\{e^{iz} = 0\right\}\,.$$

Όμως η μιγαδική εκθετική συνάρτηση απεικονίζει το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Επομένως η εξίσωση $\tan z = i$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{C}$.

Η $w = \tan z$ δεν ορίζεται για $z = k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως, τα $z_k = k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z) = 1/\left(\tan z - i\right)$. Επειδή

$$\left|\frac{1}{\tan z - i}\right| = \frac{1}{|\tan z - i|} \leq \frac{1}{|\tan z| - 1} \xrightarrow[z \to k\pi + \pi/2]{} 0\,,$$

τα $z_k = k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι επουσιώδη(απαλείψιμα) ανώμαλα σημεία της f. Τα επουσιώδη ανώμαλα σημεία $\pm\frac{\pi}{2}$ βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = 2$. Επομένως,

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{\tan z - i}\, dz = 0\,.$$

■

Θ2. Έστω $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα κατά Laurent της αναλυτικής(ολόμορφης) συνάρτησης f στο διάτρητο δίσκο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Υποθέτουμε ότι

$$|f(z)| \leq \ln\frac{2}{|z|}\,, \quad z \in \Delta\,.$$

Δείξτε ότι

$$|a_n| \le \frac{1}{r^n} \ln \frac{2}{r}, \quad 0 < r < 1.$$

Τι είδους μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της συνάρτησης f είναι το 0;

Υπάρχει το $\lim_{z\to 0} f(z)$; Είναι $\lim_{z\to 0} |f(z)| \le \ln 2$; (2,5 μον.)

Λύση. Από το θεώρημα του Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+(0,\,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz\,,$$

όπου ο κύκλος $C^+(0,\,r)$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $0 < r < 1$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ. Επομένως

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{C^+(0,\,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \right| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \oint_{C^+(0,\,r)} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}\, |dz| \\
&\le \frac{1}{2\pi r^{n+1}} \ln \frac{2}{r} \cdot \oint_{C^+(0,\,r)} |dz| \qquad \left(|f(z)| \le \ln \tfrac{2}{|z|} = \ln \tfrac{2}{r}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi r^{n+1}} \ln \frac{2}{r} \cdot 2\pi r = \frac{1}{r^n} \ln \frac{2}{r}\,.
\end{aligned}$$

Αν $n < 0$, τότε

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r^n} \ln \frac{2}{r} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\ln(2/r)}{r^n} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} -\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{n r^n} = -\frac{1}{n} \lim_{r\to 0^+} r^{-n} = 0\,.$$

Επομένως $a_n = 0$ για $n = -1, -2, -3, \dots$. Άρα, το $z_0 = 0$ είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f και κατά συνέπεια η f επεκτείνεται σε μια αναλυτική(ολόμορφη) συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1)$.

Είναι $\lim_{z\to 0} f(z) = a_0$ και επομένως

$$\lim_{z\to 0} |f(z)| = |a_0| \le \lim_{r\to 1^-} \ln \frac{2}{r} = \ln 2\,.$$

■

Θ3. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{5 + 4\cos\theta}\, d\theta\,, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

(1,5 μον.)

Λύση. Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Επειδή $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$ και $\cos\theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ni\theta}}{5+4\cos\theta}\,d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{iz\,[5+2(z+z^{-1})]}\,dz \\ &= -i\oint_{|z|=1} \frac{z^n}{2z^2+5z+2}\,dz = -i\oint_{|z|=1} \frac{z^n}{(2z+1)(z+2)}\,dz\,.\end{aligned}$$

Τα σημεία $-1/2$ και -2 είναι απλοί πόλοι της $f(z) = \frac{z^n}{(2z+1)(z+2)}$. Επειδή μόνο το σημείο $-1/2$ βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων είναι

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ni\theta}}{5+4\cos\theta}\,d\theta &= 2\pi i(-i)\operatorname{Res}\left(\frac{z^n}{(2z+1)(z+2)}, -\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\pi \lim_{z\to -1/2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\frac{z^n}{(2z+1)(z+2)} \\ &= 2\pi\frac{(-1/2)^n}{2(-1/2+2)} = \pi\frac{(-1)^n}{3\cdot 2^{n-1}}\,.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta = \Re\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{ni\theta}}{5+4\cos\theta}\,d\theta\right) = \pi\frac{(-1)^n}{3\cdot 2^{n-1}}\,.$$

■

Επαναληπτική Εξέταση στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

6 Οκτωβρίου, 2009

Θ1. (α΄) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, είναι αναλυτική (ολόμορφη) στον τόπο G με $f(z_0) = 1$ για κάποιο $z_0 \in G$. Αν η συνάρτηση $|f|^2 = u^2 + v^2$ είναι αρμονική στο G, να βρεθεί η f. (1 μον.)

(β΄) Να βρεθεί η ακέραια (αναλυτική στο $\mathbb{C}$) συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και

$$|f(z) - e^z\cos z| < 3\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

(0,5 μον.)

Λύση.

(α΄) Ως γνωστόν η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο G και ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann: $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$. Επίσης οι συναρτήσεις u, v είναι αρμονικές στο G, δηλαδή $u_{xx} + u_{yy} = 0$ και $v_{xx} + v_{yy} = 0$. Είναι $\left(u^2 + v^2\right)_x = 2uu_x + 2vv_x$,

$$\left(u^2 + v^2\right)_{xx} = (2uu_x + 2vv_x)_x = 2uu_{xx} + 2u_x^2 + 2vv_{xx} + 2v_x^2$$

και παρόμοια

$$\left(u^2 + v^2\right)_{yy} = 2uu_{yy} + 2u_y^2 + 2vv_{yy} + 2v_y^2 \,.$$

Επειδή η $|f|^2 = u^2 + v^2$ είναι αρμονική στο G, είναι $(u^2 + v^2)_{xx} + (u^2 + v^2)_{yy} = 0$ και επομένως

$$\begin{aligned} &2u(u_{xx} + u_{yy}) + 2v(v_{xx} + v_{yy}) + 2u_x^2 + 2v_x^2 + 2u_y^2 + 2v_y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow u_x^2 + v_x^2 + u_y^2 + v_y^2 = 0 \,. \end{aligned}$$

Άρα, $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in G$. Επειδή G είναι ένας τόπος, από γνωστή πρόταση η f είναι σταθερή στο G και κατά συνέπεια $f(z) = f(z_0) = 1$, για κάθε $z \in G$.

(β΄) Επειδή οι συναρτήσεις $w_1 = e^z$, $w_2 = \cos z$ είναι ακέραιες, η $w_3 = e^z \cos z$ είναι ακέραια και κατά συνέπεια η $w = f(z) - e^z \cos z$ είναι ακέραια συνάρτηση. Από την υπόθεση η $w = f(z) - e^z \cos z$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$ και επομένως από το κλασικό θεώρημα Liouville η $w = f(z) - e^z \cos z$ θα πρέπει να είναι σταθερή, έστω $f(z) - e^z \cos z = c$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επειδή $f(0) = 0$, είναι $c = -1$. Άρα, $f(z) = e^z \cos z - 1$.

■

Θ2. Έστω $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ το ανάπτυγμα κατά Laurent της αναλυτικής (ολόμορφης) συνάρτησης f στο διάτρητο δίσκο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$. Αν

$$M(r) := \max\left\{|f(z)| : |z - z_0| = r\right\} \,, \quad 0 < r < R \,,$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Laurent να αποδειχθεί ότι

$$|a_n| \le \frac{M(r)}{r^n} \,, \quad n \in \mathbb{Z} \,.$$

Αν $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = 0$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, τι συμπεραίνετε για το μεμονωμένο ανώμαλο σημείο z_0 της συνάρτησης f; (1,5 μον.)

Λύση. Από το θεώρημα του Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(z_0,\, r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz\,,$$

όπου $C^+(z_0, r)$ είναι ο κύκλος με κέντρο z_0 και ακτίνα r, $0 < r < R$. Επομένως

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C^+(z_0,\, r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\oint_{C^+(z_0,\, r)} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\, |dz| \\
&\le \frac{M(r)}{2\pi r^{n+1}}\oint_{C^+(0,\, r)} |dz| && (|f(z)| \le M(r)) \\
&= \frac{M(r)}{2\pi r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}\,.
\end{aligned}$$

Από την αρχή μεγίστου η $M(r)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του r, $0 < r < R$. Από την υπόθεση είναι $\lim_{r\to 0^+} r^m M(r) = 0$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Αν $-n \ge m \Leftrightarrow n \le -m$, τότε

$$|a_n| \le r^{-n} M(r) \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0\,.$$

Επομένως $a_n = 0$ για $n = -m, -(m+1), -(m+2), \ldots$. Άρα, το z_0 είναι πόλος τάξης $\le m-1$ (αν $m = 1$, τότε το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f). ■

Θ3. Έστω γ_R, με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi/4$, το τόξο του κύκλου με κέντρο 0 και ακτίνα $R > 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^4}{z^8+1}\, dz = 0\,.$$

Στη συνέχεια, ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση $f(z) = \frac{z^4}{z^8+1}$ πάνω στη κλειστή καμπύλη που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το 0 και πέρας το R, το τόξο γ_R και το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το $Re^{i\pi/4}$ και πέρας το 0, να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^\infty \frac{x^4}{x^8+1}\, dx = \frac{\pi}{8\sin(5\pi/8)}\,.$$

(2 μον.)

Λύση. Για κάθε $z \in \gamma_R$ είναι

$$\left|\frac{z^4}{z^8+1}\right| = \frac{|z|^4}{|z^8+1|} \le \frac{|z|^4}{|z|^8-1} = \frac{R^4}{R^8-1}\,.$$

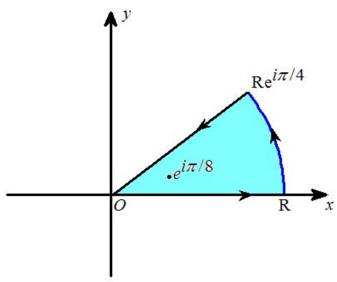
Το μήκος του τόξου γ_R είναι $\pi R/4$ και επομένως

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{z^4}{z^8+1}\,dz\right| \le \frac{\pi R^5}{4\,(R^8-1)} = \frac{\pi}{4}\frac{1/R^3}{1-1/R^8} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,.$$

Άρα,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{z^4}{z^8+1}\,dz = 0\,.$$

Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη (σύνορο του κυκλικού τομέα) που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $[0,R]$, το τόξο γ_R και το ευθύγραμμο



τμήμα $\left[Re^{i\pi/4},0\right]$.

Η παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος $\left[0,Re^{i\pi/4}\right]$ είναι $z\,(x) = xe^{i\pi/4}$, $0 \le x \le R$. Οι λύσεις της εξίσωσης $z^8+1=0 \Leftrightarrow z^8=-1 \Leftrightarrow z^8=e^{i\pi}$ είναι

$$z_k = e^{(2ki\pi+i\pi)/8}\,, \quad k=0,1,2,\ldots,7\,.$$

Τα z_k, $k=0,1,2,\ldots,7$, είναι απλοί πόλοι της f και μόνο το $z_0 = e^{i\pi/8}$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κυκλικού τομέα γωνίας $\pi/4$ και ακτίνας $R>1$. Είναι

$$\operatorname{Res}\left(f,\,e^{i\pi/8}\right) = \left.\frac{z^4}{8z^7}\right|_{z=e^{i\pi/8}} = \frac{1}{8}\frac{e^{5i\pi/8}}{e^{i\pi}} = -\frac{1}{8}e^{5i\pi/8}\,.$$

Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{x^4}{x^8+1}\,dx + \int_{\gamma_R}\frac{z^4}{z^8+1}\,dz - \int_0^R \frac{\left(xe^{i\pi/4}\right)^4}{\left(xe^{i\pi/4}\right)^8+1}e^{i\pi/4}\,dx \\ = 2\pi i\operatorname{Res}\left(f,\,e^{i\pi/8}\right) = -\frac{\pi i}{4}e^{5i\pi/8}\,.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\int_0^R \frac{x^4}{x^8+1}\,dx + \int_{\gamma_R}\frac{z^4}{z^8+1}\,dz + e^{i\pi/4}\int_0^R \frac{x^4}{x^8+1}\,dx = -\frac{\pi i}{4}e^{5i\pi/8}$$

και ισοδύναμα

$$\left(1+e^{i\pi/4}\right)\int_0^R \frac{x^4}{x^8+1}\,dx+\int_{\gamma_R}\frac{z^4}{z^8+1}\,dz=-\frac{\pi i}{4}e^{5i\pi/8}\,. \tag{2.10}$$

Από την (2.10) για $R\to\infty$ παίρνουμε

$$\left(1+e^{i\pi/4}\right)\int_0^\infty \frac{x^4}{x^8+1}\,dx=-\frac{\pi i}{4}e^{5i\pi/8}\,.$$

Επειδή

$$\frac{e^{5i\pi/8}}{1+e^{i\pi/4}}=\frac{1}{e^{-5i\pi/8}+e^{-3i\pi/8}}=\frac{1}{e^{-5i\pi/8}-e^{5i\pi/8}}=-\frac{1}{2i\sin\left(5\pi/8\right)}\,,$$

τελικά είναι

$$\int_0^\infty \frac{x^4}{x^8+1}\,dx=\frac{\pi}{8\sin\left(5\pi/8\right)}\,.$$

■

2.9 Ακαδημαϊκό έτος 2007–8

ΣΧΟΛΗ ΗΜΜΥ

Κανονική Εξέταση στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

11 Ιουλίου, 2008

Θ1. (α΄) Αν η συνάρτηση $f : G \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, είναι αναλυτική στον τόπο G, να αποδειχθεί ότι οι $u = \Re f$, $v = \Im f$ είναι αρμονικές συναρτήσεις στο G.

(β΄) Έστω η συνάρτηση $u(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Να αποδειχθεί ότι η u είναι αρμονική και ότι δεν υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ τέτοια ώστε $u = \Re f$.

Λύση.

(α΄) Επειδή η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο G, οι μερικές παράγωγοι κάθε τάξης των u, v είναι συνεχείς. Από τις εξισώσεις Cauchy–Riemann

$$\{u_x = v_y,\ u_y = -v_x\}$$

έχουμε

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy} \quad \text{και επομένως } u_{xx} + u_{yy} = 0\,.$$

Επίσης,

$$v_{xx} = -u_{yx} = -u_{xy} = -v_{yy} \quad \text{και επομένως } v_{xx} + v_{yy} = 0\,.$$

Άρα, οι u, v είναι αρμονικές συναρτήσεις στο G.

(β΄) Στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ η $u\,(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης και

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0\,.$$

Επομένως η $u(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ είναι αρμονική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, τέτοια ώστε $\Re f = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$. Επειδή η συνάρτηση $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{Arg} z$, με $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$, είναι αναλυτική στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, οι συναρτήσεις $w = f(z)$ και $w = \operatorname{Log} z$ είναι αναλυτικές στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ και έχουν το ίδιο πραγματικό μέρος. Τότε από γνωστή πρόταση θα διαφέρουν κατά μία σταθερά, έστω

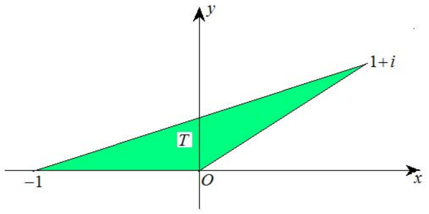
$$f(z) = \operatorname{Log} z + c\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]\,,$$

όπου $c \in \mathbb{C}$. Επειδή υποθέσαμε ότι η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, η f θα είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Τότε όμως και η $w = \operatorname{Log} z$ θα είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Άτοπο, επειδή ως γνωστόν η $w = \operatorname{Log} z$ δεν είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$.

■

Θ2. Έστω T το κλειστό και φραγμένο χωρίο με σύνορο το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία 0, -1 και $1+i$. Αν $f(z) = e^{z^2}$, να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της $|f|$ στο T.

Λύση. Επειδή η ακέραια συνάρτηση $f(z) = e^{z^2}$ δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{C}$, από την *αρχή μεγίστου* και την *αρχή ελαχίστου* η $|f(z)| = |e^{z^2}|$ θα παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της πάνω στο σύνορο του T που είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία 0, -1 και $1+i$.



1ος τρόπος.

(i) Στο ευθύγραμμο τμήμα $[-1, 0]$ με εξίσωση $z = x$, $-1 \le x \le 0$, είναι $|f(z)| = e^{x^2}$. Επομένως,

$$\max_{z\in[-1,\,0]} |f(z)| = f(-1) = e \quad \text{και} \quad \min_{z\in[-1,\,0]} |f(z)| = f(0) = 1\,.$$

(ii) Στο ευθύγραμμο τμήμα $[0, 1+i]$ με εξίσωση $z = x + ix$, $0 \le x \le 1$, είναι

$$|f(z)| = \left|e^{(x+ix)^2}\right| = \left|e^{2ix^2}\right| = 1\,.$$

(ii) Στο ευθύγραμμο τμήμα $[-1, 1+i]$ με εξίσωση $z = -1 + (2+i)t = 2t - 1 + it$, $0 \le t \le 1$, είναι

$$|f(z)| = \left|e^{(2t-1+it)^2}\right| = e^{3t^2-4t+1}\left|e^{2it(2t-1)}\right| = e^{3t^2-4t+1}\,.$$

Αν $g(t) = 3t^2 - 4t + 1$, $0 \leq t \leq 1$, τότε

$$\max_{t\in[0,\,1]} g(t) = g(0) = 1 \text{ και } \min_{t\in[0,\,1]} g(t) = g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}\,.$$

Επομένως,

$$\max_{z\in[-1,\,1+i]} |f(z)| = f(-1) = e \text{ και } \min_{z\in[-1,\,1+i]} |f(z)| = \left|f\left(\frac{1+2i}{3}\right)\right| = e^{-1/3}\,.$$

Άρα,

$$\max_{z\in T} |f(z)| = f(-1) = e \text{ και } \min_{z\in T} |f(z)| = \left|f\left(\frac{1+2i}{3}\right)\right| = e^{-1/3}\,.$$

2ος τρόπος. Αρκεί να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης

$$|f(z)| = \left|e^{(x+iy)^2}\right| = e^{x^2-y^2}\left|e^{2ixy}\right| = e^{x^2-y^2}\,,$$

πάνω στο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία 0, -1 και $1+i$. Εξετάζουμε τις περιπτώσεις

$$(i)\;\; y = 0,\, -1 \leq x \leq 0,\;\; (ii)\;\; y = x,\, 0 \leq x \leq 1 \text{ και } (iii)\;\; 2y = x+1,\, -1 \leq x \leq 1\,.$$

■

Θ3. Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z^2 - z - i}{(z-1-3i)(z^2-2z+1+2i)} = \frac{1}{z-1-3i} + \frac{1}{z^2-2z+1+2i}\,.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα κατά Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 1$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $-1/2$.

Λύση. Είναι

$$f(z) = \frac{1}{z-1-3i} + \frac{1}{(z-1)^2 + (1+i)^2}\,.$$

Ως γνωστόν,

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad \text{και} \quad \frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n\,, \quad |w| < 1\,. \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

Επειδή $|1+i| = \sqrt{2}$, αν $\Delta = \left\{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2} < |z-1| < 3\right\}$, το $-\frac{1}{2} \in \Delta$ και το ανάπτυγμα

Laurent της f στο δακτύλιο Δ είναι

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{3i}} + \frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1+i}{z-1}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{3i}\right)^n + \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+i}{z-1}\right)^{2n} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3i)^{n+1}}(z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1+i)^{2n}\frac{1}{(z-1)^{2(n+1)}}\,. \end{aligned}$$

Ο $\Delta = \left\{z\in\mathbb{C} : \sqrt{2} < |z-1| < 3\right\}$, με $-\frac{1}{2}\in\Delta$, είναι ο μεγαλύτερος δακτύλιος στον οποίο το παραπάνω ανάπτυγμα Laurent της f ισχύει.

Σημείωση. Η f γράφεται και στη μορφή

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1-3i} + \frac{1}{(z-1-i(1+i))\,(z-1+i(1+i))} \\ &= \frac{1}{z-1-3i} + \frac{1}{(z-1+(1-i))\,(z-1-(1-i))} \\ &= \frac{1}{z-1-3i} + \frac{1}{2(1-i)}\cdot\frac{1}{z-1-(1-i)} - \frac{1}{2(1-i)}\cdot\frac{1}{z-1+(1-i)}\,. \end{aligned}$$

■

Θ4. Έστω γ_R, με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$, το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με κέντρο 0 και ακτίνα $R>0$. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{1}{(z^2+1)^3}\,dz = 0\,.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx\,.$$

Λύση. Για κάθε $z\in\gamma_R$ είναι

$$\left|\frac{1}{(z^2+1)^3}\right| = \frac{1}{|z^2+1|^3} \le \frac{1}{(|z|^2-1)^3} = \frac{1}{(R^2-1)^3}\,.$$

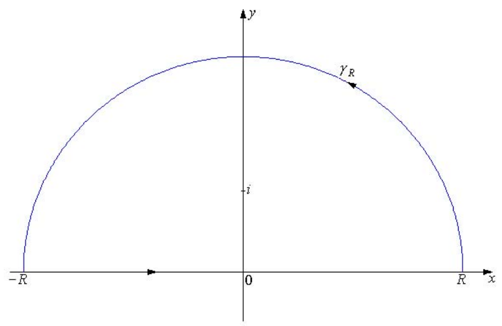
Το μήκος του ημικύκλιου γ_R είναι $R\pi$ και επομένως

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{1}{(z^2+1)^3}\,dz\right| \le \frac{R\pi}{(R^2-1)^3} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,.$$

Άρα,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{1}{(z^2+1)^3}\,dz=0\,.$$

Τα $\pm i$ είναι πόλοι τάξης 3 της $f(z)=1/(z^2+1)^3$. Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελείται από το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου γ_R, με εξίσωση $z(\theta)=Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[-R,R]$. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο έτσι ώστε το ανώμαλο σημείο i της f να βρίσκεται στο εσωτερικό του ημικύκλιου γ_R.



Από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{-R}^{R}\frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx+\int_{\gamma_R}\frac{1}{(z^2+1)^3}\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f,\,i)\,. \tag{2.11}$$

Είναι

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,(f,\,i)&=\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)^3},\,i\right)\\&=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left[(z-i)^3\frac{1}{(z^2+1)^3}\right]''\\&=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z+i)^3}\right]''\\&=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{12}{(z+i)^5}=-\frac{3}{16}i\,.\end{aligned}$$

Επομένως, από την (2.11) προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx=2\pi i\left(-\frac{3}{16}i\right)=\frac{3\pi}{8}\,.$$

Άρα,

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx=\frac{3\pi}{16}\,.$$

■

Επαναληπτική Εξέταση στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

3 Οκτωβρίου, 2008

Θ1. (α΄) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, έχει συνεχείς μερικές παραγώγους (σαν συνάρτηση των x, y) στο ανοικτό σύνολο G. Αν

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

να αποδειχθεί ότι η f είναι αναλυτική στο G αν και μόνο αν $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Αν η f είναι αναλυτική, να αποδειχθεί ότι $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$.

(β΄) Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η συνάρτηση

$$f(z) = z\overline{z} + \frac{z}{\overline{z}}, \quad z \neq 0,$$

είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγος.

Λύση.

(α΄) Αν η f είναι αναλυτική στο G, από γνωστή πρόταση ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann: $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$. Επομένως

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Επειδή ως γνωστόν $f' = \partial f/\partial x$, είναι

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\partial f/\partial \overline{z} = 0 \Leftrightarrow \partial f/\partial x = -i\partial f/\partial y$, δηλαδή ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο G. Επειδή η συνάρτηση f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους (σαν συνάρτηση των x, y), από γνωστή πρόταση η f θα είναι αναλυτική στο G.

(β΄) Στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους (σαν συνάρτηση των x, y). Για να είναι η f παραγωγίσιμη θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann. Δηλαδή

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \Leftrightarrow z - \frac{z}{\overline{z}^2} = 0 \Leftrightarrow \overline{z}^2 = 1 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \pm 1\,.$$

Επομένως, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη μόνο στα σημεία ± 1. Επειδή $f'(z) = \overline{z} + 1/\overline{z}$, είναι $f'(\pm 1) = \pm 2$.

■

Θ2. Έστω $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση, όπου $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ είναι ο μοναδιαίος δίσκος. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+(0,r)} \frac{f(z) - f(-z)}{z^2}\, dz\,,$$

όπου $C^+(0,r)$ είναι ο κύκλος με κέντρο 0, ακτίνα r, $0 < r < 1$ και θετική φορά διαγραφής. Αν

$$d = \sup_{z,w \in D(0,1)} |f(z) - f(w)|$$

είναι η διάμετρος του πεδίου τιμών της f, δείξτε ότι

$$|f'(0)| \leq \frac{d}{2}\,.$$

Λύση. Αν $z \in D(0,1)$, τότε $-z \in D(0,1)$ και επομένως η $g(z) := f(z) - f(-z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$. Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$g'(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+(0,r)} \frac{g(z)}{z^2}\, dz \Leftrightarrow 2f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+(0,r)} \frac{f(z) - f(-z)}{z^2}\, dz\,.$$

Επομένως, για κάθε $r \in (0,1)$ είναι

$$\begin{aligned} |f'(0)| &= \frac{1}{4\pi} \left| \oint_{C^+(0,r)} \frac{f(z) - f(-z)}{z^2}\, dz \right| \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \oint_{C^+(0,r)} \frac{|f(z) - f(-z)|}{|z|^2}\, |dz| \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \frac{d}{r^2} \oint_{C^+(0,r)} |dz| \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{d}{r^2} 2\pi r = \frac{d}{2r}\,. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\left|f'(0)\right| \leq \lim_{r\to 1^-} \frac{d}{2r} = \frac{d}{2}.$$

■

Θ3. Έστω $\frac{z}{e^{2\pi z}-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα κατά Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{z}{e^{2\pi z}-1}$ στο δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Laurent να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \leq -1$.

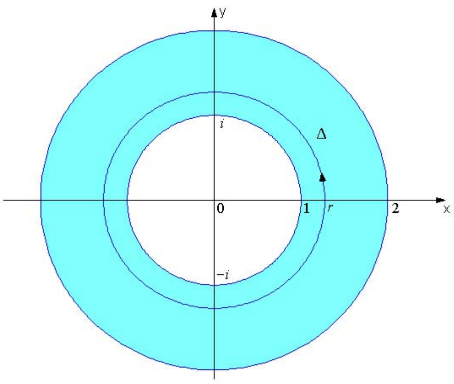
Λύση. Επειδή

$$e^{2\pi z} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2\pi z} = 1 \Leftrightarrow 2\pi z = 2n\pi i \Leftrightarrow z = ni\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

τα $z_n = ni$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, είναι απλοί πόλοι της συνάρτησης $f(z) = \frac{z}{e^{2\pi z}-1}$. Επειδή το 0 είναι απλή ρίζα τόσο του αριθμητή όσο και του παρανομαστή της f, το 0 είναι είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο. Από το θεώρημα του Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,r)} \frac{z/\left(e^{2\pi z}-1\right)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,r)} \frac{z^{-n}}{e^{2\pi z}-1}\,dz\,,$$

όπου ο κύκλος $C^+(0,r)$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $1 < r < 2$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ.



Αν

$$g(z) = \frac{z^{-n}}{e^{2\pi z}-1}\,,$$

τα ανώμαλα σημεία $-i$ και i της g βρίσκοντα στο εσωτερικό του κύκλου $C^+(0,r)$ και είναι απλοί πόλοι. Επειδή για $n \leq -1$, δηλαδή για $-n \geq 1$ το 0 είναι ρίζα του αριθμητή της g

τάξης ≥ 1 και απλή ρίζα του παρανομαστή της g, το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο. Άρα, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,r)} \frac{z^{-n}}{e^{2\pi z}-1}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n}}{e^{2\pi z}-1}, -i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n}}{e^{2\pi z}-1}, i\right) \\
&= \left.\frac{z^{-n}}{(e^{2\pi z}-1)'}\right|_{z=-i} + \left.\frac{z^{-n}}{(e^{2\pi z}-1)'}\right|_{z=i} \\
&= \frac{(-i)^{-n}}{2\pi e^{-2\pi i}} + \frac{i^{-n}}{2\pi e^{2\pi i}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left((-i)^{-n} + i^{-n}\right) \\
&= \begin{cases} (-1)^k/\pi & \text{αν } -n = 2k\ , \\ 0 & \text{αν } -n = 2k+1\ . \end{cases}
\end{aligned}$$

■

Θ4. Θεωρούμε τη λωρίδα

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \Im z < \frac{\pi}{2}\right\}$$

και την ακέραια συνάρτηση $f(z) = \exp(\exp z)$, όπου $\exp z = e^z$. Αν $\partial\Omega$ είναι το σύνορο του Ω, δείξτε ότι $|f(z)| = 1$ για κάθε $z \in \partial\Omega$. Εξετάστε αν ισχύει η *Αρχή Μεγίστου* για τη συνάρτηση f στη λωρίδα Ω. Είναι η $|f|$ φραγμένη στο Ω;

Λύση. Αν $z \in \partial\Omega$, τότε $z = x \pm i\pi/2$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
f(z) &= \exp(\exp(x \pm i\pi/2)) \\
&= \exp\left(e^x e^{\pm i\pi/2}\right) \\
&= \exp(\pm i e^x) = \cos e^x \pm i \sin e^x\ .
\end{aligned}$$

Επομένως, $|f(z)| = 1$ για κάθε $z \in \partial\Omega$.

Έστω τώρα $z = x \in \mathbb{R} \subset \Omega$. Τότε

$$f(z) = f(x) = \exp(\exp x) = e^{e^x}\ .$$

Επειδή $\lim_{x\to\infty}|f(x)| = \lim_{x\to\infty} e^{e^x} = \infty$, η $|f|$ δεν είναι φραγμένη στο Ω και πολύ περισσότερο δεν είναι μικρότερη του 1. Άρα, η *Αρχή Μεγίστου* δεν ισχύει για τη συνάρτηση f στη λωρίδα Ω και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η λωρίδα Ω δεν είναι ένας *φραγμένος τόπος*. ■

2.10 Ακαδημαϊκό έτος 2006–7

ΣΧΟΛΗ ΗΜΜΥ

Κανονική Εξέταση στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

5 Οκτωβρίου, 2007

Θ1. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, με

$$f(z) = \sqrt{\left|z^2 - \overline{z}^2\right|}\,.$$

Να αποδειχθεί ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$. Είναι η f παραγωγίσιμη στο 0; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση. Είναι

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x^2 - x^2|} - 0}{x} = 0$$

και

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{|(iy)^2 - (-iy)^2|} - 0}{y} = 0\,.$$

Επομένως $f_x(0,0) = -if_y(0,0) = 0$, δηλαδή ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Παρατηρούμε ότι το

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x+ix}} \frac{f(z) - f(0)}{z-0} = \frac{2}{1+i} \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

δεν υπάρχει. Άρα, η παράγωγος $f'(0)$ δεν υπάρχει.

Σημείωση. Είναι

$$f(z) = f(x+iy) = \sqrt{|(x+iy)^2 - (x-iy)^2|} = 2\sqrt{|xy|}\,.$$

Δηλαδή $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ με $u(x,y) = 2\sqrt{|xy|}$ και $v(x,y) = 0$. Είναι προφανές ότι $u_x(0,0) = v_y(0,0) = 0$ και $u_y(0,0) = -v_x(0,0) = 0$, δηλαδή ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$. ■

Θ2. Έστω $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, με $\gamma(t) = (1-t)i + t$, το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το i και πέρας το 1. Δείξτε ότι

$$|z^4| \geq \frac{1}{4}\,, \quad \text{για κάθε } z \in \gamma\,.$$

Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι αν

$$I = \int_\gamma \frac{1}{z^4}\, dz\,,$$

τότε $|I| \le 4\sqrt{2}$. Ποιά είναι η τιμή του $|I|$;

Λύση. Για κάθε $z \in \gamma$ είναι

$$|z^4| = (|z|^2)^2 = \left[(1-t)^2 + t^2\right]^2 = (2t^2 - 2t + 1)^2 = 4\left[\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^2 \ge \frac{1}{4}\,.$$

Επειδή το ευθύγραμμο τμήμα γ έχει μήκος $\sqrt{2}$, έχουμε

$$|I| = \left|\int_\gamma \frac{1}{z^4}\, dz\right| \le \int_\gamma \frac{1}{|z^4|}\, |dz| \le 4\sqrt{2}\,.$$

Η $F(z) = -1/3z^3$ είναι αναλυτική συνάρτηση σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα γ και δεν περιέχει το 0, με $F'(z) = 1/z^4$. Από το θεμελιώδες θεώρημα ολοκλήρωσης

$$I = \int_\gamma \frac{1}{z^4}\, dz = \left.\frac{-1}{3z^3}\right|_{z=i}^{z=1} = -\frac{1}{3} + \frac{i}{3}\,.$$

Άρα, $|I| = \sqrt{2}/3$. ∎

Θ3. Διατυπώστε το θεώρημα Liouville. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση u είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$. Αν η u δεν είναι σταθερή, δείξτε ότι η u δεν είναι άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη.

Απόδειξη. Θεώρημα Liouville: *Αν μια ακέραια συνάρτηση f είναι φραγμένη, τότε η f είναι σταθερή.*

Ως γνωστόν, στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C}$ υπάρχει συζυγής αρμονική v της u. Δηλαδή η $f = u + iv$ είναι ακέραια συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $u(x,y) \le M$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Έστω $g(z) := e^{f(z)}$. Η g είναι ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε

$$|g(z)| = |g(x+iy)| = \left|e^{u(x,y)+iv(x,y)}\right| = e^{u(x,y)} \le e^M\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

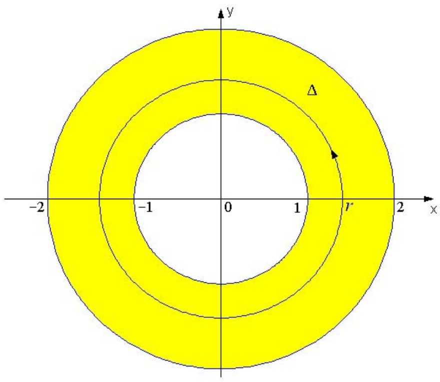
Επειδή η g είναι φραγμένη, από το θεώρημα Liouville η g και κατά συνέπεια η $|g|$ είναι σταθερή. Τότε όμως και η u θα είναι σταθερή, άτοπο. Επομένως, η u δεν είναι άνω φραγμένη. Αν υποθέσουμε τώρα ότι η u είναι κάτω φραγμένη, η $-u$ θα είναι άνω φραγμένη. Τότε από την προηγούμενη απόδειξη προκύπτει ότι η $-u$ είναι σταθερή, δηλαδή ότι η u είναι σταθερή. Άτοπο. Άρα, η u δεν είναι κάτω φραγμένη. □

Θ4. Έστω $\cot \pi z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα κατά Laurent της συνάρτησης $f(z) = \cot \pi z$ στο δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Να υπολογιστούν οι συντελεστές a_{-1} και a_{-2}.

Λύση. Από το θεώρημα του Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+(0,\,r)} \frac{\cot \pi z}{z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+(0,\,r)} \frac{\cos \pi z}{z^{n+1} \sin \pi z}\, dz\,,$$

όπου ο κύκλος $C^+(0,r)$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $1 < r < 2$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ.



(i) $\underline{n = -1}$: Σ' αυτή την περίπτωση τα ανώμαλα σημεία -1, 0 και 1 της $f(z) = \cos \pi z / \sin \pi z$ βρίσκοντα στο εσωτερικό του κύκλου $C^+(0,r)$ και είναι απλοί πόλοι. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+(0,\,r)} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}\, dz \\ &= \operatorname{Res}\left(\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}, 1\right) \\ &= \left.\frac{\cos \pi z}{(\sin \pi z)'}\right|_{z=-1} + \left.\frac{\cos \pi z}{(\sin \pi z)'}\right|_{z=0} + \left.\frac{\cos \pi z}{(\sin \pi z)'}\right|_{z=1} \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{3}{\pi}\,. \end{aligned}$$

(ii) $\underline{n = -2}$: Σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$f(z) = \frac{\cos \pi z}{z^{-1} \sin \pi z} = \frac{z \cos \pi z}{\sin \pi z}$$

και επομένως τα ανώμαλα σημεία -1 και 1 της f βρίσκοντα στο εσωτερικό του κύκλου $C^+(0,r)$ και είναι απλοί πόλοι. Επειδή το 0 είναι απλή ρίζα τόσο του αριθμητή όσο και του παρανομαστή της $f(z) = \frac{z\cos\pi z}{\sin\pi z}$, το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο. Άρα, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} a_{-2} &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,r)} \frac{z\cos\pi z}{\sin\pi z}\,dz \\ &= \operatorname{Res}\left(\frac{z\cos\pi z}{\sin\pi z}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z\cos\pi z}{\sin\pi z}, 1\right) \\ &= \left.\frac{z\cos\pi z}{(\sin\pi z)'}\right|_{z=-1} + \left.\frac{z\cos\pi z}{(\sin\pi z)'}\right|_{z=1} = -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = 0\,. \end{aligned}$$

■

Θ5. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2+1}\,dx\,.$$

Λύση. Επειδή $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$, είναι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty}\arctan x - \arctan 0\right) - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 2x}{x^2+1}\,dx}_{I}\,. \end{aligned}$$

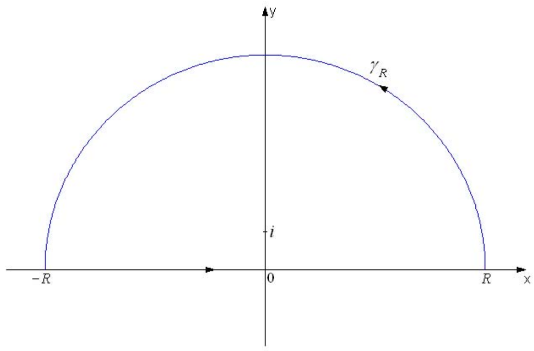
Αν

$$J = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin 2x}{x^2+1}\,dx\,, \quad \text{τότε} \quad I + iJ = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2ix}}{x^2+1}\,dx\,.$$

Ας σημειωθεί ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα I και J συγκλίνουν. Τα σημεία $\pm i$ είναι απλοί πόλοι της $f(z) = \frac{e^{2iz}}{z^2+1}$. Το i βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο και είναι

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{z^2+1}, i\right) = \lim_{z\to i}\left((z-i)\frac{e^{2iz}}{z^2+1}\right) = \lim_{z\to i}\frac{e^{2iz}}{z+i} = \frac{e^{-2}}{2i}\,.$$

Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελείται από το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου γ_R, με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[-R, R]$. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο έτσι ώστε το ανώμαλο σημείο $z = i$ της f να βρίσκεται στο εσωτερικό του ημικύκλιου γ_R.



Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix}}{x^2+1}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{2iz}}{z^2+1}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{z^2+1}, i\right) = \frac{\pi}{e^2}\,. \tag{2.12}$$

Από το λήμμα Jordan είναι

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{2iz}}{z^2+1}\,dz = 0$$

και επομένως από την (2.12) προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+1}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix}}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e^2}\,.$$

Ισοδύναμα,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e^2} \quad \text{και} \quad J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+1}\,dx = 0\,.$$

Άρα,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)\,.$$

■

Επαναληπτική Εξέταση στις Μιγαδικές Συναρτήσεις

5 Νοεμβρίου, 2007

Θ1. Να βρεθεί η ακέραια συνάρτηση $f = u + iv$ με $f(0) = 2$, τέτοια ώστε

$$v(x,y) = e^{x}(x\sin y + \sin y + y\cos y)\,.$$

Να εκφράσετε την f σαν συνάρτηση του $z = x + iy$.

Λύση. Εύκολα διαπιστώνεται ότι $v_{xx} + v_{yy} = 0$, δηλαδή η v είναι αρμονική στο $\mathbb{C}$. Ως γνωστόν, στον απλά συνεκτικό τόπο $\mathbb{C}$ υπάρχει συζυγής αρμονική v της u. Δηλαδή η $f = u + iv$ είναι ακέραια συνάρτηση. Από την εξίσωση Cauchy–Riemann $u_x = v_y$ έχουμε

$$u_x = e^x(x\cos y + 2\cos y - y\sin y)\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} u(x,y) &= (xe^x - e^x)\cos y + e^x(2\cos y - y\sin y) + c(y) \\ &= e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y) + c(y)\,. \end{aligned}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση Cauchy–Riemann $u_y = -v_x$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & e^x(-x\sin y - 2\sin y - y\cos y) + c'(y) = -e^x(x\sin y + 2\sin y + y\cos y) \\ & \Leftrightarrow c'(y) = 0 \Leftrightarrow c(y) = c\,. \end{aligned}$$

Δηλαδή $u(x,y) = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y) + c$ και η ακέραια συνάρτηση

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = e^z(z+1) + c\,,$$

$c \in \mathbb{R}$. Όμως $f(0) = 2$, οπότε $c = 1$. Άρα,

$$f(z) = ze^z + e^z + 1\,.$$

■

Θ2. Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο

$$D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}\,.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$na_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,r)} \frac{f'(z)}{z^n}\,dz\,,$$

όπου $C^+(0,r)$ είναι ο κύκλος με κέντρο 0, ακτίνα r, $0 < r < 1$ και θετική φορά διαγραφής. Αν

$$|f'(z)| \le \frac{1}{1-|z|}\,, \quad |z| < 1\,,$$

χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο τύπο με κατάλληλο r, $0 < r < 1$, να αποδειχθεί ότι

$$|a_n| < e\,, \quad \text{για κάθε } n \geq 1\,.$$

Υπόδειξη. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow e$.

Λύση. Αν $n \geq 1$, από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$f^{(n)}(0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_{C^+(0,\,r)} \frac{f'(z)}{z^n}\, dz$$

και επομένως

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi n i} \oint_{C^+(0,\,r)} \frac{f'(z)}{z^n}\, dz\,,$$

όπου $C^+(0,r)$ είναι ο κύκλος με κέντρο 0, ακτίνα r, $0 < r < 1$ και θετική φορά διαγραφής. Αν $n \geq 1$ και $r = n/(n+1)$, τότε

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{1}{2\pi n} \left| \oint_{C^+(0,\,r)} \frac{f'(z)}{z^n}\, dz \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi n} \oint_{C^+(0,\,r)} \frac{|f'(z)|}{|z|^n}\, |dz| \\
&\leq \frac{1}{2\pi n} \frac{1}{r^n(1-r)} \oint_{C^+(0,\,r)} |dz| && \left(|f'(z)| \leq \tfrac{1}{1-|z|} \overset{|z|=r}{=} \tfrac{1}{1-r}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi n} \frac{1}{r^n(1-r)} 2\pi r \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n && \left(\text{αντικατάσταση } r = \tfrac{n}{n+1}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e\,.
\end{aligned}$$

Σημείωση. Αν πάρουμε το $r = 1 - 1/n$, $n > 1$, τότε παρόμοια αποδεικνύεται ότι $|a_n| < e$, για κάθε $n \geq 1$. ■

Θ3. Διατυπώστε την "Αρχή Μεγίστου" για ένα φραγμένο τόπο του $\mathbb{C}$. Αν η $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ακέραια συνάρτηση, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$M(r) := \max\left\{|f(z)| : |z| = r\right\}\,, \quad r > 0\,,$$

είναι αύξουσα. Αν η f δεν είναι σταθερή, να αποδειχθεί ότι $\lim_{r\to\infty} M(r) = \infty$.

Απόδειξη. Αρχή μεγίστου: *Έστω G ένας φραγμένος τόπος στο $\mathbb{C}$. Αν η συνάρτηση είναι αναλυτική στο G και συνεχής στο σύνορο ∂G του G, τότε η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο ∂G εκτός και αν η f είναι σταθερή.*

Αν $0 < r_1 < r_2$, από την αρχή μεγίστου θα είναι $M(r_1) \leq M(r_2)$ (η ισότητα θα ισχύει αν και μόνο αν η f είναι σταθερή).

Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή. Για να αποδείξουμε ότι $\lim_{r\to\infty} M(r) = \infty$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση M δεν είναι άνω φραγμένη. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι η M είναι άνω φραγμένη, έστω $M(r) \leq C$, για κάθε $r > 0$, τότε

$$|f(z)| \leq C\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

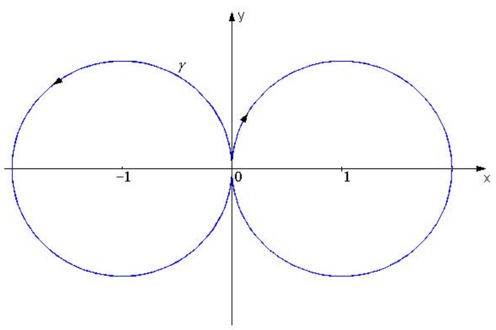
Δηλαδή η f θα είναι φραγμένη. Από το θεώρημα του Liouville η f θα πρέπει να είναι σταθερή, άτοπο. □

Θ4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \left[(z+1)e^{1/(z+1)} + \frac{\cos\pi z + 1}{(z-1)^3}\right] dz\,,$$

όπου $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ η καμπύλη με εξίσωση

$$\gamma(t) = \begin{cases} -1 + e^{12i\pi t} & \text{αν } 0 \leq t < 1/2, \\ 1 + e^{i\pi(1-8t)} & \text{αν } 1/2 \leq t \leq 1\,. \end{cases}$$



Λύση. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη γ περιστρέφεται τρείς φορές, με θετική φορά, γύρω από το σημείο -1 και δύο φορές, με αρνητική φορά, γύρω από το σημείο 1. Δηλαδή ο δείκτης στροφής της γ ως προς τα σημεία -1 και 1 είναι $I(\gamma,-1)=3$ και $I(\gamma,1)=-2$ αντίστοιχα. Επειδή $e^w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}$, για κάθε $w\in\mathbb{C}$, για $w=\frac{1}{z+1}$ παίρνουμε

$$e^{1/(z+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z+1)^n}\,.$$

Το -1 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της $f(z)=(z+1)e^{1/(z+1)}$ και το ανάπτυγμα Laurent της f στο διάτρητο δίσκο $0<|z+1|<\infty$ είναι

$$(z+1)e^{1/(z+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z+1)^{n-1}}=(z+1)+1+\frac{1}{2!(z+1)}+\frac{1}{3!(z+1)^2}+\cdots\,.$$

Επειδή $\operatorname{Res}\big((z+1)\,e^{1/(z+1)},\,-1\big)=a_{-1}=\frac{1}{2!}$, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma(z+1)e^{1/(z+1)}\,dz=I(\gamma,-1)\operatorname{Res}\Big((z+1)e^{1/(z+1)},\,-1\Big)=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\,.$$

Επίσης, από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\cos\pi z+1}{(z-1)^3}\,dz&=\frac{1}{2!}\left[\frac{2!}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\cos\pi z+1}{(z-1)^3}\,dz\right]\\&=\frac{1}{2!}I\left(\gamma,1\right)\left(\cos\pi z+1\right)''\big|_{z=1}\\&=\frac{1}{2!}(-2)(-\pi^2\cos\pi)=-\pi^2\,.\end{aligned}$$

Άρα,

$$I=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma(z+1)e^{1/(z+1)}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\cos\pi z+1}{(z-1)^3}\,dz=\frac{3}{2}-\pi^2\,.$$

<u>*Σημείωση*</u>. Αν $g(z)=\frac{\cos\pi z+1}{(z-1)^3}$, το $z=1$ είναι απλός πόλος της g (είναι ρίζα τάξης τρία του παρανομαστή και ρίζα τάξης δύο του αριθμητή). Επομένως,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{\cos\pi z+1}{(z-1)^3},\,1\right)&=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{\cos\pi z+1}{(z-1)^3}\\&=\lim_{z\to1}\frac{\cos\pi z+1}{(z-1)^2}\\&=\lim_{z\to1}\frac{-\pi\sin\pi z}{2(z-1)}&&\text{(κανόνας L'Hôpital)}\\&=\lim_{z\to1}\frac{-\pi^2\cos\pi z}{2}&&\text{(κανόνας L'Hôpital)}\\&=\frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

και από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\cos \pi z + 1}{(z-1)^3}\,dz = I(\gamma,1)\,\mathrm{Res}\left(\frac{\cos \pi z + 1}{(z-1)^3},\,1\right) = -2\frac{\pi^2}{2} = -\pi^2\,.$$

■

Θ5. Έστω $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα κατά Laurent της αναλυτικής συνάρτησης f στο διάτρητο δίσκο $0 < |z| < R$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$r^2 \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,d\theta \le M\,, \quad \text{για κάθε } r,\ 0 < r < R\,.$$

Να αποδειχθεί ότι $a_n = 0$, για κάθε $n < -1$. Τι είδους μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της συνάρτησης f είναι το 0;

Λύση. Είναι $z(\theta) = re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, η εξίσωση του κύκλου $|z| = r$ με κέντρο 0 ακτίνα r και θετική φορά διαγραφής. Από το θεώρημα του Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} ire^{i\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}}\,d\theta\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{1}{2\pi r^n}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{e^{in\theta}}\,d\theta\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\,d\theta \\
&\le \frac{1}{2\pi r^n}\left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,d\theta\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi} 1^2\,d\theta\right)^{1/2} && \text{(ανισότητα Cauchy–Schwarz)} \\
&\le \sqrt{\frac{M}{2\pi}}\,r^{-(n+1)}\,. && \text{(από την υπόθεση)}
\end{aligned}$$

Άρα αν $n < -1 \Leftrightarrow n+1 < 0$, τότε

$$|a_n| \le \sqrt{\frac{M}{2\pi}}\,r^{-(n+1)} \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0\,, \quad \text{δηλαδή } a_n = 0\,.$$

Αν $a_{-1} \ne 0$, το 0 είναι απλός πόλος της f. Αν $a_{-1} = 0$, τότε το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f. ■

Βιβλιογραφία

[1] D. Alpay, *A Complex Analysis Problem Book*, Springer Basel, 2011.

[2] B. R. Gelbaum, *Problems in Real and Complex Analysis*, Springer–Verlag (Series: Problem Books in Mathematics), 1992.

[3] K. Knopp, *Problem book in the theory of functions*, Dover Publications, Inc., Mincola, New York, 2000.

[4] J. G. Krzyż, *Problems in complex variable theory*, Elsevier, New York, 1971.

[5] E. G. Milewski, *The complex variables problem solver*, Research & Education Association, Piscataway, New Jersey, 1998.

[6] E. Pap, *Complex Analysis through Examples and Exercises*, Springer–Verlag, New York, 1999.

[7] G. Pólya, G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis I (Reprint of the 1978 Edition)*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1998.

[8] G. Pólya, G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis II (Reprint of the 1976 Edition)*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1998.

[9] Γ. Σαραντόπουλος, *Μια Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση με Παραδείγματα και Ασκήσεις*, Ε.Μ. Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2017.

[10] R. Shakarchi, *Problems and solutions for Complex Analysis*, Springer–Verlag, 1999.

[11] P.N. de Souza, J.-N. Silva, *Berkeley problems in mathematics* (3rd. ed.), Springer–Verlag, New York, 2004.

[12] Li Ta-Tsien(Editor), *Problems and Solutions in Mathematics* (Series: Major American Universities PH.D. Qualifying Questions and Solutions–Mathematics), 2nd Edition, World Scientific, 2011.

[13] L.I. Volkovyskii, G.L. Lunts and I.G. Aramanovich, *A collection of problems on complex analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 1991.