ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μια Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση με Παραδείγματα και Ασκήσεις

Γιάννης Σαραντόπουλος

Αθήνα

31 Μαΐου 2018

Περιεχόμενα

Συμβολισμός και Ορολογία **i**

1 Το μιγαδικό επίπεδο **1**

1.1 Αλγεβρικά αποτελέσματα 1

2 Τοπολογία και ανάλυση στο μιγαδικό επίπεδο **13**

2.1 Συνεκτικά Σύνολα 13

3 Αναλυτικές (Ολόμορφες) Συναρτήσεις **17**

3.1 Παράγωγος μιγαδικής συνάρτησης 17

3.2 Αναλυτικές συναρτήσεις και οι εξισώσεις Cauchy–Riemann 18

4 Μιγαδική ολοκλήρωση **39**

4.1 Ολοκλήρωση- Βασικά αποτελέσματα 40

4.2 Θεώρημα Cauchy 49

4.3 Ολοκληρωτικοί τύποι Cauchy 54

4.4 Η Μιγαδική Λογαριθμική Συνάρτηση 76

4.5 Δυναμοσειρές 82

4.6 Ανισότητες Cauchyκαι το θεώρημα Liouville 94

4.7 Ρίζες αναλυτικής συνάρτησης -Θεώρημα ταυτοτισμού- Εφαρμογές 104

4.8 Αρχή Μεγίστου- Αρχή Ελαχίστου- Λήμμα Schwarz 118

5 Σειρές Laurent- Ανώμαλα σημεία- Ολοκληρωτικά υπόλοιπα **137**

5.1 Σειρές Laurent 137

5.2 Ταξινόμηση των μεμονωμένων ανώμαλων σημείων 147

5.3 Λογισμός των ολοκληρωτικών υπολοίπων 159
5.4 Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων 164

6 Υπολογισμός Πραγματικών Ολοκληρωμάτων 177

6.1 Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα 177
6.2 Γενικευμένα Ολοκληρώματα 179
6.3 Ολοκληρώματα Fourier 183
6.4 Ασκήσεις 187
6.5 Παραδείγματα 188
6.6 Ασκήσεις 205

Α΄ Οι συναρτήσεις Γάμμα και Ζήτα 211

Α΄.1 Μερικά βασικά αποτελέσματα της Μιγαδικής Ανάλυσης 211
Α΄.1.1 Αναλυτική επέκταση (ή συνέχιση) 211
Α΄.2 Η συνάρτηση Γ του Euler 213
Α΄.3 Η συνάρτηση ζ του Riemann 216

Συμβολισμός και Ορολογία

- $\mathbb{R}$- το σύνολο των πραγματικών αριθμών
- $\mathbb{R}_+$- το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών
- $\mathbb{Z}$- το σύνολο των ακεραίων
- $\mathbb{N}$- το σύνολο των θετικών ακεραίων
- $\mathbb{Q}$- το σύνολο των ρητών
- Αν $n \in \mathbb{N}$,
  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$,
  $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)\,(2n)$ και
  $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\,(2n+1)$.
- Το **ακέραιο μέρος** του $x \in \mathbb{R}$, συμβολίζεται με $[x]$, είναι ο μοναδικός ακέραιος $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $k \leq x < k+1$.
- $\mathbb{C}$- το μιγαδικό επίπεδο
- $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$- το επεκταμένο μιγαδικό επίπεδο
- $\Re$- πραγματικό μέρος
- $\Im$- φανταστικό μέρος
- $\arg$- όρισμα
- $\overline{z}$- ο συζυγής του z

- $D(z_0, r)$- ανοικτός δίσκος με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$ και ακτίνα $r > 0$ (ο ανοικτός δίσκος $D(z_0, r)$ λέγεται και **περιοχή** του $z_0 \in \mathbb{C}$)
- $\overline{D}(z_0, r)$- κλειστός δίσκος με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$ και ακτίνα $r > 0$
- $D'(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$- διάτρητος δίσκος με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$ και ακτίνα $r > 0$
- $C(z_0, r)$- κύκλος με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$ και ακτίνα $r > 0$
- $C^+(z_0, r)$- κύκλος με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$, ακτίνα $r > 0$ και θετική φορά διαγραφής
- $C^-(z_0, r)$- κύκλος με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$, ακτίνα $r > 0$ και αρνητική φορά διαγραφής

Αν το A είναι υποσύνολο του $\mathbb{C}$, τότε

- το $z_0 \in A$ είναι **εσωτερικό σημείο** του A, αν υπάρχει περιοχή $D(z_0, \delta)$ του z_0 τέτοια ώστε $D(z_0, \delta) \subseteq A$,
- το $z_0 \in \mathbb{C}$ λέγεται **σημείο συσσώρευσης (**$\sigma.\sigma$**)** του A, αν $D(z_0, \varepsilon) \cap (A \setminus \{z_0\}) \neq \emptyset$, για κάθε περιοχή $D(z_0, \varepsilon)$ του z_0.
- Η συνάρτηση f ορισμένη στο $A \subseteq \mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$, είναι **φραγμένη**, αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in A$.
- f'- παράγωγος της f
- $f^{(k)}$- k-παράγωγος της f
- $\exp$- εκθετική συνάρτηση
- $\log$- μιγαδικός λογάριθμος
- Log- κύριος ή πρωτεύον κλάδος λογαρίθμου
- γ- καμπύλη
- γ^*- πεδίο τιμών της καμπύλης
- $\int_\gamma f(z)\, dz$- επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στη καμπύλη γ

- $\oint_{\gamma} f(z)\; dz$- επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στη κλειστή καμπύλη γ
- $\ointctrclockwise_{\gamma} f(z)\; dz$- επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στη κλειστή καμπύλη γ με θετική φορά διαγραφής
- $\ointclockwise_{\gamma} f(z)\; dz$- επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στη κλειστή καμπύλη γ με αρνητική φορά διαγραφής
- $n(\gamma, z_0)$ ή $I(\gamma, z_0)$ ή $\mathrm{Ind}_{\gamma}(z_0)$- δείκτης στροφής της καμπύλης γ ως προς το $z_0 \notin \gamma^*$
- $\mathrm{Res}(f, z_0)$- ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0
- Γ- συνάρτηση γάμμα του Euler
- ζ- συνάρτηση ζήτα του Riemann

Κεφάλαιο 1

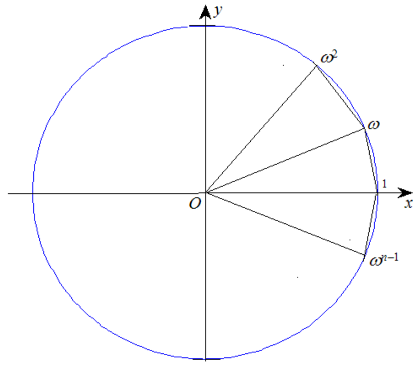
Το μιγαδικό επίπεδο

1.1 Αλγεβρικά αποτελέσματα

Παράδειγμα 1.1. *Ως γνωστόν οι n-οστές ρίζες της μονάδας είναι*

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\,, \textit{όπου}\ \ \omega = e^{\frac{2\pi}{n} i} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\,.$$

Οι n-οστές ρίζες της μονάδας βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ και είναι κο-



ρυφές του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου P_n.

Επειδή $|\omega| = 1$, το μήκος του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου P_n είναι

$$\ell_n = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega^{k+1} - \omega^k| = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega|^k |\omega - 1| = \sum_{k=0}^{n-1} |1-\omega| = n|1-\omega|\,.$$

Όμως

$$|1-\omega|^2 = \left|\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right) - i\sin\frac{2\pi}{n}\right|^2 = 2 - 2\cos\frac{2\pi}{n} = 4\sin^2\frac{\pi}{n}$$

και επομένως

$$\ell_n = 2n \sin \frac{\pi}{n}\,.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ell_n &= \lim_{n\to\infty} 2n \sin \frac{\pi}{n} \\ &= 2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \\ &= 2\pi \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 2\pi\,. \qquad \text{(μήκος του μοναδιαίου κύκλου)}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.2. *Οι ρίζες της εξίσωσης $z^{2n+1} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, δίνονται από τον τύπο*

$$z_k = e^{\pm i \frac{2k\pi}{2n+1}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) \pm i \sin\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n\,,$$

όπου $z_0 = 1$ είναι η πραγματική ρίζα της εξίσωσης. Επομένως,

$$\begin{aligned} z^{2n+1} - 1 &= (z-1) \prod_{k=1}^{n} \left(z - e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right)\left(z - e^{-i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right) \\ &= (z-1) \prod_{k=1}^{n} \left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + 1\right)\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Λύση. *Ως γνωστόν, οι ρίζες της εξίσωσης $z^{2n+1} = 1$ δίνονται από τον τύπο*

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n\,.$$

Όμως για $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ είναι

$$z_{n+k+1} = e^{i\frac{2(n+k+1)\pi}{2n+1}} = e^{i\frac{2(2n+1)\pi}{2n+1}} \cdot e^{-i\frac{2(n-k)\pi}{2n+1}} = e^{i2\pi} \cdot e^{-i\frac{2(n-k)\pi}{2n+1}} = e^{-i\frac{2(n-k)\pi}{2n+1}}\,,$$

δηλαδή

$$z_{n+1} = e^{-i\frac{2n\pi}{2n+1}} = \overline{z_n}\,, \quad z_{n+2} = e^{-i\frac{2(n-1)\pi}{2n+1}} = \overline{z_{n-1}}\,, \ldots, z_{2n} = e^{-i\frac{2\pi}{2n+1}} = \overline{z_1}\,.$$

Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης $z^{2n+1} = 1$ είναι

$$z_k = e^{\pm i \frac{2k\pi}{2n+1}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) \pm i \sin\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n\,.$$

Για την απόδειξη της (1.1) παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left(z - e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right)\left(z - e^{-i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right) &= z^2 - z\left[e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} + e^{-i\frac{2k\pi}{2n+1}}\right] + 1 \\ &= z^2 - 2z\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + 1\,.\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 1.3. *Αν $z_1, z_2, \ldots, z_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι*

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \,. \tag{1.2}$$

Η ισότητα ισχύει στην (1.2) αν και μόνο αν τα $z_1, z_2, \ldots, z_n$ βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα με αρχή την αρχή των αξόνων.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $z_1, z_2, \ldots, z_n$ είναι διάφορα του μηδενός. Είναι $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}, \ldots, z_n = |z_n|e^{i\theta_n}$ για κάποια $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Το άθροισμα $z_1 + z_2 + \cdots + z_n \in \mathbb{C}$. Αν $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0$, η (1.2) προφανώς ισχύει. Έστω $z_1 + z_2 + \cdots + z_n \neq 0$. Τότε

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = |z_1 + z_2 + \cdots + z_n|e^{i\theta} \,, \quad \text{για κάποιο } \theta \in \mathbb{R} \,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| &= e^{-i\theta}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) \\
&= \Re\left\{e^{-i\theta}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)\right\} \\
&= \Re\left\{|z_1|e^{i(\theta_1-\theta)}\right\} + \Re\left\{|z_2|e^{i(\theta_2-\theta)}\right\} + \cdots + \Re\left\{|z_n|e^{i(\theta_n-\theta)}\right\} \\
&= |z_1|\Re e^{i(\theta_1-\theta)} + |z_2|\Re e^{i(\theta_2-\theta)} + \cdots + |z_n|\Re e^{i(\theta_n-\theta)} \\
&\leq |z_1|\left|e^{i(\theta_1-\theta)}\right| + |z_2|\left|e^{i(\theta_2-\theta)}\right| + \cdots + |z_n|\left|e^{i(\theta_n-\theta)}\right| \\
&= |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \,.
\end{aligned}$$

Θα έχουμε ισότητα στην (1.2) αν και μόνο αν

$$\begin{aligned}
&\left\{\Re e^{i(\theta_1-\theta)} = 1, \Re e^{i(\theta_2-\theta)} = 1, \ldots, \Re e^{i(\theta_1-\theta)} = 1\right\} \\
&\quad\Leftrightarrow \{\cos(\theta_1 - \theta) = 1, \cos(\theta_2 - \theta) = 1, \ldots, \cos(\theta_n - \theta) = 1\} \\
&\quad\Leftrightarrow \{\theta_1 = \theta + 2k_1\pi, \theta_2 = \theta + 2k_2\pi, \ldots, \theta_n = \theta + 2k_n\pi\} \,,
\end{aligned}$$

όπου $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$. Άρα η ισότητα ισχύει στην (1.2) αν και μόνο αν τα $z_1, z_2, \ldots, z_n$ βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα με αρχή την αρχή των αξόνων. □

Αν $z_1, z_2, \ldots, z_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, υπάρχει πάντα ένα υποσύνολο S των μιγαδικών αριθμών τέτοιο ώστε $|\sum_{z_k \in S} z_k| \geq c \sum_{k=1}^{n} |z_k|$, όπου c είναι μία σταθερά. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής:

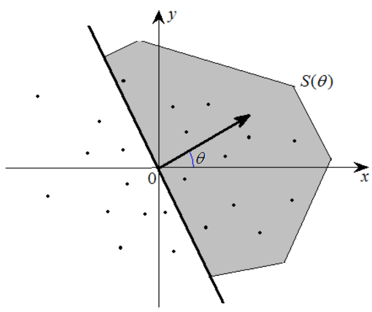
Παράδειγμα 1.4. *Αν $z_1, z_2, \ldots, z_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε υπάρχει υποσύνολο Δ του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$, τέτοιο ώστε*

$$\left| \sum_{k\in\Delta} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} |z_k| \ . \tag{1.3}$$

Απόδειξη. Είναι $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}, z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}, \ldots, z_n = |z_n|e^{i\theta_n}$ για κάποια $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$(υποθέτουμε ότι τα $z_1, z_2, \ldots, z_n$ είναι διάφορα του μηδενός). Για $-\pi \leq \theta \leq \pi$, έστω

$$\Delta(\theta) := \{k \in \{1, 2, \ldots, n\} : \cos(\theta_k - \theta) > 0\} = \left\{k \in \{1, 2, \ldots, n\} : -\frac{\pi}{2} + \theta < \theta_k < \frac{\pi}{2} + \theta \right\} .$$

Το σύνολο $S(\theta) := \{z_k : k \in \Delta(\theta)\}$ αποτελείται από όλα εκείνα τα z_k που βρίσκονται στο ημιεπίπεδο $H(\theta) = \left\{z : \Re z e^{-i\theta} > 0\right\}$ (βλέπε το παρακάτω σχήμα).



Τότε

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k\in\Delta(\theta)} z_k \right| &= \left| \sum_{k\in\Delta(\theta)} e^{-i\theta} z_k \right| \\
&\geq \Re \sum_{k\in\Delta(\theta)} e^{-i\theta} z_k \\
&= \Re \sum_{k\in\Delta(\theta)} |z_k| e^{i(\theta_k - \theta)} \\
&= \sum_{k\in\Delta(\theta)} |z_k| \Re e^{i(\theta_k - \theta)} \\
&= \sum_{k\in\Delta(\theta)} |z_k| \cos(\theta - \theta_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |z_k| \cos^+(\theta - \theta_k) \, ,
\end{aligned}$$

όπου

$$\cos^+(\theta-\theta_k)=\begin{cases}\cos(\theta-\theta_k) & \text{αν } \cos(\theta-\theta_k)>0,\\ 0 & \text{αν } \cos(\theta-\theta_k)\le 0\,.\end{cases}$$

Αν $f(\theta):=\sum_{k=1}^n |z_k|\cos^+(\theta-\theta_k)$, παίρνουμε το $\theta_0\in[-\pi,\pi]$ έτσι ώστε

$$f(\theta_0)=\max_{\theta\in[-\pi,\pi]} f(\theta)=\max_{\theta\in[-\pi,\pi]}\sum_{k=1}^n |z_k|\cos^+(\theta-\theta_k)\,.$$

Το $f(\theta_0)$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο από τη μέση τιμή της f στο διάστημα $[-\pi,\pi]$, δηλαδή

$$f(\theta_0)\ge\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta=\sum_{k=1}^n |z_k|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^+(\theta-\theta_k)\,d\theta\,.$$

Όμως

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^+(\theta-\theta_k)\,d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_k-\pi/2}^{\theta_k+\pi/2}\cos(\theta-\theta_k)\,d\theta\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\,dt \qquad (\text{αντικατάσταση } t=\theta-\theta_k)\\ &=\frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

και επομένως

$$\left|\sum_{k\in\Delta(\theta_0)} z_k\right|\ge f(\theta_0)\ge\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^n |z_k|\,.$$

Άρα η (1.3) ισχύει με $\Delta=\Delta(\theta_0)$. □

Παρατηρήσεις 1.5. 1. *Αποδεικνύεται ότι στην ανισότητα* (1.3) *η σταθερά* $1/\pi$ *είναι βέλτιστη δυνατή, άσκηση 9.*

2. *Η ανισότητα* (1.3) *υπάρχει στο σύγγραμμα των N. BOURBAKI: Topologie générale. 2nd ed., Paris 1955, Ch. 5-8, p. 113. Επίσης παραπέμπουμε στο σύγγραμμα "Real and Complex Analysis" του W. Rudin[32,* 6.3 *Lemma] όπου η ανισότητα* (1.3) *χρησιμοποιείται στα "μιγαδικά μέτρα".*

Δίνουμε στη συνέχεια μια πολύ χρήσιμη πολυωνυμική ανισότητα.

Παράδειγμα 1.6. *Έστω* $p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$, $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n\in\mathbb{C}$, $a_n\neq 0$, *πολυώνυμο βαθμού* n. *Τότε*

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n\le|p(z)|\le\frac{3}{2}|a_n||z|^n\,,\quad \text{για κάθε } |z|\ge R:=\max\left\{1,\ \frac{2}{|a_n|}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right\}.$$

Απόδειξη. Αν $p(z) = a_0$, δηλαδή το πολυώνυμο p είναι σταθερό, τότε η παραπάνω ανισότητα προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο p είναι βαθμού $n \geq 1$. Επειδή $p(z) - a_n z^n = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, για κάθε $|z| \geq R$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|p(z) - a_n z^n| &= |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\
&\leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| + |a_0| \\
&\leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z|^{n-1} + |a_0||z|^{n-1} && (\text{επειδή } |z| \geq 1) \\
&= \left(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|\right)|z|^{n-1} \\
&\leq \frac{|a_n|}{2}|z||z|^{n-1} && (\text{επειδή } \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \leq \frac{|a_n|}{2}|z|) \\
&= \frac{|a_n|}{2}|z|^n .
\end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $|z| \geq R$ είναι

$$|a_n||z|^n - \frac{|a_n|}{2}|z|^n \leq |p(z)| \leq |a_n||z|^n + \frac{|a_n|}{2}|z|^n \Leftrightarrow \frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq \frac{3}{2}|a_n||z|^n .$$

□

Παράδειγμα 1.7. *Όλες οι ρίζες του πολυωνύμου* $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, *βρίσκονται στον ανοικτό δίσκο* $D(0, R)$ *με κέντρο* 0 *και ακτίνα*

$$R = \sqrt{1 + |a_{n-1}|^2 + \cdots + |a_1|^2 + |a_0|^2}\,.$$

Απόδειξη. Έστω z_0 ρίζα του πολυωνύμου $P(z)$ με $|z_0| = r$.

– Αν $|z_0| \leq 1$, τότε προφανώς το $z_0 \in D(0, R)$.

– Υποθέτουμε λοιπόν ότι $|z_0| > 1$. Επειδή $z_0^n = -\left(a_{n-1}z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0\right)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
|z_0|^{2n} &= \left|a_{n-1}z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0\right|^2 \\
&\leq \left(|a_{n-1}|^2 + \cdots + |a_1|^2 + |a_0|^2\right)\left(|z_0|^{2n-2} + \cdots + |z_0|^2 + 1^2\right) \\
&\qquad\qquad (\text{ανισότητα Cauchy–Schwarz}) \\
&= \left(|a_{n-1}|^2 + \cdots + |a_1|^2 + |a_0|^2\right)\frac{|z_0|^{2n} - 1}{|z_0|^2 - 1} \\
&< \left(|a_{n-1}|^2 + \cdots + |a_1|^2 + |a_0|^2\right)\frac{|z_0|^{2n}}{|z_0|^2 - 1} .
\end{aligned}$$

Επομένως

$$1 < \left(|a_{n-1}|^2 + \cdots + |a_1|^2 + |a_0|^2\right) \frac{1}{|z_0|^2 - 1} \Leftrightarrow |z_0| < \sqrt{1 + |a_{n-1}|^2 + \cdots + |a_1|^2 + |a_0|^2}\,.$$

Άρα το $z_0 \in D\,(0, R)$. □

Θεώρημα 1.8 (Θεώρημα Gauss–Lucas). *Αν*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,, \quad a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}\,,\; a_n \neq 0\,,$$

είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n, οι ρίζες της παραγώγου $P'(z)$ ανήκουν στην κυρτή θήκη των ριζών του $P(z)$. Δηλαδή αν $P'(z_0) = 0$ και $z_1, z_2, \ldots, z_k$ είναι οι διαφορετικές ανά δύο ρίζες του $P(z)$, τότε $z_0 \in \operatorname{conv}\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$, όπου

$$\operatorname{conv}\{z_1, z_2, \ldots, z_k\} = \{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \ldots + \lambda_k z_k :\; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0\,, \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1\}\;.$$

Απόδειξη. Είναι

$$P(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_k)^{m_k}\,,$$

όπου m_j είναι η τάξη(πολλαπλότητα) της ρίζας z_j, $j = 1, 2, \ldots, k$. Παραγωγίζοντας έχουμε

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{m_1}{z - z_1} + \frac{m_2}{z - z_2} + \cdots + \frac{m_k}{z - z_k}\,.$$

Αν το z_0 είναι ρίζα του $P'(z)$ καθώς επίσης και του $P(z)$, τότε προφανώς το $z_0 \in \operatorname{conv}\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $P'(z_0) = 0$ με $P(z_0) \neq 0$. Τότε

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m_1}{z_0 - z_1} + \frac{m_2}{z_0 - z_2} + \cdots + \frac{m_k}{z_0 - z_k} \\ &= \frac{m_1\,(\overline{z}_0 - \overline{z}_1)}{|z_0 - z_1|^2} + \frac{m_2\,(\overline{z}_0 - \overline{z}_2)}{|z_0 - z_2|^2} + \cdots + \frac{m_k\,(\overline{z}_0 - \overline{z}_k)}{|z_0 - z_k|^2}\,. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\mu_j = m_j / |z_0 - z_j|^2$, $j = 1, 2, \ldots, k$, από την παραπάνω ταυτότητα έπεται ότι

$$z_0 = \frac{\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \cdots + \mu_k z_k}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k} \in \operatorname{conv}\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}\;.$$

□

Παράδειγμα 1.9. *Ποιος είναι ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος n για τον οποίο όλες οι μη μηδενικές ρίζες τις εξίσωσης*

$$(1+z)^n = 1+z^n$$

βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο $|z|=1$;

Απόδειξη. Το πολυώνυμο

$$p_{n-1}(z) = (1+z)^n - z^n - 1\,,$$

είναι βαθμού $n-1$ με $p'_{n-1}(z) = n\left[(1+z)^{n-1} - z^{n-1}\right]$. Είναι $p'_{n-1}(z)=0$ αν και μόνο αν

$$(1+z)^{n-1} = z^{n-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z}+1\right)^{n-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z_j}+1 = \exp\left(2j\pi i/(n-1)\right)\,, j=1,\dots,n-1\,.$$

Επομένως η

$$z_1 = \frac{1}{\exp\left(2\pi i/(n-1)\right)-1} = \frac{1}{\cos\left(2\pi/(n-1)\right) - 1 + i\cos\left(2\pi/(n-1)\right)}$$

είναι μια μη μηδενική ρίζα του $p'_{n-1}(z)$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \geq 8$ έχουμε

$$|z_1| = \frac{1}{\sqrt{2-2\cos\left(2\pi/(n-1)\right)}} = \frac{1}{2\sin\left(\pi/(n-1)\right)} \geq \frac{1}{2\sin\left(\pi/7\right)} \equiv \frac{1}{0,8678} > 1\,.$$

Υποθέτουμε ότι όλες οι μη μηδενικές και διαφορετικές ανά δύο ρίζες $r_1,\dots,r_k$, $k \leq n-2$, του πολυωνύμου $p_{n-1}(z)$ βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Δηλαδή $|r_1| = \cdots = |r_k| = 1$. Όμως από το Θεώρημα Gauss–Lucas το $z_1 = \lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_k r_k$, όπου $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί με $\lambda_1+\cdots+\lambda_k=1$. Τότε,

$$|z_1| = |\lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_k r_k| \leq \lambda_1|r_1| + \cdots + \lambda_k|r_k| = \lambda_1+\cdots+\lambda_k = 1\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα για $n \geq 8$ δεν βρίσκονται όλες οι μη μηδενικές ρίζες του πολυωνύμου $p_{n-1}(z)$ πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Επειδή για $n=7$ έχουμε

$$p_6(z) = (1+z)^6 - z^6 - 1 = 7z(z+1)(z^2+z+1)^2 = 7z(z+1)\left(z - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(z - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

ο $n=7$ είναι ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος για τον οποίο όλες οι μη μηδενικές ρίζες τις εξίσωσης $(1+z)^n = 1+z^n$ βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο $|z|=1$. □

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

$$(i) \quad \frac{z+1}{z-1} = e^{\pi i/3}\,, \quad (ii) \quad z^2 = -i \quad \text{και} \quad (iii) \quad z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0\,.$$

2. Να λυθεί η εξίσωση

$$z^n + (\overline{z})^n = 0\,.$$

3. Αν $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right) = \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cdot\cos\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\,.$$

4. Αν $\omega = \exp(\pi i/n)$, δείξτε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\cos^n(\pi j/n) &= \sum_{j=0}^{n-1}\omega^{nj}\left(\frac{\omega^j+\omega^{-j}}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{j(2n-2k)} \\ &= \frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0} + n\binom{n}{n}\right] = \frac{n}{2^{n-1}}\,.\end{aligned}$$

5. Έστω $n \in \mathbb{N}^*$.

(α΄) Δείξτε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $z^{2n} = 1$ είναι οι

$$z_k = e^{\pm i\frac{k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \pm i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\,, \quad k = 0,1,2,\ldots,n\,,$$

όπου $z_0 = 1$ και $z_n = -1$ είναι οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης.

(β΄) Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} z^{2n} - 1 &= (z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(z - e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right) \\ &= (z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2 - 2z\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

6. Έστω $n \in \mathbb{N}^*$. Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ δείξτε ότι

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\theta - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\,. \tag{i}$$

Παίρνοντας $\theta \to 0$, δείξτε ότι

$$n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) . \qquad (ii)$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $z = \cos\theta + i\sin\theta$, από την (1.4) προκύπτει ότι

$$z^n - z^{-n} = (z - z^{-1}) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z + z^{-1} - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) .$$

7. Έστω $x > 1$. Δείξτε ότι $1 - 2x\cos t + x^2 > 0$ για κάθε $t \in [0, \pi]$ και θεωρείστε τη συνάρτηση

$$f(t) := \ln(1 - 2x\cos t + x^2) , \quad t \in [0, \pi] ,$$

Αν $n \in \mathbb{N}^*$, χρησιμοποιώντας τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann δείξτε ότι

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos t + x^2)\, dt = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2\pi \ln x . \qquad (\textbf{ολοκλήρωμα Poisson})$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Από την (1.4) έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \ln\left[\frac{x-1}{x+1}(x^{2n} - 1)\right] .$$

8. Αν $n \in \mathbb{N}^*$, να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $z^{2n} - 2z^n \cos n\theta + 1 = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ και να αποδειχθεί ότι

$$z^{2n} - 2z^n \cos n\theta + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left\{ z^2 - 2z\cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1 \right\} .$$

9. Έστω $z_k = e^{2\pi i k/n}$, $k = 1, \ldots, n$, οι n-οστές ρίζες της μονάδας και έστω

$$S(\theta) = \left\{ z_k : -\frac{\pi}{2} + \theta < \theta_k = \arg z_k < \frac{\pi}{2} + \theta \right\} .$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{z_k \in S(\theta)} z_k\right|}{\sum_{k=1}^n |z_k|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{z_k \in S(\theta)} z_k \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\pi}{n/2} \sum_{z_k \in S(\theta)} z_k \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\theta-\pi/2}^{\theta+\pi/2} e^{i\varphi}\, d\varphi \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} 2 = \frac{1}{\pi} . \end{aligned}$$

10. Έστω S_n το σύνολο των πολυωνύμων της μορφής

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + 1\,, \quad \text{με } a_k \in \mathbb{C},\ k = 1, \ldots, n-1\,.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$M_n = \min_{p \in S_n} \left(\max_{|z|=1} |p(z)| \right) = 2\,.$$

Κεφάλαιο 2

Τοπολογία και ανάλυση στο μιγαδικό επίπεδο

2.1 Συνεκτικά Σύνολα

Ορισμός 2.1. *Ένα σύνολο $E \subseteq \mathbb{C}$ είναι* **μη συνεκτικό** *αν υπάρχουν ανοικτά σύνολα O_1 και O_2 στο $\mathbb{C}$ τέτοια ώστε*

$$(i) \quad E \subseteq O_1 \cup O_2 \Leftrightarrow E = (E \cap O_1) \cup (E \cap O_2)\,,$$

$$(ii) \quad E \cap O_1 \neq \emptyset \text{ και } E \cap O_2 \neq \emptyset$$

και

$$(iii) \quad (E \cap O_1) \cap (E \cap O_2) = \emptyset, \text{ δηλαδή } E \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset\,.$$

Σημειώνεται ότι τα σύνολα $E \cap O_1$ και $E \cap O_2$ είναι ανοικτά στο E(ανοικτά σχετικά με το E). Επομένως, **το σύνολο $\mathbf{E} \subseteq \mathbb{C}$ είναι συνεκτικό αν δεν είναι ένωση δύο μη κενών και ξένων μεταξύ τους ανοικτών συνόλων στο $\mathbf{E}$**. Η συνεκτικότητα ενός συνόλου $E \subseteq \mathbb{C}$ συχνά χρησιμοποιείται ως εξής: Υποθέτουμε ότι έχουμε κατασκευάσει δύο συμπληρωματικά ανοικτά σύνολα $E \cap O_1$ και $E \cap O_2$ στο E. Τότε αν το E είναι συνεκτικό, συμπεραίνουμε ότι είτε το $E \cap O_1$ είναι το κενό σύνολο ή το $E \cap O_2$ είναι το κενό σύνολο.

Προφανή παραδείγματα συνεκτικών συνόλων είναι το κενό σύνολο και όλα τα μονοσύνολα.

Θα δώσουμε τώρα μερικούς ισοδύναμους χαρακτηρισμούς για τη μη συνεκτικότητα καθώς επίσης και για τη συνεκτικότητα ενός υποσυνόλου του $\mathbb{C}$.

Θεώρημα 2.2. *Έστω $E \subseteq \mathbb{C}$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(i) Το E είναι μη συνεκτικό.

(ii) Υπάρχουν δύο μη κενά σύνολα $A, B \subseteq E$ τέτοια ώστε

$$E = A \cup B \quad \textit{και} \quad \overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}\,. \tag{2.1}$$

(iii) Υπάρχουν δύο μη κενά ξένα μεταξύ τους σύνολα $A, B \subseteq E$ και τα δύο ανοικτά στο E τέτοια ώστε $E = A \cup B$.

(iv) Υπάρχουν δύο μη κενά ξένα μεταξύ τους σύνολα $A, B \subseteq E$ και τα δύο κλειστά στο E τέτοια ώστε $E = A \cup B$.

(v) Υπάρχει υποσύνολο A του E με $A \neq \emptyset, E$ το οποίο είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό στο E.

Απόδειξη. $\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$ Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα O_1 και O_2 στο $\mathbb{C}$ τέτοια ώστε $E = (E \cap O_1) \cup (E \cap O_2)$ με $E \cap O_1 \neq \emptyset$, $E \cap O_2 \neq \emptyset$ και $E \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Έστω $A := E \cap O_1$ και $B := E \cap O_2$. Τότε $A, B \neq \emptyset$ και $E = A \cup B$. Μένει να δείξουμε ότι $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$. Πράγματι, επειδή $A \subseteq \mathbb{C} \setminus O_2$, $B \subseteq \mathbb{C} \setminus O_1$ και τα σύνολα $\mathbb{C} \setminus O_2$, $\mathbb{C} \setminus O_1$ είναι κλειστά στο $\mathbb{C}$, έχουμε ότι

$$\overline{A} \subseteq \overline{(\mathbb{C} \setminus O_2)} = \mathbb{C} \setminus O_2 \quad \text{και} \quad \overline{B} \subseteq \overline{(\mathbb{C} \setminus O_1)} = \mathbb{C} \setminus O_1\,.$$

Επομένως $\overline{A} \cap O_2 = \emptyset = O_1 \cap \overline{B}$ και άρα $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$.

$\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$ Αν $O_1 := \mathbb{C} \setminus \overline{A}$, $O_2 := \mathbb{C} \setminus \overline{B}$, τότε τα σύνολα O_1, O_2 είναι ανοικτά στο $\mathbb{C}$ και είναι $A \subseteq O_2$, $B \subseteq O_1$. Επομένως,

$$E \subseteq O_1 \cup O_2\,, \quad E \cap O_1 \neq \emptyset\,, \quad E \cap O_2 \neq \emptyset\,, \quad E \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset\,.$$

$\underline{(i) \Leftrightarrow (iii)}$ Είναι προφανές.

$\underline{(iii) \Leftrightarrow (iv)}$ Είναι προφανές.

$\underline{(iv) \Rightarrow (v)}$ Επειδή $A = E \setminus B$ και το B είναι κλειστό στο E, το A θα είναι ανοικτό στο E. Επομένως το υποσύνολο A του E με $A \neq \emptyset, E$ είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό στο E.

$\underline{(v) \Rightarrow (iv)}$ Υποθέτουμε ότι το υποσύνολο A του E με $A \neq \emptyset, E$ είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό στο E. Τότε το $B = E \setminus A$ είναι κλειστό στο E. Επομένως τα σύνολα $A, B \subseteq E$ είναι μη κενά, κλειστά στο E και τέτοια ώστε $E = A \cup B$. □

Αν το σύνολο $E \subseteq \mathbb{C}$ είναι ανοικτό, τότε ένα υποσύνολο του E είναι ανοικτό στο E αν και μόνο αν είναι ανοικτό στο $\mathbb{C}$. Παρόμοια, αν το σύνολο $E \subseteq \mathbb{C}$ είναι κλειστό, τότε ένα υποσύνολο του E είναι κλειστό στο E αν και μόνο αν είναι κλειστό στο $\mathbb{C}$. Επομένως, από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι:
Ένα ανοικτό σύνολο είναι συνεκτικό αν δεν είναι ένωση δύο μη κενών και ξένων μεταξύ τους ανοικτών συνόλων. Ένα κλειστό σύνολο είναι συνεκτικό αν δεν είναι ένωση δύο μη κενών και ξένων μεταξύ τους κλειστών συνόλων.

Πρόταση 2.3. *Έστω $G \subseteq \mathbb{C}$ ένα μη κενό ανοικτό σύνολο. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία (K_n) συμπαγών υποσυνόλων του G, δηλαδή $K_n \subseteq K_{n+1}$, τέτοια ώστε $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.*

Απόδειξη. – Έστω $G = \mathbb{C}$. Αν $K_n := \overline{D(0,n)}$, τότε (K_n) είναι αύξουσα ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{C}$ με $\mathbb{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.
– Έστω ότι το G είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Αν

$$F_n := \left\{ z \in G : |z - w| \geq \frac{1}{n}, \quad \text{για κάθε } w \in \mathbb{C} \setminus G \right\}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

τότε προφανώς $F_n \subseteq F_{n+1}$. Για να δείξουμε ότι η (F_n) είναι αύξουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του G, αρκεί να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε συγκλίνουσα ακολουθία (z_k) σημείων του F_n με $\lim_{k\to\infty} z_k = z_0$, το $z_0 \in F_n$. Πράγματι, επειδή για κάθε $w \in \mathbb{C} \setminus G$ είναι $|z_k - w| \geq \frac{1}{n}$ και $\lim_{k\to\infty} |z_k - w| = |z_0 - w|$, έπεται ότι $|z_0 - w| \geq \frac{1}{n}$ και κατά συνέπεια το $z_0 \notin \mathbb{C} \setminus G$. Δηλαδή το $z_0 \in G$ και επομένως $z_0 \in F_n$.
Ορίζουμε τώρα την ακολουθία συνόλων K_n με

$$K_n := F_n \cap \overline{D(0,n)}.$$

Τα K_n είναι φραγμένα υποσύνολα του G. Επίσης τα K_n είναι κλειστά επειδή είναι τομή κλειστών συνόλων. Επομένως τα K_n είναι συμπαγή υποσύνολα του G και προφανώς $K_n \subseteq K_{n+1}$.

Μένει να δείξουμε ότι $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Επειδή $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subseteq G$, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $z \in G$ ανήκει σε ένα τουλάχιστον K_n. Επειδή το $z \in G$ και το G είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει ανοικτός δίσκος $D(z,r) \subseteq G$. Τότε $|z-w| \geq r$, για κάθε $w \in \mathbb{C} \setminus G$. Παίρνουμε $n \in \mathbb{N}^*$ με $\frac{1}{n} < r$ και $|z| < n$. Τότε $z \in F_n$ και $z \in \overline{D(0,n)}$. Δηλαδή $z \in K_n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$ και επομένως $z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. □

Ασκήσεις

1. Το *σύνορο* του συνόλου $A \subseteq \mathbb{C}$, συμβολίζεται με ∂A, είναι το σύνολο

$$\partial A = \{z \in \mathbb{C} : \text{ για κάθε } r > 0,\ D(z,r) \cap A \neq \emptyset \text{ και } D(z,r) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset\} \ .$$

Να αποδειχθεί ότι $z \in \partial A$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (a_n) σημείων του A και ακολουθία (b_n) σημείων του $\mathbb{C} \setminus A$ με $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = z$.

2. Έστω D_1 και D_2 δύο τόποι(ανοικτά και συνεκτικά σύνολα) του $\mathbb{C}$. Αν $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, με κατάλληλο αντιπαράδειγμα δείξτε ότι το $D_1 \cap D_2$ δεν είναι κατανάγκη ένας τόπος του $\mathbb{C}$.

Κεφάλαιο 3

Αναλυτικές (Ολόμορφες) Συναρτήσεις

3.1 Παράγωγος μιγαδικής συνάρτησης

Ορισμός 3.1. *Έστω $f : U \to \mathbb{C}$ μιγαδική συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ και έστω z_0 σημείο του U. Θα λέμε ότι η f είναι* **παραγωγίσιμη στο** *z_0, αν το όριο*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lambda$$

υπάρχει. Αυτό το μοναδικό όριο $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι η **παράγωγος της** *f* **στο** *z_0 και συμβολίζεται με $f'(z_0)$.*

Για αρκετά μικρό $h \in \mathbb{C}$, το $z_0 + h \in U$ και ο ορισμός της παραγώγου της f στο z_0 διατυπώνεται και ως εξής

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} .$$

Στον ορισμό της παραγώγου της f στο σημείο z_0 το $z \to z_0$(αντίστοιχα, το $h \to 0$) με αυθαίρετο τρόπο και όχι με την επιλογή ειδικών διευθύνσεων.

Παράδειγμα 3.2 (Μια μη παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{C}$). *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ με $f(z) = f(x + iy) = \Re z = x$. Αν $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$*

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{\Re(z+h) - \Re z}{h} \\ &= \frac{\Re h}{h} = \begin{cases} 1 & \text{αν } h \in \mathbb{R}\ , \\ 0 & \text{αν } h = ik,\ k \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

και επομένως το όριο $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ *δεν υπάρχει. Άρα η συνάρτηση* $f(z) = \Re z = x$ *δεν είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{C}$.

Σημείωση. Ως γνωστόν η πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = x$ *είναι παραγωγίσιμη για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *και η παράγωγος* $f'(x) = 1$.

Παράδειγμα 3.3 (Συνάρτηση παραγωγίσιμη μόνο σ' ένα σημείο του $\mathbb{C}$). *Έστω η συνάρτηση* $g : \mathbb{C} \to [0, \infty)$ *με* $g(z) = |z|^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2$. *Αν* $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$, *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{g(z+h)-g(z)}{h} = \frac{|z+h|^2 - |z|^2}{h}$$
$$= \frac{z\overline{h} + \overline{z}h + |h|^2}{h} = \begin{cases} z + \overline{z} + h = 2x + h & \text{αν } h \in \mathbb{R}\,, \\ -z + \overline{z} - ik = -2iy - ik & \text{αν } h = ik,\, k \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Επομένως αν $z \neq 0$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{g(z+h)-g(z)}{h} = 2x \neq -2iy = \lim_{\substack{h\to 0\\ h=ik}} \frac{g(z+h)-g(z)}{h}\,,$$

δηλαδή η παράγωγος $g'(z)$ *δεν υπάρχει. Επειδή*

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^2}{h} = \lim_{h\to 0} \overline{h} = 0\,,$$

η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0 *με* $f'(0) = 0$.

3.2 Αναλυτικές συναρτήσεις και οι εξισώσεις Cauchy–Riemann

Ορισμός 3.4. *Έστω* $f : U \to \mathbb{C}$ *μιγαδική συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό σύνολο* $U \subseteq \mathbb{C}$. *Θα λέμε ότι η* f *είναι* **αναλυτική (ή ολόμορφη) στο σημείο** $z_0 \in U$, *αν και μόνο αν υπάρχει* $r > 0$ *τέτοιο ώστε η* f *να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του ανοικτού δίσκου* $D(z_0, r) \subseteq U$.
Αν η συνάρτηση f *είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του* U, *λέμε ότι η* f *είναι* **αναλυτική (ή ολόμορφη) στο** U.
Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του* $\mathbb{C}$, *λέμε ότι η* f *είναι* **ακέραια**.

Η κλάση όλων των αναλυτικών(ολόμορφων) συναρτήσεων στο U συμβολίζεται με $H(U)$. Αν $f \in H(U)$ και $g \in H(U)$, τότε η $f + g \in H(U)$ και η $fg \in H(U)$. Επομένως $(H(U), +, \cdot)$ είναι ένας δακτύλιος.

Παρατήρηση 3.5. *Μια συνάρτηση f είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του ανοικτού συνόλου U, αν και μόνο αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του U(αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κάθε σημείο στο U είναι το κέντρο ενός ανοικτού δίσκου που βρίσκεται στο U).*

Έστω $f : U \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, μιγαδική συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$. Η αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση

$$\varphi : \underset{(x,y)}{\mathbb{R}^2} \underset{\mapsto}{\longrightarrow} \underset{z=x+iy}{\mathbb{C}}$$

μας επιτρέπει να ταυτίσουμε το U με ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Είναι

$$f(z) = f(x+iy) = f(\varphi(x,y)) = (f \circ \varphi)(x,y)\,.$$

Επομένως αν $\tilde{f}(x,y) := (f \circ \varphi)(x,y)$, η μιγαδική συνάρτηση f ταυτίζεται με τη συνάρτηση $\tilde{f}$ των πραγματικών μεταβλητών x και y. Στο εξής όταν θεωρούμε τη μιγαδική συνάρτηση f σαν συνάρτηση των πραγματικών μεταβλητών x και y, θα γράφουμε $f(x,y)$ αντί για $\tilde{f}(x,y)$.

Έστω $z_0 = x_0 + iy_0$ σημείο του U. Θεωρούμε την f σαν συνάρτηση των x και y και υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν στο σημείο (x_0,y_0)(ισοδύναμα, οι μερικές παράγωγοι των u και v υπάρχουν στο (x_0,y_0)). Τότε,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\\
&\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\\
&\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\\
&\Leftrightarrow \left\{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right\}\,.
\end{aligned}$$

Ορισμός 3.6 (Εξισώσεις(συνθήκες) Cauchy–Riemann). *Έστω $f : U \to \mathbb{C}$ μιγαδική συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $z_0 = x_0 + iy_0$ σημείο του U. Αν οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν στο σημείο (x_0,y_0), δηλαδή οι μερικές παράγωγοι των u και v υπάρχουν στο (x_0,y_0), τότε οι εξισώσεις*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \textit{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\,,$$

είναι γνωστές σαν **εξισώσεις(συνθήκες) Cauchy–Riemann**. *Οι εξισώσεις Cauchy-Riemann είναι ισοδύναμες με τη μιγαδική εξίσωση*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,. \tag{3.1}$$

Πρόταση 3.7. *Έστω η μιγαδική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $z_0 = x_0 + iy_0$ σημείο του U. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0, τότε οι μερικές παράγωγοι $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν(θεωρούμε την f σαν συνάρτηση των x και y) και είναι $f_x(x_0, y_0) = -if_y(x_0, y_0)$. Ισοδύναμα, οι μερικές παράγωγοι $u_x(x_0, y_0)$, $v_x(x_0, y_0)$, $u_y(x_0, y_0)$, $v_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν και ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad \textit{και} \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)\,.$$

Επίσης, η παράγωγος $f'(z_0)$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= f_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\ &\textit{ή} \\ f'(z_0) &= -if_y(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)\,. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση η παράγωγος

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

υπάρχει.

(i) Αν $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ με $z_0 + h \in U$, τότε το $z_0 + h = x_0 + iy_0 + h = (x_0 + h) + iy_0$ ταυτίζεται με το σημείο $(x_0 + h, y_0) \in U$ και επομένως

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0)\,.$$

(ii) Αν $h = ik$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ με $z_0 + h \in U$, τότε το $z_0 + h = x_0 + iy_0 + ik = x_0 + i(y_0 + k)$ ταυτίζεται με το σημείο $(x_0, y_0 + k) \in U$ και επομένως

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h = ik, k \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{\substack{k \to 0 \\ k \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{ik} \\ &= -i \lim_{\substack{k \to 0 \\ k \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = -if_y(x_0, y_0)\,. \end{aligned}$$

Άρα, οι μερικές παράγωγοι $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν και η παράγωγος $f'(z_0) = f_x(x_0, y_0) = -i f_y(x_0, y_0)$. □

Το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης γενικά δεν ισχύει. Δηλαδή είναι δυνατόν για μια μιγαδική συνάρτηση $f = u + iv$ να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann σ' ένα σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$ και η f να μην είναι παραγωγίσιμη στο σημείο z_0.

Παράδειγμα 3.8. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με*

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \frac{(x^3+y^3)+i(y^3-x^3)}{x^2+y^2} & \textit{αν } z \neq 0, \\ 0 & \textit{αν } z = 0\,. \end{cases}$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο σημείο $(0,0)$.

<u>1ος τρόπος</u>. Είναι $f = u + iv$ με

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \textit{αν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \textit{και} \quad v(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-x^3}{x^2+y^2} & \textit{αν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{αν } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Για $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, είναι

$$\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0} = \frac{x^3/x^2}{x} = 1$$

και επομένως

$$u_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0} = 1\,.$$

Για $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, είναι

$$\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y-0} = \frac{y^3/y^2}{y} = 1$$

και επομένως

$$v_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{v(0,y)-v(0,0)}{y-0} = 1\,.$$

Δηλαδή $u_x(0,0) = v_y(0,0) = 1$. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι $u_y(0,0) = -v_x(0,0) = 1$. Άρα, ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο σημείο $(0,0)$.

<u>2ος τρόπος</u>. Θεωρούμε την f σαν συνάρτηση των x και y. Για $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, είναι

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{(x^3 - ix^3)/x^2}{x} = 1 - i$$

και επομένως

$$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 1 - i\,.$$

Παρόμοια, για $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, είναι

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \frac{(y^3+iy^3)/y^2}{y} = 1+i$$

και επομένως

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 1+i\,.$$

Άρα $f_x(0,0) = -if_y(0,0) = 1-i$, δηλαδή ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο σημείο $(0,0)$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Παρατηρούμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, είναι

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{f(z)}{z} = \frac{(x^3+y^3)+i(y^3-x^3)}{(x^2+y^2)(x+iy)}\,.$$

Αν $y = \lambda x$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \neq 0$, τότε

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{(x^3+\lambda^3x^3)+i(\lambda^3x^3-x^3)}{(x^2+\lambda^2x^2)(x+i\lambda x)} = \frac{(1+\lambda^3)+i(\lambda^3-1)}{(1+\lambda^2)(1+i\lambda)}$$

και επομένως το όριο

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x+i\lambda x}} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+\lambda^3)+i(\lambda^3-1)}{(1+\lambda^2)(1+i\lambda)} = \frac{(1+\lambda^3)+i(\lambda^3-1)}{(1+\lambda^2)(1+i\lambda)} \qquad (*)$$

εξαρτάται από το λ. Άρα, η παράγωγος $f'(0)$ δεν υπάρχει.

Σημείωση. Αν πάρουμε $\lambda = 0$ στην $(*)$, τότε

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x}} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = 1-i\,.$$

Όμως για $\lambda = 1$ από την $(*)$ έχουμε

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x+ix}} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{2}{2(1+i)} = \frac{1-i}{2} \neq 1-i\,.$$

Έστω $f : U \to \mathbb{C}$, $f = u+iv$, μιγαδική συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $z_0 = x_0+iy_0$ σημείο του U. Θα αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο z_0, αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο (x_0,y_0) και η f, σαν συνάρτηση των x και y, είναι *διαφορίσιμη* στο σημείο (x_0,y_0)[ισοδύναμα, οι u και v είναι *διαφορίσιμες* στο (x_0,y_0)]. Θα χρειστούμε μερικά αποτελέσματα σχετικά με τη διαφορισιμότητα συναρτήσεων δύο πραγματικών μεταβλητών τα οποία υπάρχουν στα περισσότερα συγγράμματα "*Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών*", παραπέμπουμε στο [20].

Διαφορισιμότητα συναρτήσεων δύο πραγματικών μεταβλητών

Ορισμός 3.9 (Διαφορικό συνάρτησης δύο μεταβλητών). *Έστω η συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ ορισμένη στο ανοικτό σύνολο U και έστω (x_0, y_0) σημείο του U. Λέμε ότι η f είναι* **διαφορίσιμη στο** (x_0, y_0)*, αν υπάρχει $\mathbb{R}$-γραμμική συνάρτηση $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{|f(x_0+\xi, y_0+\eta) - f(x_0, y_0) - L(\xi, \eta)|}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = 0\,. \tag{3.2}$$

Η γραμμική συνάρτηση L είναι το **διαφορικό της** f **στο** (x_0, y_0) *και συμβολίζεται με $Df(x_0, y_0)$(σε μερικά συγγράμματα συμβολίζεται με $df(x_0, y_0)$).*
Η f είναι **διαφορίσιμη στο** *U, αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του U.*

Επειδή το διαφορικό της f στο (x_0, y_0) είναι μια $\mathbb{R}$-γραμμική συνάρτηση, η $L = Df(x_0, y_0)$ είναι της μορφής

$$L(\xi, \eta) = Df(x_0, y_0)(\xi, \eta) = \lambda\xi + \mu\eta\,, \quad \text{για κάποια } \lambda, \mu \in \mathbb{C}\,. \tag{3.3}$$

Πρόταση 3.10. *Έστω η συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο (x_0, y_0) του ανοικτού συνόλου U. Τότε οι μερικές παράγωγοι $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν και το διαφορικό της συνάρτησης f στο σημείο (x_0, y_0) δίνεται από τον τύπο*

$$L(\xi, \eta) = Df(x_0, y_0)(\xi, \eta) = f_x(x_0, y_0)\xi + f_y(x_0, y_0)\eta\,.$$

Ειδικά, η $\mathbb{R}$-γραμμική συνάρτηση L που ικανοποιεί τη συνθήκη (3.2) *είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Για $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$ και $\eta = 0$, από την (3.2) έχουμε

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{|f(x_0+\xi, y_0) - f(x_0, y_0) - L(\xi, 0)|}{\sqrt{\xi^2}} = 0\,.$$

Από την (3.3) είναι $L(\xi, 0) = \lambda\xi$ και κατά συνέπεια

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{|f(x_0+\xi, y_0) - f(x_0, y_0) - \lambda\xi|}{|\xi|} = 0\,.$$

Ισοδύναμα,

$$\lim_{\xi\to 0} \left| \frac{f(x_0+\xi, y_0) - f(x_0, y_0)}{\xi} - \lambda \right| = 0$$

και επομένως

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{f(x_0+\xi, y_0) - f(x_0, y_0)}{\xi} = \lambda\,.$$

Άρα, η μερική παράγωγος $f_x(x_0, y_0)$ υπάρχει και ισούται με λ. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι η μερική παράγωγος $f_y(x_0, y_0)$ υπάρχει και ισούται με μ. Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι αν η f είναι διαφορίσιμη στο (x_0, y_0), τότε οι μερικές παράγωγοι $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν και το διαφορικό της συνάρτησης f στο σημείο (x_0, y_0) δίνεται από τον τύπο

$$L(\xi, \eta) = Df(x_0, y_0)(\xi, \eta) = f_x(x_0, y_0)\xi + f_y(x_0, y_0)\eta\,.$$

□

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο (x_0, y_0) του ανοικτού συνόλου U. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ με

$$\varepsilon(\xi, \eta) := \frac{f(x_0+\xi, y_0+\eta) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0)(\xi, \eta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\,.$$

Από την (3.2) έχουμε ότι $\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \varepsilon(\xi, \eta) = 0$. Επίσης από τον ορισμό της συνάρτησης ε και από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι

$$f(x_0+\xi, y_0+\eta) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\xi + f_y(x_0, y_0)\eta + \varepsilon(\xi, \eta)\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,, \tag{3.4}$$

όπου $\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \varepsilon(\xi, \eta) = 0$.

Έστω η συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ και έστω (x_0, y_0) σημείο του ανοικτού συνόλου U. Αν οι μερικές παράγωγοι $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν, τότε το διαφορικό της συνάρτησης f στο σημείο (x_0, y_0) μπορεί να μην υπάρχει.

Παράδειγμα 3.11. *Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Είναι

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

και παρόμοια $f_y(0,0) = 0$. Δηλαδή οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν στο $(0,0)$.

Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$, λόγω της (3.4) *πρέπει να ισχύει*

$$f(\xi,\eta)-f(0,0)=f_x(0,0)\xi+f_y(0,0)\eta+\varepsilon(\xi,\eta)\sqrt{\xi^2+\eta^2}=\varepsilon(\xi,\eta)\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,,$$

με $\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)}\varepsilon(\xi,\eta)=0$. *Επομένως για κάθε* $(\xi,\eta)\neq(0,0)$ *θα είναι*

$$\frac{\xi\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}=\varepsilon(\xi,\eta)\sqrt{\xi^2+\eta^2}\Leftrightarrow\varepsilon(\xi,\eta)=\frac{\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}\,.$$

Όμως για $\eta=\xi\neq 0$ *έχουμε*

$$\varepsilon(\xi,\xi)=\frac{\xi^2}{\xi^2+\xi^2}=\frac{1}{2}\xrightarrow[\xi\to 0]{}\frac{1}{2}\neq 0\,.$$

Άτοπο, επειδή το όριο $\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)}\varepsilon(\xi,\eta)$ *πρέπει να ισούται με το μηδέν. Άρα, η f δεν είναι διαφορίσιμη στο* $(0,0)$.

Σ' αυτό το παράδειγμα οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y δεν είναι συνεχείς στο $(0,0)$. Πράγματι, αν $(x,y)\neq(0,0)$, τότε

$$f_x(x,y)=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-2x(xy)/2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,.$$

Ειδικά για $y=\lambda x$ με $\lambda\in\mathbb{R}$ και $x\neq 0$ έχουμε

$$f_x(x,\lambda x)=\frac{\lambda x}{|x|\sqrt{1+\lambda^2}}-\frac{\lambda x^3}{|x|^3(1+\lambda^2)^{3/2}}$$

και αυτό το όριο δεν υπάρχει καθώς το $x\to 0$(εξαρτάται από το λ). Επομένως, η f_x δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ και παρόμοια η f_y δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Συνήθως είναι εύκολο να δούμε πότε οι μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης υπάρχουν. Όμως, φαίνεται πιο δύσκολο να επαληθεύσουμε τη συνθήκη (3.2), δηλαδή να εξετάσουμε τη διαφορισιμότητα της συνάρτησης. Στο επόμενο θεώρημα δίνουμε ένα απλό κριτήριο που μας λέει πότε μια συνάρτηση είναι διαφορίσιμη.

Θεώρημα 3.12. *Έστω η συνάρτηση $f:U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$, όπου U ανοικτό σύνολο. Υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y υπάρχουν και είναι συνεχείς σε μια περιοχή του σημείου $(x_0,y_0)\in U$. Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο (x_0,y_0).*

Απόδειξη. Αν $f = u + iv$, όπου $u, v : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, από την υπόθεση οι μερικές παράγωγοι u_x, v_x, u_y, v_y υπάρχουν και είναι συνεχείς σε μια περιοχή $D \subseteq U$ του $(x_0, y_0) \in U$. Αν το $(x_0 + \xi, y_0 + \eta) \in D$, από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$\begin{aligned} u(x_0+\xi, y_0+\eta) - u(x_0, y_0) &= [u(x_0+\xi, y_0+\eta) - u(x_0, y_0+\eta)] + [u(x_0, y_0+\eta) - u(x_0, y_0)] \\ &= u_x(x_1, y_0+\eta)\xi + u_y(x_0, y_1)\eta\,, \end{aligned}$$

για κάποιο x_1 μεταξύ x_0 και $x_0 + \xi$ και για κάποιο y_1 μεταξύ y_0 και $y_0 + \eta$. Επομένως,

$$\begin{aligned} &|u(x_0+\xi, y_0+\eta) - u(x_0, y_0) - [u_x(x_0, y_0)\xi + u_y(x_0, y_0)\eta]| \\ &\quad = |[u_x(x_1, y_0+\eta) - u_x(x_0, y_0)]\xi + [u_y(x_0, y_1) - u_y(x_0, y_0)]\eta| \\ &\quad \le |u_x(x_1, y_0+\eta) - u_x(x_0, y_0)|\,|\xi| + |u_y(x_0, y_1) - u_y(x_0, y_0)|\,|\eta| \\ &\quad \le \{|u_x(x_1, y_0+\eta) - u_x(x_0, y_0)| + |u_y(x_0, y_1) - u_y(x_0, y_0)|\}\sqrt{\xi^2+\eta^2} \end{aligned}$$

και κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} &\frac{|u(x_0+\xi, y_0+\eta) - u(x_0, y_0) - [u_x(x_0, y_0)\xi + u_y(x_0, y_0)\eta]|}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \\ &\qquad \le |u_x(x_1, y_0+\eta) - u_x(x_0, y_0)| + |u_y(x_0, y_1) - u_y(x_0, y_0)|\,. \end{aligned}$$

Επειδή από την υπόθεση οι u_x, u_y είναι συνεχείς στην περιοχή $D \subseteq U$ του σημείου $(x_0, y_0) \in U$, παίρνοντας το $(\xi, \eta) \to (0, 0)$ το δεξιό μέλος τείνει στο μηδέν. Επομένως και το αριστερό μέλος θα τείνει στο μηδέν, δηλαδή

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{|u(x_0+\xi, y_0+\eta) - u(x_0, y_0) - [u_x(x_0, y_0)\xi + u_y(x_0, y_0)\eta]|}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = 0\,.$$

Άρα, η u είναι διαφορίσιμη στο (x_0, y_0) με $Du(x_0, y_0)(\xi, \eta) = u_x(x_0, y_0)\xi + u_y(x_0, y_0)\eta$. Παρόμοια, η v είναι διαφορίσιμη στο (x_0, y_0) με $Dv(x_0, y_0)(\xi, \eta) = v_x(x_0, y_0)\xi + v_y(x_0, y_0)\eta$.Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι η f είναι διαφορίσιμη στο (x_0, y_0) με

$$Df(x_0, y_0)(\xi, \eta) = f_x(x_0, y_0)\xi + f_y(x_0, y_0)\eta\,,$$

όπου $f_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)$. □

Έστω $f : U \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, μιγαδική συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$. Θα δώσουμε τώρα μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η f παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο του U και πιο γενικά για να είναι αναλυτική στο U.

Θεώρημα 3.13 (1ο κριτήριο αναλυτικότητας μιας συνάρτησης). *Έστω η μιγαδική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $z_0 = x_0 + iy_0$ σημείο του U. Η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0, αν και μόνο αν η f, σαν συνάρτηση των x και y, είναι διαφορίσιμη στο (x_0, y_0)[ισοδύναμα, οι u, v είναι διαφορίσιμες στο (x_0, y_0)] και ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann*

$$\{f_x(x_0, y_0) = -if_y(x_0, y_0)\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{matrix} \right\} .$$

Αν η παράγωγος $f'(z_0)$ υπάρχει, τότε

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= f_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\ &\text{ή} \\ f'(z_0) &= -if_y(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) . \end{aligned}$$

Πιο γενικά, η f είναι αναλυτική(ολόμορφη) στο U, αν και μόνο αν η f, σαν συνάρτηση των x και y, είναι διαφορίσιμη στο U[ισοδύναμα, οι u, v είναι διαφορίσιμες στο U] και ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann σε κάθε σημείο του U.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0. Σην Πρόταση 3.7 αποδείξαμε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο z_0 και ότι $f'(z_0) = f_x(x_0, y_0) = -if_y(x_0, y_0)$. Μένει να δείξουμε ότι η f, σαν συνάρτηση των x και y, είναι διαφορίσιμη στο σημείο (x_0, y_0). Αν $z_0 + h \in U$, όπου $h = \xi + i\eta \neq 0$, τότε το $z_0 + h = (x_0 + \xi) + i(y_0 + \eta)$ ταυτίζεται με το σημείο $(x_0 + \xi, y_0 + \eta)$ και επομένως

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right| &= \left| \frac{f(x_0 + \xi, y_0 + \eta) - f(x_0, y_0)}{\xi + i\eta} - f'(z_0) \right| \\ &= \frac{|f(x_0 + \xi, y_0 + \eta) - f(x_0, y_0) - f'(z_0)(\xi + i\eta)|}{|\xi + i\eta|} \\ &= \frac{|f(x_0 + \xi, y_0 + \eta) - f(x_0, y_0) - f'(z_0)(\xi + i\eta)|}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} . \end{aligned}$$

Επειδή η παράγωγος $f'(z_0)$ υπάρχει, παίρνοντας το $h \to 0$ το αριστερό μέλος τείνει στο μηδέν και κατά συνέπεια

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{|f(x_0+\xi, y_0+\eta) - f(x_0,y_0) - f'(z_0)(\xi+i\eta)|}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = 0\,. \qquad (*)$$

Όμως

$$\begin{aligned} f'(z_0)(\xi+i\eta) &= f_x(x_0,y_0)(\xi+i\eta) \\ &= f_x(x_0,y_0)\xi + i f_x(x_0,y_0)\eta \\ &= f_x(x_0,y_0)\xi + f_y(x_0,y_0)\eta \qquad (f_x(x_0,y_0) = -i f_y(x_0,y_0)) \end{aligned}$$

και από την $(*)$ έπεται ότι η f είναι διαφορίσιμη στο (x_0,y_0) με

$$Df(x_0,y_0)(\xi,\eta) = f_x(x_0,y_0)\xi + f_y(x_0,y_0)\eta\,.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η f, σαν συνάρτηση των x και y, είναι διαφορίσιμη στο (x_0,y_0) και ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann, δηλαδή $f_x(x_0,y_0) = -i f_y(x_0,y_0)$ και ισοδύναμα $f_y(x_0,y_0) = i f_x(x_0,y_0)$. Έστω $z_0 + h \in U$, όπου $h = \xi + i\eta \neq 0$. Επειδή το $z_0 + h = (x_0+\xi) + i(y_0+\eta)$ ταυτίζεται με το σημείο $(x_0+\xi, y_0+\eta)$, είναι

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \frac{f(x_0+\xi,y_0+\eta) - f(x_0,y_0)}{\xi+i\eta} \\ &= \frac{f_x(x_0,y_0)\xi + f_y(x_0,y_0)\eta + \varepsilon(\xi,\eta)\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi+i\eta} \qquad (\text{από την } (3.4)) \\ &= \frac{f_x(x_0,y_0)\xi + i f_x(x_0,y_0)\eta + \varepsilon(\xi,\eta)\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi+i\eta} \qquad (f_y(x_0,y_0) = i f_x(x_0,y_0)) \\ &= f_x(x_0,y_0) + \varepsilon(\xi,\eta)\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\xi+i\eta} \end{aligned}$$

και επομένως

$$\left| \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - f_x(x_0,y_0) \right| = |\varepsilon(\xi,\eta)| \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{|\xi+i\eta|} = |\varepsilon(\xi,\eta)|\,.$$

Επειδή $\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \varepsilon(\xi,\eta) = 0$, έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 με

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f_x(x_0,y_0)\,.$$

□

Έστω η συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$.

(i) Αν η f είναι αναλυτική στο U και θεωρήσουμε την f σαν συνάρτηση των x και y, έχουμε αποδείξει ότι για κάθε $z = x + iy \in U$ είναι

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \, .$$

Θα αποδείξουμε αργότερα, χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τύπους Cauchy, ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο U. Ειδικά, η δεύτερη παράγωγος υπάρχει και δίνεται από τον τύπο

$$f''(z) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$$

ή

$$f''(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}\left(-i\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \, .$$

Επομένως οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ υπάρχουν στο U και κατά συνέπεια οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ θα είναι συνεχείς στο U. Έχουμε λοιπόν αποδείξει το εξής:

Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$, τότε οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ (θεωρούμε την f σαν συνάρτηση των x, y) υπάρχουν και είναι συνεχείς στο U.

(ii) Αν η f, σαν συνάρτηση των x και y, έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο U, από το Θεώρημα 3.12 η f θα είναι διαφορίσιμη στο U.

Λαμβάνοντας υπόψη το (i) και το (ii), το Θεώρημα 3.13 συνεπάγεται τον παρακάτω χρήσιμο κριτήριο για την αναλυτικότητα μιας συνάρτησης.

Θεώρημα 3.14 (2ο κριτήριο αναλυτικότητας μιας συνάρτησης). *Έστω η μιγαδική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$. Η f είναι αναλυτική(ολόμορφη) στο U, αν και μόνο αν η f, σαν συνάρτηση των x και y, έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο U[ισοδύναμα, οι u_x, u_y, v_x και v_y είναι συνεχείς στο U] και ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann*

$$\{f_x = -if_y\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix}\right\} .$$

Αν η f είναι αναλυτική στο U, τότε η παράγωγος της f στο $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ δίνεται από τον τύπο

$$f'(z_0) = f_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

ή

$$f'(z_0) = -if_y(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)\,.$$

Παρατήρηση 3.15. *Το Θεώρημα 3.13 μας λέει ότι αν η $f = u + iv$, ορισμένη στο ανοικτό σύνολο U, σαν συνάρτηση των x, y είναι διαφορίσιμη στο U[ισοδύναμα, οι u, v είναι διαφορίσιμες στο U] και ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann σε κάθε σημείο του U, τότε η f είναι αναλυτική στο U. Είναι γνωστό ότι ασθενέστερες υποθέσεις από αυτές του θεωρήματος 3.13 συνεπάγονται την αναλυτικότητα της f στο U. Το "καλύτερο αποτέλεσμα" είναι το παρακάτω θεώρημα, παραπέμπουμε στο [12].*

Θεώρημα 3.16 (Looman-Menchoff). *Αν η $f = u + iv$, ορισμένη στο ανοικτό σύνολο U, είναι τέτοια ώστε*

(i) οι μερικές παράγωγοι u_x, u_y, v_x, v_y υπάρχουν στο U,

(ii) οι u, v ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann στο U και

(iii) η f είναι συνεχής στο U,

τότε η f είναι αναλυτική στο U.

Για την απόδειξη του θεωρήματος χρησιμοποιείται Lebesgue ολοκλήρωση και το θεώρημα κατηγορίας του Baire, βλέπε [12].

Παραδείγματα 3.17. *1. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ με $f(z) = f(x + iy) = \Re z = x$. Είναι $f = u + iv$ με $u(x, y) = x$ και $v(x, y) = 0$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Επειδή οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους, για να είναι η f παραγωγίσιμη θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann. Όμως $u_x = 1 \neq 0 = v_y$ και $u_y = 0 = -v_x$, δηλαδή δεν* *ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann για κανένα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$.*

2. *Έστω η συνάρτηση $g : \mathbb{C} \to [0, \infty)$ με $g(z) = |z|^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2$. Είναι $g = u + iv$ με $u(x, y) = x^2 + y^2$ και $v(x, y) = 0$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Επειδή οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους, για να είναι η g παραγωγίσιμη θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann*
$$\left\{\begin{array}{l} u_x = v_y \\ \\ u_y = -v_x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = 0 \\ \\ 2y = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \{(x, y) = (0, 0)\}\,.$$
Επομένως η g είναι παραγωγίσιμη μόνο στο 0. Επειδή $g_x(x, y) = 2x$, η παράγωγος $g'(0) = g_x(0, 0) = 0$.

3. *Έστω η συνάρτηση $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $h(z) = h(x + iy) = x^3 + y + i(-x - y^3 + 3y)$. Είναι $h = u + iv$ με $u(x, y) = x^3 + y$ και $v(x, y) = -x - y^3 + 3y$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Επειδή οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους, για να είναι η h παραγωγίσιμη θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann*
$$\left\{\begin{array}{l} u_x = v_y \\ \\ u_y = -v_x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x^2 = -3y^2 + 3 \\ \\ 1 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \{x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1\}\,.$$
Επομένως η h είναι παραγωγίσιμη στα σημεία του μοναδιαίου κύκλου με παράγωγο
$$h'(z) = h_x(x, y) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 3x^2 - i\,, \quad -1 \le x \le 1\,.$$
Έστω z σημείο του μοναδιαίου κύκλου και έστω $D(z, \delta)$ μια οποιαδήποτε περιοχή του z. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη μόνο στα σημεία του ανοικτού δίσκου $D(z, \delta)$ που βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο, η h δεν είναι αναλυτική στο z(πρέπει η h να είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του ανοικτού δίσκου). Άρα η h δεν είναι αναλυτική σε κανέα σημείο του $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 3.18. *Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο και έστω $U^* = \{z : \overline{z} \in U\}$ το συμμετρικό του U ως προς τον πραγματικό άξονα. Η συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο U αν και μόνο αν η $f^* : U^* \to \mathbb{C}$ με $f^*(z) := \overline{f(\overline{z})}$ είναι αναλυτική στο U^*.*

Λύση. Υποθέτουμε ότι η $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ είναι αναλυτική στο U. Θα δείξουμε ότι η $f^*(z) := \overline{f(\overline{z})}$ είναι αναλυτική στο U^*. Επειδή το U είναι ανοικτό σύνολο και το U^* θα είναι ανοικτό σύνολο.

1ος τρόπος. Επειδή η f είναι αναλυτική στο U, η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann: $\{u_x = v_y, \, u_y = -v_x\}$. Επειδή $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$, είναι $f^*(z) = u^*(x,y) + iv^*(x,y)$ με $u^*(x,y) = u(x,-y)$ και $v^*(x,y) = -v(x,-y)$. Επομένως,

$$u_x^*(x,y) = u_x(x,-y) = v_y(x,-y)\,, \quad u_y^*(x,y) = -u_y(x,-y) = v_x(x,-y)\,,$$
$$v_x^*(x,y) = -v_x(x,-y) \qquad \text{και} \qquad v_y^*(x,y) = v_y(x,-y)\,.$$

Άρα, $\{u_x^* = v_y^*, \, u_y^* = -v_x^*\}$, δηλαδή ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann για την f^* στο U^*. Επειδή η f^* έχει και συνεχείς μερικές παραγώγους, η f^* είναι αναλυτική στο U^*.

2ος τρόπος. Έστω $z_0 \in U^*$. Τότε $\overline{z}_0 \in U$ και υποθέτουμε ότι η παράγωγος $f'(\overline{z}_0) = \lambda \in \mathbb{C}$ υπάρχει. Θα δείξουμε ότι και η συνάρτηση f^* είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και μάλιστα η παράγωγος $(f^*)'(z_0) = \overline{\lambda}$. Πράγματι, επειδή

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f^*(z_0+h) - f^*(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f(\overline{z}_0 + \overline{h})} - \overline{f(\overline{z}_0)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \overline{\left(\frac{f(\overline{z}_0 + \overline{h}) - f(\overline{z}_0)}{\overline{h}} \right)} \\
&= \overline{\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{z}_0 + \overline{h}) - f(\overline{z}_0)}{\overline{h}} \right)} \qquad \text{(η συνάρτηση } z \mapsto \overline{z} \text{ είναι συνεχής)} \\
&= \overline{f'(\overline{z}_0)}\,,
\end{aligned}$$

η f^* είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 \in U^*$ με παράγωγο $(f^*)'(z_0) = \overline{f'(\overline{z}_0)} = \overline{\lambda}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ είναι αναλυτική στο U^*. Τότε από την προηγούμενη περίπτωση η $\overline{f^*(\overline{z})} = f(z)$ είναι αναλυτική στο $(U^*)^* = U$, δηλαδή η f είναι αναλυτική στο U. ■

Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα I του $\mathbb{R}$. Αν $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in I$, τότε η f είναι σταθερή στο διάστημα I. Αυτό το γνωστό αποτέλεσμα γενικεύεται και για αναλυτικές συναρτήσεις που ορίζονται σε ανοικτά και συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{C}$. Σημειώνεται ότι τα διαστήματα είναι τα μοναδικά συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Πρόταση 3.19. *Αν η συνάρτηση $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, είναι αναλυτική στον τόπο G με την παράγωγο $f'(z) = 0$, για κάθε $z \in G$, τότε η f είναι σταθερή στο G.*

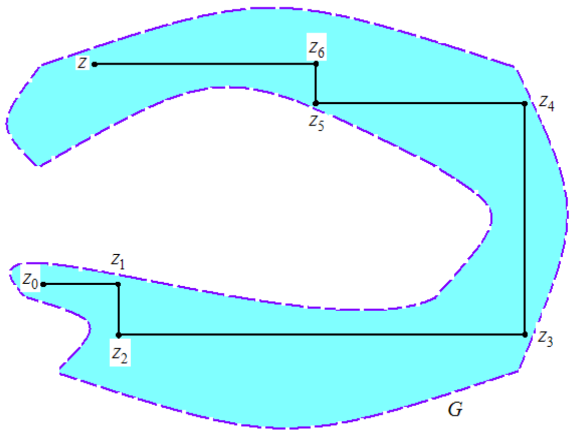
Απόδειξη. Επειδή από την υπόθεση

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y) = 0, \quad \text{για κάθε } z \in G\,,$$

είναι

$$u_x(x, y) = v_x(x, y) = u_y(x, y) = v_y(x, y) = 0\,, \quad \text{για κάθε } (x, y) \in G\,.$$

Έστω $z_0 = x_0 + iy_0$ σταθερό σημείο του G. Αρκει να δείξουμε ότι $f(z) = f(z_0)$, για κάθε $z \in G$.



Έστω $z = x + iy$ ένα τυχαίο σημειο του G. Επειδή το σύνολο G είναι ανοικτό και συνεκτικό, το G είναι *κλιμακωτά συνεκτικό*. Επομένως υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο G με αρχή το z_0, πέρας το z και της οποίας τα ευθύγραμμα τμήματα είναι παράλληλα είτε προς τον πραγματικό άξονα ή προς το φανταστικό άξονα, βλέπε το παραπάνω σχήμα. Επειδή το ευθ. τμήμα $[z_0, z_1]$, $z_1 = x_1 + iy_0$, είναι οριζόντιο, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $x \mapsto u(x, y_0)$ έχουμε

$$u(x_1, y_0) - u(x_0, y_0) = u_x(\tilde{x}, y_0)(x_1 - x_0)\,,$$

για κάποιο $\tilde{x}$ μεταξύ x_0 και x_1. Το $(\tilde{x}, y_0)$ είναι σημείο του ευθ. τμήματος $[z_0, z_1]$ και επομένως ανήκει στο G. Επειδή $u_x(\tilde{x}, y_0) = 0$, έπεται ότι $u(x_1, y_0) = u(x_0, y_0)$. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι $v(x_1, y_0) = v(x_0, y_0)$ και επομένως $f(z_1) = f(z_0)$.

Αν θεωρήσουμε τώρα το κατακόρυφο ευθ. τμήμα $[z_1, z_2]$, $z_2 = x_1 + iy_2$, με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $f(z_1) = f(z_2)$. Εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο και για τα υπόλοιπα ευθ. τμήματα, τελικά έχουμε

$$f(z_0) = f(z_1) = f(z_2) = \cdots = f(z)$$

και άρα η f είναι σταθερή στο G. □

Για μη συνεκτικά σύνολα το προηγούμενο αποτέλεσμα γενικά δεν ισχύει. Έστω για παράδειγμα $G = D(0,1) \cup D(3,1)$ ένα ανοικτό και μη συνεκτικό σύνολο. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : G \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{αν } z \in D(0,1), \\ i & \text{αν } z \in D(3,1)\ . \end{cases}$$

Επειδή f είναι σταθερή στον ανοικτό δίσκο $D(0,1)$, είναι $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in D(0,1)$ και παρόμοια $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in D(3,1)$. Άρα, $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in G$. Όμως η f δεν είναι σταθερή στο G.

Πρόταση 3.20. *Έστω $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, αναλυτική συνάρτηση στον τόπο G. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η f είναι σταθερή στο G.*

(ii) *Το $\Re f = u$ είναι σταθερό στο G.*

(iii) *Το $\Im f = v$ είναι σταθερό στο G.*

(iv) *Η $|f|$ είναι σταθερή στο G.*

(v) *Η συνάρτηση $\overline{f} = u - iv$ είναι αναλυτική στο G.*

Απόδειξη. Οι ισοδυναμίες $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ προκύπτουν άμεσα από την Πρόταση 3.19 και από τις εξισώσεις Cauchy–Riemann.

Είναι προφανές ότι η (i) συνεπάγεται τις (iv) και (v).

(v) $\Rightarrow$ (i): *1ος τρόπος.* Η $f + \overline{f} = 2u$ είναι αναλυτική στο G με $\Im(f + \overline{f}) = 0$, δηλαδή το $\Im(f + \overline{f})$ είναι σταθερό στο G. Τότε από τις εξισώσεις Cauchy–Riemann και την Πρόταση 3.19 έπεται ότι η $f + \overline{f}$ είναι σταθερή στο G. Παρόμοια, επειδή η $f - \overline{f} = 2iv$ είναι αναλυτική με $\Re(f - \overline{f}) = 0$, η $f - \overline{f}$ είναι σταθερή στο G. Επομένως η $f = \frac{(f+\overline{f})+(f-\overline{f})}{2}$ είναι σταθερή στο G.

2ος τρόπος. Επειδή η $f + \overline{f} = 2u = 2\Re f$ είναι αναλυτική, η $\Re f$ είναι αναλυτική συνάρτηση στο G. Το φανταστικό μέρος της $\Re f$ είναι μηδέν οπότε και πάλι από τις εξισώσεις Cauchy–Riemann και την Πρόταση 3.19 η $\Re f$ θα είναι σταθερή στο G. Δηλαδή ισχύει η (ii) που είναι ισοδύναμη με τη (i).

$(iv) \Rightarrow (i)$: Υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f\overline{f} = |f|^2 = c$.

Αν $c = 0$, τότε $f = 0$ και επομένως η f είναι σταθερή στο G.

Διαφορετικά, είναι $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in G$. Τότε η $\overline{f} = c/f$ είναι αναλυτική στο G και όπως αποδείξαμε προηγουμένως η (v) συνεπάγεται τη (i). □

Παράδειγμα 3.21. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f = u + iv$ είναι αναλυτική στον τόπο G. Αν $u = v^2$, να βρεθεί η f.*

Λύση. Επειδή η f είναι αναλυτική στον τόπο G, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann:

$$\left\{\begin{aligned} v_y &= u_x \\ v_x &= -u_y \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} v_y &= 2vv_x \\ v_x &= -2vv_y \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} v_y &= 2vv_x \\ v_x &= -4v^2v_x \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} v_y &= 2vv_x \\ \left(1+4v^2\right)v_x &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Επομένως, $v_x = v_y = u_x = u_y = 0$ και κατά συνέπεια $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 0$ στον τόπο G. Από την Πρόταση 3.19 η f είναι σταθερή στο G. Άρα,

$$f(z) = \lambda^2 + i\lambda\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

■

Παράδειγμα 3.22. *Να βρεθούν όλες οι ακέραιες συναρτήσεις $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ της μορφής*

$$f(z) = f(x+iy) = u(x) + iv(y)\,.$$

Λύση. Επειδή η f είναι ακέραια, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann. Επομένως,

$$u'(x) = v'(y)\,, \quad \text{για κάθε } (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Επειδή η u' είναι συνάρτηση του x και η v' είναι συνάρτηση του y, θα πρέπει να είναι $u'(x) = v'(y) = a$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Τότε $u(x) = ax + b_1$ και $v(y) = ay + b_2$, με $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Άρα, όλες οι ακέραιες συναρτήσεις f είναι της μορφής

$$f(z) = ax + b_1 + i(ay + b_2) = a(x+iy) + (b_1 + ib_2) = az + b\,, \qquad (b = b_1 + ib_2)$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{C}$. ■

Παράδειγμα 3.23. *Έστω $f : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στον τόπο G. Αν όλες οι τιμές της f βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία γραμμή L στο $\mathbb{C}$, τότε η f είναι σταθερή στο G.*

Λύση. Κάθε ευθεία γραμμή L στο $\mathbb{C}$ είναι της μορφής

$$L = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + t\zeta,\, t \in \mathbb{R}\}\,, \quad \text{για κάποια } z_0, \zeta \in \mathbb{C} \text{ με } \zeta \neq 0\,.$$

Έστω $f(z) \in L$ για κάθε $z \in G$. Αν ορίσουμε τη συνάρτηση $g : G \to \mathbb{C}$ με

$$g(z) := \frac{f(z) - z_0}{\zeta}\,, \quad \text{για κάθε } z \in G\,,$$

τότε η g είναι αναλυτική στο G με $g(z) \in \mathbb{R}$ για κάθε $z \in G$. Επειδή η g παίρνει πραγματικές τιμές, το $\Im g = 0$ και από την Πρόταση 3.20 έπεται ότι η g είναι σταθερή στο G, έστω $g = c$. Τότε και η $f(z) = z_0 + c\zeta$ είναι σταθερή στο G. ∎

Ασκήσεις

1. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και η f^2 είναι παραγωγίσιμη στο Ω. Αν $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο Ω.

2. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & \text{αν } z \neq 0, \\ 0 & \text{αν } z = 0\,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$ και ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} x - y + i\frac{x^2+y^2}{x+y} & \text{αν } z \neq 0, \\ 0 & \text{αν } z = 0\,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0,0)$ και ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

4. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, με

$$f(z) = \sqrt{\left|z^2 - \overline{z}^2\right|}\,.$$

Να δείξετε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0, 0)$. Είναι η f παραγωγίσιμη στο 0; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

5. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(1+i)\Im(z^2)}{|z|^2} & \text{αν } z \neq 0, \\ 0 & \text{αν } z = 0\,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann στο σημείο $(0, 0)$. Είναι η f παραγωγίσιμη στο 0; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

6. Σε ποια σημεία είναι η συνάρτηση $f(z) = z\Re z + \overline{z}\Im z + \overline{z}$ παραγωγίσιμη; Υπολογίστε την παράγωγο όπου υπάρχει.

7. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

8. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$, σαν συνάρτηση των x και y, έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$. Αν $h \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih}\,, \quad \text{για κάθε } z \in U\,,$$

δείξτε ότι η f είναι αναλυτική στο U.

9. Έστω η μιγαδική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $z_0 = x_0 + iy_0$ σημείο του U. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους(σαν συνάρτηση των x, y) στο (x_0, y_0) και το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0)|}{|h|}$$

υπάρχει, τότε είτε η $f = u + iv$ ή η $\overline{f} = u - iv$ είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 = x_0 + iy_0$.

10. Έστω η συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ορισμένη στο ανοικτό σύνολο U(η f παίρνει πραγματικές τιμές) και έστω $z_0 = x_0 + iy_0$ σημείο του U. Δείξτε ότι είτε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο z_0 ή $f'(z_0) = 0$.

11. Αν η συνάρτηση $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$, δείξτε ότι και η συνάρτηση g με
$$g(z) = f(z) - \overline{f(-\overline{z})}\,, \quad z \in D(0,1)\,,$$
θα είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$.

12. Έστω $f : G \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο $G \subseteq \mathbb{C}$. Αν $au(x,y) + bv(x,y) + c = 0$ για κάθε $(x,y) \in G$, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a^2 + b^2 \neq 0$, να βρεθεί η f.

13. Έστω $f : G \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο $G \subseteq \mathbb{C}$. Αν $u_x(x,y) + v_y(x,y) = 0$ για κάθε $(x,y) \in G$, δείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ και $d \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε
$$f(z) = -icz + d\,, \quad \text{για κάθε } z \in G\,.$$

14. Έστω η μιγαδική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $z_0 = x_0 + iy_0$ σημείο του U. Υποθέτουμε ότι η f, σαν συνάρτηση των x και y, είναι διαφορίσιμη στο σημείο (x_0, y_0)[ισοδύναμα, οι u, v είναι διαφορίσιμες στο (x_0, y_0)] και ότι το όριο
$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right|$$
υπάρχει. Δείξτε ότι είτε η $f = u + iv$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0 ή η $\overline{f} = u - iv$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $h = \xi + i\eta$, όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 3.13 είναι
$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right| = \frac{\left| f_x(x_0, y_0)\xi + f_y(x_0, y_0)\eta + \varepsilon(\xi, \eta)\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \right|}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}\,,$$
όπου $\lim_{(\xi,\eta) \to (0,0)} \varepsilon(\xi, \eta) = 0$. Θεωρείστε τις περιπτώσεις (*i*) $\eta = 0$, $\xi \to 0$, (*ii*) $\xi = 0$, $\eta \to 0$, (*iii*) $\xi = \eta$, $\eta \to 0$ και δείξτε ότι
$$(f_x(x_0, y_0))^2 = (-if_y(x_0, y_0))^2\,.$$

Κεφάλαιο 4

Μιγαδική ολοκλήρωση

Μια **καμπύλη** στο $\mathbb{C}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Αν $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, τότε οι συναρτήσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$. Συμβολίζουμε με γ^* το πεδίο τιμών της γ, δηλαδή $\gamma^* = \gamma([a, b])$. Το $\gamma(a)$ είναι η αρχή της καμπύλης και το $\gamma(b)$ είναι το πέρας της καμπύλης. Τα $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ είναι τα άκρα της καμπύλης και λέμε ότι η καμπύλη γ συνδέει το $\gamma(a)$ με το $\gamma(b)$.

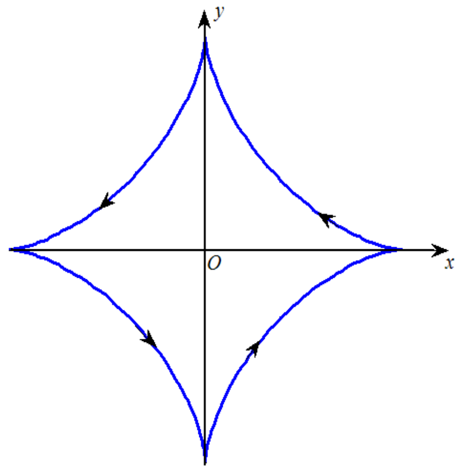
Αν $\gamma(a) = \gamma(b)$, η καμπύλη γ λέγεται **κλειστή**.

Έστω $t_1, t_2 \in [a, b)$. Αν $t_1 \neq t_2$ συνεπάγεται $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_1)$, η καμπύλη γ λέγεται **απλή**. Αν επιπλέον η καμπύλη είναι κλειστή, η γ λέγεται **απλή κλειστή καμπύλη**.

Η καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ λέγεται **λεία**, αν η γ' είναι συνεχής στο $[a, b]$ με $\gamma'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in (a, b)$.

Η καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ λέγεται **τμηματικά λεία**, αν υπάρχει διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ του $[a, b]$ τέτοια ώστε ο περιορισμός της γ σε κάθε κλειστό διάστημα $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, n$, να είναι λεία καμπύλη.

Παράδειγμα 4.1. *Η καμπύλη $\gamma(t) = \cos^3 t + i \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$, είναι απλή, κλειστή και τμηματικά λεία.*



Παρατηρούμε ότι η $\gamma'(t) = -3\cos^2 t \sin t + 3i \sin^2 t \cos t$ *είναι συνεχής στο διάστημα* $t \in [0, 2\pi]$ *με* $\gamma'(t) = 0$ *αν και μόνο αν* $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$.

4.1 Ολοκλήρωση- Βασικά αποτελέσματα

Παράδειγμα 4.2. *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα* $\int_\gamma |z|^2\,dz$ *και* $\int_\gamma z^2\,dz$, *όπου*

(i) $\gamma = \gamma_1$ *είναι το ευθ. τμήμα* $[0, 1+i]$

και

(ii) $\gamma = \gamma_2$ *είναι το τμήμα της παραβολής* $y = x^2$ *με αρχή το* 0 *και πέρας το σημείο* $(1, 1)$.

Λύση. Έστω το ολοκλήρωμα $\int_\gamma |z|^2\,dz$.

(i) Η παραμετρική εξίσωση του ευθ. τμήματος $\gamma_1 = [0, 1+i]$ είναι $z_1(t) = t + it$, $0 \le t \le 1$. Επομένως,

$$\int_{\gamma_1} |z|^2\,dz = \int_0^1 |t+it|^2(1+i)\,dt = (1+i)\int_0^1 2t^2\,dt = \frac{2}{3}(1+i)\,.$$

(ii) Η παραμετρική εξίσωση της γ_2 είναι $z_2(t) = t^2 + it$, $0 \le t \le 1$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} |z|^2\,dz &= \int_0^1 |t^2+it|^2(2t+i)\,dt \\ &= (1+i)\int_0^1 2t(t^4+t^2)\,dt + i\int_0^1 (t^4+t^2)\,dt = \frac{5}{6} + \frac{8}{15}i\,.\end{aligned}$$

Παρότι οι καμπύλες γ_1 και γ_2 έχουν την ίδια αρχή και το ίδιο πέρας, είναι

$$\int_{\gamma_1} |z|^2\,dz \neq \int_{\gamma_2} |z|^2\,dz\,.$$

Ως γνωστόν, Παράδειγμα 3.3 και Παραδείγματα 3.17, η συνεχής συνάρτηση $w = |z|^2$ είναι παραγωγίσιμη μόνο στο σημείο 0 και επομένως δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$. Θεωρούμε τώρα το ολοκλήρωμα $\int_\gamma z^2\,dz$. Είναι

(i)

$$\int_{\gamma_1} z^2\,dz = \int_0^1 (t+it)^2(1+i)\,dt = -2\int_0^1 t^2\,dt + 2i\int_0^1 t^2\,dt = -\frac{2}{3}(1-i)$$

και

(ii)

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} z^2\,dz &= \int_0^1 (t^2+it)^2(2t+i)\,dt \\ &= \int_0^1 (2t^5-4t^3)\,dt + i\int_0^1 (5t^4-t^2)\,dt = -\frac{2}{3}(1-i)\,.\end{aligned}$$

Για την ακέραια συνάρτηση $f(z) = z^2$ παρατηρούμε ότι

$$\int_{\gamma_1} z^2\,dz = \int_{\gamma_2} z^2\,dz = -\frac{2}{3}(1-i)\,,$$

όπου γ_1 και γ_2 είναι λείες καμπύλες με την ίδια αρχή και το ίδιο πέρας. Αυτό δεν είναι απλή σύμπτωση. Θα αποδείξουμε αργότερα, Θεώρημα 4.26, ότι αν μια συνάρτηση f είναι αναλυτική σε ένα απλά συνεκτικό τόπο, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f είνα ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης. ■

Πρόταση 4.3. *Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, τμηματικά λεία καμπύλη και έστω $f : U \to \mathbb{C}$ μία συνεχής συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ το οποίο περιέχει τη $\gamma^* = \gamma([a,b])$. Τότε,*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)||dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt\,. \tag{4.1}$$

Ειδικά αν $|f(z)| \le M$, για κάθε $z \in \gamma^* = \gamma([a,b])$, τότε

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M \times (\text{μήκος της } \gamma)\ . \tag{4.2}$$

Απόδειξη. Αν $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, τότε προφανώς η πρόταση ισχύει. Υποθέτουμε ότι $\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0$. Επειδή το $\int_\gamma f(z)\,dz \in \mathbb{C}$ και είναι διάφορο το μηδενός, είναι

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| e^{i\theta} \text{ για κάποιο } \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| &= e^{-i\theta}\int_\gamma f(z)\,dz \\
&= \Re\left\{e^{-i\theta}\int_\gamma f(z)\,dz\right\} \\
&= \Re\left\{e^{-i\theta}\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right\} \\
&= \int_a^b \Re\left\{e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\right\}\,dt \\
&\leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt \\
&= \int_\gamma |f(z)||dz|\,.
\end{aligned}$$

Έστω $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Επειδή το το μήκος της καμπύλης γ δίνεται από τον τύπο

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_\gamma |dz|\,,$$

τελικά έχουμε

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq M\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = M \times (\text{μήκος της } \gamma)\,.$$

□

Παράδειγμα 4.4. *Να αποδειχθεί ότι*

$$\left|\oint_{C(0,1)} e^{\bar{z}\Im z}\,dz\right| \leq 2\pi\sqrt{e}\,.$$

Λύση. Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου $C(0,1)$ είναι $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Πάνω στο μοναδιαίο κύκλο είναι

$$\left|e^{\bar{z}\Im z}\right| = \left|e^{(x-iy)y}\right| = e^{xy}\left|e^{-iy^2}\right| = e^{xy} \leq e^{(x^2+y^2)/2} = e^{1/2} = \sqrt{e}\,.$$

Επομένως, από την (4.2) έχουμε

$$\left|\oint_{C(0,1)} e^{\bar{z}\Im z}\,dz\right| \leq \sqrt{e} \times (\text{μήκος του μοναδιαίου κύκλου}) = 2\pi\sqrt{e}\,.$$

■

Παράδειγμα 4.5. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής και παίρνει πραγματικές τιμές. Αν*

$$|f(z)| \leq 1 \ \text{ για κάθε } |z| = 1\,,$$

να αποδειχθεί ότι

$$\left| \oint_{|z|=1} f(z)\, dz \right| \leq 4\,. \tag{4.3}$$

Σημείωση. Δεν υποθέτουμε ότι η f *είναι αναλυτική συνάρτηση. Αν η* f *είναι αναλυτική στο* $\mathbb{C}$ *και παίρνει πραγματικές τιμές, το* $\Im f = 0$ *και επομένως από την Πρόταση 3.20 η* f *θα είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας κατευθείαν την ανισότητα (4.2) της Πρότασης 4.3 (και κατά συνέπεια μη λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές), έχουμε

$$\left| \oint_{|z|=1} f(z)\, dz \right| \leq 1 \times (\text{μήκος του μοναδιαίου κύκλου}) = 2\pi\,.$$

Είναι $2\pi > 4$. Προκειμένου λοιπόν να αποδείξουμε ότι το άνω φράγμα της απόλυτης τιμής του ολοκληρώματος είναι το 4, θα πρέπει να ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα όπως και στην απόδειξη της ανισότητας (4.1) (Πρόταση 4.3).

Αν $\oint_{|z|=1} f(z)\, dz = 0$, τότε η (4.3) προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε ότι $\oint_{|z|=1} f(z)\, dz \neq 0$. Επειδή το $\oint_{|z|=1} f(z)\, dz \in \mathbb{C}$ και είναι διάφορο του μηδενός, είναι

$$\oint_{|z|=1} f(z)\, dz = \left| \oint_{|z|=1} f(z)\, dz \right| e^{i\theta}\,, \quad \text{για κάποιο } \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\left| \oint_{|z|=1} f(z)\, dz \right| &= e^{-i\theta} \oint_{|z|=1} f(z)\, dz \\
&= \Re \left\{ e^{-i\theta} \oint_{|z|=1} f(z)\, dz \right\} \\
&= \Re \left\{ e^{-i\theta} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) i e^{it}\, dt \right\} && (|z| = 1 : z(t) = e^{it}, -\pi \leq t \leq \pi) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \Re \left\{ e^{-i\theta} f(e^{it}) i e^{it} \right\}\, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \Re \left\{ i e^{i(t-\theta)} \right\}\, dt\,. && (f(e^{it}) \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Επειδή $\Re\left\{ie^{i(t-\theta)}\right\} = \Re\left\{i\left(\cos(t-\theta) + i\sin(t-\theta)\right)\right\} = \sin(\theta - t)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\oint_{|z|=1} f(z)\,dz\right| &= \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\sin(\theta - t)\,dt \\
&\le \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|\,|\sin(\theta - t)|\,dt \\
&\le \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(t-\theta)|\,dt && (|f(e^{it})| \le 1) \\
&= \int_{-\pi-\theta}^{\pi-\theta} |\sin x|\,dx && (\text{αντικατάσταση } x = t - \theta) \\
&= 2\int_{0}^{\pi} |\sin x|\,dx && (\text{η } y = |\sin x| \text{ είναι } \pi\text{-περιοδική}) \\
&= 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = 4\,.
\end{aligned}$$

□

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι χρήσιμο στον υπολογισμό γενικευμένων ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ή $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$, $a \in \mathbb{R}$, όπου f ρητή συνάρτηση, χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση.

Λήμμα 4.6. *Έστω $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, όπου P και Q είναι πολυώνυμα και το Q έχει βαθμό τουλάχιστον κατά 2 μεγαλύτερο από το βαθμό του P.*

(i) Για R_0 αρκετά μεγάλο, υπάρχει σταθερά M τέτοια ώστε

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \le \frac{M}{|z|^2}\,, \quad \text{για κάθε } |z| \ge R_0\,.$$

(ii) Αν γ_R είναι το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με εξίσωση $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le \pi$, τότε

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0\,.$$

Απόδειξη. (i) Έστω $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$ και $Q(z) = b_{n+p}z^{n+p} + \cdots + b_1 z + b_0$, $b_{n+p} \neq 0$, τα πολυώνυμα με $p \ge 2$. Από το Παράδειγμα 1.6 υπάρχουν $R_1, R_2 \ge 1$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |P(z)| \leq \frac{3}{2}|a_n||z|^n\,, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R_1$$

και

$$\frac{1}{2}|b_{n+p}||z|^{n+p} \leq |Q(z)| \leq \frac{3}{2}|b_{n+p}||z|^{n+p}\,, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R_2$$

Αν $R_0 := \max\{R_1, R_2\}$, τότε για κάθε $|z| \geq R_0$ είναι

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{\frac{3}{2}|a_n||z|^n}{\frac{1}{2}|b_{n+p}||z|^{n+p}} = \frac{3|a_n|}{|b_{n+p}|}\frac{1}{|z|^p} \leq \frac{3|a_n|}{|b_{n+p}|}\frac{1}{|z|^2}\,. \qquad (p \geq 2)$$

Επομένως, για $M := \frac{3|a_n|}{|b_{n+p}|}$ έχουμε

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{|z|^2}\,, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R_0\,.$$

(ii) Είναι

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\right| &\leq \int_{\gamma_R}\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|\,|dz| \\ &\leq \int_{\gamma_R}\frac{M}{R^2}\,|dz| && (\text{από το } (i) \text{ για } |z| = R \geq R_0) \\ &= \frac{M}{R^2}\pi R = \frac{M\pi}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0\,.$$

□

Θεώρημα 4.7 (Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκλήρωσης). *Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t)+iy(t)$, τμηματικά λεία καμπύλη και έστω $F : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ το οποίο περιέχει τη $\gamma^* = \gamma([a,b])$. Τότε,*

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.$$

Ειδικά αν η καμπύλη γ είναι κλειστή, δηλαδή $\gamma(a) = \gamma(b)$, τότε

$$\oint_\gamma F'(z)\,dz = 0\,.$$

Απόδειξη. Επειδή η συνάρτηση F είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο U, από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έπεται ότι η F' υπάρχει και είναι συνεχής στο U. Αν $g(t) := F(\gamma(t))$, από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε ότι $g'(t) := F'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Επομένως,

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b g'(t)\,dt = g(b) - g(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.$$

□

Παράδειγμα 4.8. *Έστω Ω ανοικτό, κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση με $\Re f'(z) > 0$ για κάθε $z \in \Omega$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι $1-1$ στο Ω.*

Απόδειξη. Έστω z_1, z_2 δύο σημεία του Ω και έστω $[z_1, z_2]$, με εξίσωση $z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $t \in [0,1]$, το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το z_1 και πέρας το z_2. Επειδή το Ω είναι κυρτό σύνολο, το ευθύγραμμο τμήμα $[z_1, z_2]$ ανήκει στο Ω και από το θεμελιώδες θεώρημα ολοκλήρωσης

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{[z_1,z_2]} f'(z)\,dz = \int_0^1 f'(z(t))(z_2 - z_1)\,dt\,.$$

Αν $z_1 \neq z_2$, τότε

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \int_0^1 f'(z(t))\,dt\,.$$

Επειδή $\Re f'(z) > 0$, για κάθε $z \in \Omega$, θα είναι $\int_0^1 f'(z(t))\,dt \neq 0$. Άρα $f(z_1) \neq f(z_2)$, δηλαδή η f είναι $1-1$ στο Ω. □

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι
$$\oint_{C^+(0,r)} \Re z\,dz = i\pi r^2\,,$$
όπου $C^+(0,r)$ είναι κύκλος με κέντρο 0, ακτίνα $r > 0$ και θετική φορά διαγραφής.

2. Δείξτε ότι
$$\int_\gamma \left[2\overline{z} - i\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]\,dz = 2\pi + 4\pi i\,,$$
όπου $\gamma : z(t) = e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$.

3. Δείξτε ότι $|\sin z^2| \leq e$, για κάθε $|z| = 1$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι
$$\left|\oint_{|z|=1} e^{2\overline{z}} \sin z^2\,dz\right| \leq 2\pi e^3\,.$$

4. Δείξτε ότι
$$\left|\int_\gamma e^{iz^2}\,dz\right| \leq \frac{\pi}{4r}\left(1-e^{-r^2}\right),$$
όπου γ η καμπύλη με εξίσωση $\gamma\,(\theta)=re^{i\theta}$, $r>0$ και $0\leq\theta\leq\pi/4$.

<u>Υπόδειξη</u>. Για κάθε $t\in\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει η ανισότητα: $\sin t\geq\frac{2t}{\pi}$.

5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$I=\int_\gamma e^z\sin z\,dz\,,$$
όπου γ λεία καμπύλη με αρχή την αρχή των αξόνων και πέρας το σημείο i.

6. Δείξτε ότι
$$\int_\gamma z\cos(\pi iz)\,dz=\frac{2}{\pi^2}\,,$$
όπου γ η καμπύλη με εξίσωση $\gamma(t)=t-t^2+it^3$, $t\in[0,1]$.

7. Αν γ είναι τμηματικά λεία καμπύλη στο άνω ημιεπίπεδο με αρχή το -1 και πέρας το 1, χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα ολοκλήρωσης δείξτε ότι
$$\int_\gamma z^i\,dz=\frac{1+e^{-\pi}}{2}(1-i)\,.$$
<u>Σημείωση</u>. Είναι $z^i=\exp(i\log z)$, όπου $\log z=\ln|z|+i\theta$, $-\pi/2<\theta<3\pi/2$, είναι ο αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου z στον απλά συνεκτικό τόπο: $\mathbb{C}\setminus\{iy: y\leq 0\}$.

8. Δείξτε ότι δεν υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f στο δακτύλιο $\Delta: 1<|z|<3$ τέτοια ώστε $e^{f(z)}=z$.

<u>Υπόδειξη</u>. Δείξτε ότι $f'(z)=1/z$ και θεωρείστε το ολοκλήρωμα
$$\oint_{|z|=2}\frac{1}{z}\,dz\,.$$

9. Έστω $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$, με $\gamma(t)=(1-t)i+t$, το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το i και πέρας το 1. Δείξτε ότι
$$|z^4|\geq\frac{1}{4}\,,\quad \text{για κάθε } z\in\gamma\,.$$
Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι αν
$$I=\int_\gamma\frac{1}{z^4}\,dz\,,$$
τότε $|I|\leq 4\sqrt{2}$. Ποιά είναι η τιμή του $|I|$;

10. Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$ και έστω $R > 0$. Δείξτε ότι τα όρια
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{[0,R]} f(z)\,dz \quad \text{και} \quad \lim_{R\to+\infty}\int_{[-R,\,0]} f(z)\,dz$$
υπάρχουν και ότι
$$\int_{\mathbb{R}} f(z)\,dz := \lim_{R\to+\infty}\int_{[-R,R]} f(z)\,dz = 0\,.$$

11. Για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ από το θεμελιώδες θεώρημα ολοκλήρωσης είναι
$$e^{z_2} - e^{z_1} = \int_{[z_1,z_2]} e^z\,dz\,,$$
όπου $[z_1, z_2]$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το z_1 και πέρας το z_2. Αν $\Re z_1, \Re z_2 \le 0$, δείξτε ότι
$$|e^{z_2} - e^{z_1}| \le |z_2 - z_1|\,.$$

12. Αν η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, είναι συνεχής, δείξτε ότι η
$$F(z) := \int_a^b \frac{f(t)}{t-z}\,dt\,, \quad z \in \mathbb{C}\setminus[a,b]\,,$$
είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus [a, b]$.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Έστω $z \in \mathbb{C}\setminus[a, b]$. Αν $d = \min\limits_{t\in[a,b]}|t-z|$, $h \in \mathbb{C}$, $0 < |h| < d/2$ και $M = \max\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|$, δείξτε ότι
$$|F(z+h) - F(z)| = \left|\int_a^b \frac{hf(t)}{(t-z)(t-z-h)}\,dt\right| \le \frac{2M(b-a)}{d^2}|h|\,.$$

13. Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε πολυώνυμο p μιας μιγαδικής μεταβλητής είναι
$$\left|p(z) - \frac{1}{z}\right| \ge \varepsilon\,, \quad \text{για κάθε } |z| = 1\,.$$
(Η άσκηση αυτή αποδεικνύει ότι η συνεχής συνάρτηση $f(z) = 1/z$ στο μοναδιαίο κύκλο $|z| = 1$ *δεν προσεγγίζεται ομοιόμορφα από πολυώνυμα*. Δηλαδή το κλασικό θεώρημα του Weierstrass για συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα του $\mathbb{R}$, δεν ισχύει για συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις ορισμένες σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$. Βλέπε και Παρατήρηση 4.76.)

<u>*Υπόδειξη*</u>. Να υποθέσετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε
$$\left|p(z) - \frac{1}{z}\right| < \varepsilon\,, \quad \text{για κάθε } |z| = 1\,.$$
Ολοκληρώνοντας το $p(z) - \frac{1}{z}$ στο μοναδιαίο κύκλο $|z| = 1$ να καταλήξετε σε άτοπο.

4.2 Θεώρημα Cauchy

Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, μια απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη. Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό της καμπύλης γ, τότε το θεώρημα του Cauchy μας λέει ότι

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0\,.$$

Το θεώρημα αυτό είναι θεμελιώδες στη θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων και αποδείχτηκε από τον Cauchy το 1814. Αν η f δεν είναι αναλυτική σε όλο το εσωτερικό της καμπύλης γ, τότε το ολοκλήρωμα μπορεί να μην ισούται με το μηδέν. Για παράδειγμα, η $f(z) = 1/z$ είναι αναλυτική σε όλα τα σημεία στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ εκτός από το $z = 0$ και το ολοκλήρωμα δεν είναι μηδέν. Πράγματι, επειδή $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, είναι η παραμετρική εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$, είναι

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i\,.$$

Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική σε ένα απλά συνεκτικό τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$ και η παράγωγος f' είναι συνεχής στο G(υπενθυμίζεται ότι η αναλυτικότητα της f δεν συνεπάγεται ότι η f' είναι συνεχής), τότε το ολοκλήρωμα της f πάνω σε μια απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη στο G είναι μηδέν. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του κλασικού θεωρήματος Green από τη διανυσματική ανάλυση:

Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένας απλά συνεκτικός τόπος με σύνορο μια απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη γ. Αν $\mathbf{F} = (P, Q)$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο με συνεχείς μερικές παραγώγους σε ένα ανοικτό σύνολο U που περιέχει το D, τότε

$$\oint_\gamma Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x(x,y) - P_y(x,y))\,dxdy\,,$$

όπου το πρώτος μέλος είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\mathbf{F} = (P, Q)$ πάνω στη καμπύλη γ με θετική φορά.

Θεώρημα 4.9 (Ασθενής μορφή του θεωρήματος Cauchy). *Έστω $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, αναλυτική συνάρτηση στον απλά συνεκτικό τόπο G και έστω* **η f' είναι συνεχής**

στο G. *Αν* γ *είναι μια απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη στο* G, *τότε*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0\,.$$

Απόδειξη. Επειδή η f' είναι συνεχής στο G, οι u_x, u_y, v_x και v_y είναι συνεχείς στο G. Επομένως, αν $D \subset G$ είναι το χωρίο με σύνορο τη τμηματικά λεία καμπύλη γ, έχουμε

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma f(z)\,dz &= \oint_\gamma (u(x,y)+iv(x,y))(dx+idy) \\
&= \oint_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\oint_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy \\
&= -\iint_D (v_x(x,y)+u_y(x,y))\,dxdy + i\iint_D (u_x(x,y)-v_y(x,y))\,dxdy \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(θεώρημα Green)} \\
&= 0\,. \qquad\qquad\qquad \text{(εξισώσεις Cauchy-Riemann: } u_y = -v_x \text{ και } u_x = v_y\text{)}
\end{aligned}$$

□

Ο Goursat, "Acta Mathematica, vol. 4, 1884" και " Transactions of the American Mathematical Society, vol. 1, 1900", απέδειξε το θεώρημα Cauchy χωρίς την υπόθεση ότι η f' είναι συνεχής στον απλά συνεκτικό τόπο G. Αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό και σαν **Θεώρημα Cauchy–Goursat**, παραπέμπουμε στο [23].

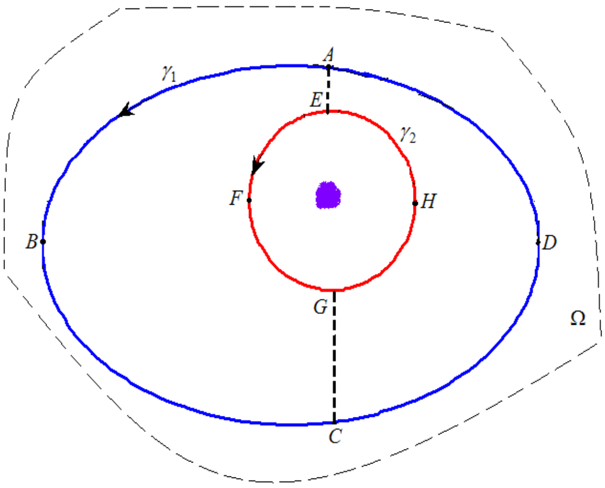
Θεώρημα 4.10 (Θεώρημα Cauchy για απλά συνεκτικό τόπο). *Έστω* $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *αναλυτική συνάρτηση στον απλά συνεκτικό τόπο* G. *Αν* γ *είναι μια κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη στο* G, *τότε*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0\,.$$

Πρόταση 4.11. *Έστω* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *αναλυτική συνάρτηση στον τόπο* Ω *και έστω* γ_1, γ_2 *δύο απλές κλειστές και τμηματικά λείες καμπύλες στο* Ω *με τη* γ_2 *στο εσωτερικό της* γ_1. *Αν οι καμπύλες έχουν* *την ίδια φορά διαγραφής και το χωρίο με σύνορο τις γ_1, γ_2 βρίσκεται ολόκληρο μέσα στο Ω, τότε*

$$\oint_{\gamma_1} f(z)\, dz = \oint_{\gamma_2} f(z)\, dz\,.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι απλές κλειστές και τμηματικά λείες καμπύλες γ_1, γ_2 έχουν θετική φορά διαγραφής.



Από το θεώρημα Cauchy έχουμε

$$\int_{\overrightarrow{ABC}} f(z)\, dz + \int_{\overrightarrow{CG}} f(z)\, dz + \int_{\overrightarrow{GFE}} f(z)\, dz + \int_{\overrightarrow{EA}} f(z)\, dz = 0$$

και

$$\int_{\overrightarrow{AE}} f(z)\, dz + \int_{\overrightarrow{EHG}} f(z)\, dz + \int_{\overrightarrow{GC}} f(z)\, dz + \int_{\overrightarrow{CDA}} f(z)\, dz = 0\,.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left(\int_{\overrightarrow{ABC}} f(z)\, dz + \int_{\overrightarrow{CDA}} f(z)\, dz\right) + \left(\int_{\overrightarrow{CG}} f(z)\, dz + \int_{\overrightarrow{GC}} f(z)\, dz\right)\\ + \left(\int_{\overrightarrow{GFE}} f(z)\, dz + \int_{\overrightarrow{EHG}} f(z)\, dz\right) + \left(\int_{\overrightarrow{EA}} f(z)\, dz + \int_{\overrightarrow{AE}} f(z)\, dz\right) = 0\end{aligned}$$

και επομένως

$$\oint_{\gamma_1} f(z)\, dz + \oint_{\gamma_2} f(z)\, dz = 0 \Leftrightarrow \oint_{\gamma_1} f(z)\, dz = \oint_{\gamma_2} f(z)\, dz\,.$$

$\square$

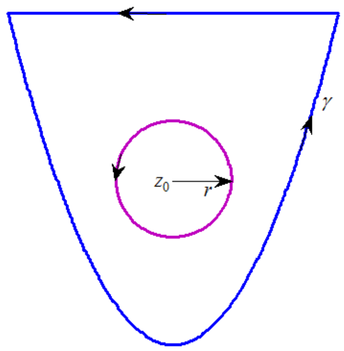
Παράδειγμα 4.12. *Αν το σημείο z_0 βρίσκεται στο εσωτερικό της απλής κλειστής και τμηματικά λείας καμπύλης γ με θετική φορά, τότε*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 1\,.$$

Πράγματι, από την προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0}\,dz\,,$$

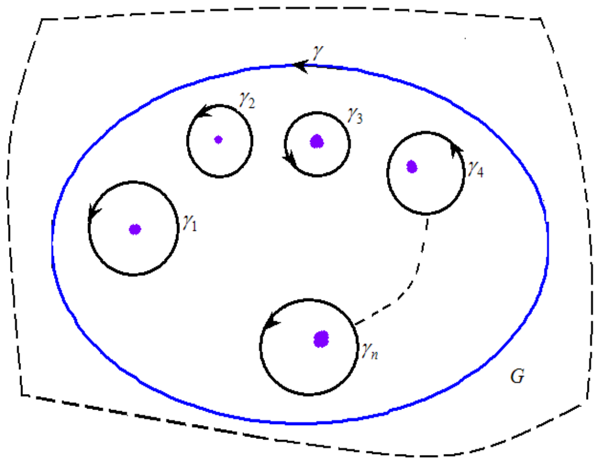
όπου ο κύκλος $|z-z_0| = r$ με κέντρο το z_0 και ακτίνα r βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης γ και έχει την ίδια φορά με τη γ(θετική φορά).



Επομένως

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0}\,dz\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\,d\theta \qquad (z(\theta) = re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi)\\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Η Πρόταση 4.11 γενικεύεται στην περίπτωση που εσωτερικά μιας απλής κλειστής και τμηματικά λείας καμπύλης γ βρίσκονται n το πλήθος απλές κλειστές και τμηματικά λείες καμπύλες, όπως και στο παρακάτω σχήμα.



Θεώρημα 4.13 (Γενικευμένο Θεώρημα Cauchy). *Έστω $f : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στον τόπο G και έστω γ απλή κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη στο G που περικλείει τις απλές, κλειστές και τμηματικά λείες καμπύλες $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Υποθέτουμε ότι οι καμπύλες $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ έχουν την ίδια φορά και ότι κάθε καμπύλη γ_j βρίσκεται στο εξωτερικό κάθε καμπύλης γ_k με $j \neq k$, $j, k = 1, \ldots, n$. Αν το χωρίο που βρίσκεται εσωτερικά της γ και εξωτερικά των $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ βρίσκεται ολόκληρο μέσα στο G, τότε*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz\,.$$

Παράδειγμα 4.14. *Έστω $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_n \neq 0$, πολυώνυμο βαθμού n. Αν οι ρίζες του πολυωνύμου p βρίσκονται στο εσωτερικό της απλής κλειστής και τμηματικά λείας καμπύλης γ, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$\oint_\gamma \frac{1}{p(z)}\,dz\,.$$

Λύση. (i) Αν $p(z) = a_0 \neq 0$, δηλαδή το πολυώνυμο είναι βαθμού 0(σταθερό), τότε από το θεώρημα Cauchy

$$\oint_\gamma \frac{1}{p(z)}\,dz = \oint_\gamma \frac{1}{a_0}\,dz = 0\,.$$

(ii) Αν $p(z) = a_1 z + a_0$, $a_1 \neq 0$, είναι πολυώνυμο βαθμού 1, από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε

$$\oint_\gamma \frac{1}{p(z)}\,dz = \oint_\gamma \frac{1}{a_1 z + a_0}\,dz = \frac{1}{a_1}\oint_\gamma \frac{1}{z + a_0/a_1}\,dz = \frac{2\pi}{a_1}i\,.$$

(iii) Έστω $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, πολυώνυμο βαθμού $n \geq 2$. Τότε από το Παράδειγμα 1.6 υπάρχει $R_0 \geq 1$ τέτοιο ώστε

$$|p(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n\,, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R_0\,.$$

Παίρνουμε το R_0 αρκετά μεγάλο έτσι ώστε η καμπύλη γ να βρίσκεται εσωτερικά του κύκλου $C(0, R_0)$. Τότε για κάθε $R \geq R_0$ από το γενικευμένο θεώρημα Cauchy έχουμε

$$\oint_\gamma \frac{1}{p(z)}\,dz = \oint_{|z|=R} \frac{1}{p(z)}\,dz$$

και κατά συνέπεια

$$\begin{aligned}
\left|\oint_\gamma \frac{1}{p(z)}\,dz\right| &= \left|\oint_{|z|=R} \frac{1}{p(z)}\,dz\right| \\
&\leq \oint_{|z|=R} \frac{1}{|p(z)|}\,|dz| \\
&\leq \frac{2}{|a_n|R^n}\oint_{|z|=R} |dz| && (|p(z)| \geq \tfrac{1}{2}|a_n|R^n \text{ για κάθε } |z| = R \geq R_0) \\
&= \frac{2}{|a_n|R^n}2\pi R = \frac{4\pi}{|a_n|R^{n-1}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,. && (n-1 \geq 1)
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\oint_\gamma \frac{1}{p(z)}\,dz = 0\,.$$

■

4.3 Ολοκληρωτικοί τύποι Cauchy

Ορισμός 4.15. *Έστω γ μια κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη στο $\mathbb{C}$ και έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ ένα σημείο που δεν ανήκει στη καμπύλη γ. Τότε* **ο δείκτης στροφής της καμπύλης** γ **ως προς το σημείο** z_0, *συμβολίζεται $I(\gamma, z_0)$ ή $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$ και ορίζεται ως εξής*

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz\,.$$

Λέμε ότι η κλειστή καμπύλη γ **περιστρέφεται γύρω από το** z_0, *$I(\gamma, z_0)$ φορές.*

Αν το σημείο z_0 βρίσκεται στο εσωτερικό της απλής, κλειστής και τμηματικά λείας καμπύλης γ με θετική φορά, τότε $I(\gamma, z_0) = 1$(Παράδειγμα 4.12). Αν η απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη γ έχει αρνητική φορά, τότε $I(\gamma, z_0) = -1$. Αν $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$, τότε ο μοναδιαίος κύκλος περιστρέφεται γύρω από την αρχή των αξόνων n-φορές και είναι

$$I(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z}\, dz = n\,.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Cauchy αποδεικνύεται ένας πολύ χρήσιμος τύπος, ο ολοκληρωτικός τύπος Cauchy, που μας λέει ότι οι τιμές μιας αναλυτικής συνάρτησης f πάνω σε μια κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη γ που είναι το σύνορο ενός απλά συνεκτικού τόπου G, προσδιορίζουν τις τιμές της f στα σημεία του G.

Θεώρημα 4.16 (Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy). *Έστω $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω γ μια κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη στο Ω που το εσωτερικό της βρίσκεται ολόκληρο μέσα στο Ω. Αν το σημείο $z_0 \in \Omega$ δεν ανήκει στην καμπύλη γ, τότε*

$$f(z_0) \cdot I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\,. \tag{4.4}$$

Ειδικά, αν η **απλή**, *κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη γ στο Ω* **έχει θετική φορά** *και το z_0 είναι στο εσωτερικό της γ, τότε*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\,. \tag{4.5}$$

Παρατήρηση 4.17. *Δεν υπάρχει ανάλογο θεώρημα για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής. Για παράδειγμα, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f_n(x) = x^n$, $0 \leq x \leq 1$, έχουν τις ίδιες τιμές στο σύνορο, δηλαδή $f_n(0) = 0$ και $f_n(1) = 1$. Όμως διαφέρουν για κάθε $x \in (0, 1)$.*

Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy, αποδεικνύεται επαγωγικά ότι η αναλυτική συνάρτηση f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό σύνολο Ω και ισχύει ο παρακάτω τύπος, γνωστός και σαν *ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για παραγώγους.*

Θεώρημα 4.18 (Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για Παραγώγους). *Έστω* $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο* Ω *και έστω* γ *μια κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη στο* Ω *που το εσωτερικό της βρίσκεται ολόκληρο μέσα στο* Ω*. Αν το σημείο* $z_0 \in \Omega$ *δεν ανήκει στην καμπύλη* γ*, τότε*

$$f^{(n)}(z_0) \cdot I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{4.6}$$

όπου $f^{(n)}$ *είναι η* n*-οστή παράγωγος της* f*. Ειδικά, αν η* ***απλή****, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη* γ *στο* Ω ***έχει θετική φορά*** *και το* z_0 *είναι στο εσωτερικό της* γ*, τότε*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{4.7}$$

Παράδειγμα 4.19.

Χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τύπους Cauchy, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^3 - 3z^2}\, dz\,,$$

όπου ο κύκλος C*, με θετική φορά διαγραφής, δεν διέρχεται από τα σημεία* $z = 0$ *και* $z = 3$*. Να εξεταστούν όλες οι δυνατές περιπτώσεις.*

Λύση. Είναι

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^2(z-3)}\, dz\,.$$

(i) Ο κύκλος C δεν περιέχει τα σημεία 0 και 3. Από το θεώρημα Cauchy $I = 0$.

(ii) Ο κύκλος C περιέχει μόνο το σημείο 0. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$I = \frac{1!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z/(z-3)}{z^2}\, dz = \left(\frac{e^z}{z-3}\right)'\bigg|_{z=0} = \frac{ze^z - 4e^z}{(z-3)^2}\bigg|_{z=0} = -\frac{4}{9}\,.$$

(iii) Ο κύκλος C περιέχει μόνο το σημείο 3. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z/z^2}{z-3}\, dz = \frac{e^z}{z^2}\bigg|_{z=3} = \frac{e^3}{9}\,.$$

(iv) Ο κύκλος C περιέχει τα σημεία 0 και 3. Έστω C_1 και C_2 δύο κύκλοι που δεν τέμνονται και βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου C, έτσι ώστε ο C_1 περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο 0

και ο C_2 περιέχει στο εσωτερικό του μόνο το σημείο 3. Τότε,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{e^z}{z^2(z-3)}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{e^z}{z^2(z-3)}\,dz && \text{(γενικευμένο θεώρημα Cauchy)} \\ &= -\frac{4}{9} + \frac{e^3}{9} = \frac{e^3-4}{9}\,. && \text{(περιπτώσεις } (ii) \text{ και } (iii)) \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 4.20 (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας). *Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$ έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$. Επομένως, κάθε μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$ έχει ακριβώς n ρίζες στο* $\mathbb{C}$

Απόδειξη. Έστω $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$. Υποθέτουμε ότι $p(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επειδή το p είναι ακέραια συνάρτηση που δεν μηδενίζεται, η $1/p$ είναι επίσης ακέραια συνάρτηση και από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy

$$\oint_{|z|=R} \frac{1}{zp(z)}\,dz = \oint_{|z|=R} \frac{1/p(z)}{z}\,dz = \frac{2\pi i}{p(0)} \neq 0\,.$$

Από το Παράδειγμα 1.6 υπάρχει $r \geq 1$ τέτοιο ώστε

$$|p(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n\,, \quad \text{για κάθε } |z| \geq r\,.$$

Επομένως, για κάθε $R \geq r$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \neq \left|\frac{2\pi i}{p(0)}\right| &= \left|\oint_{|z|=R} \frac{1}{zp(z)}\,dz\right| \\ &\leq \oint_{|z|=R} \frac{1}{|z||p(z)|}\,|dz| \\ &\leq \frac{2}{R\cdot|a_n|R^n}\oint_{|z|=R} |dz| && (|p(z)| \geq \tfrac{1}{2}|a_n|R^n \text{ για κάθε } |z| = R \geq r) \\ &= \frac{2}{|a_n|R^{n+1}}2\pi R = \frac{4\pi}{|a_n|R^n} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

πού είναι άτοπο. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι το πολυώνυμο p δεν έχει ρίζα. Άρα, το πολυώνυμο p έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$. □

Θεώρημα 4.21 (Θεώρημα μέσης τιμής του Gauss για αναλυτικές συναρτήσεις). *Έστω f αναλυτική συνάρτηση στον απλά συνεκτικό τόπο G, έστω $z_0 \in G$ και έστω ο κύκλος $C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ βρίσκεται μέσα στο G. Τότε,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt\,.$$

Απόδειξη. Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy έχουμε

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz\,,$$

όπου $C^+(z_0, r)$ είναι ο κύκλος κέντρου z_0 ακτίνας $r > 0$ με θετική φορά διαγραφής. Επειδή $z = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, είναι η παραμετρική εξίσωση του κύκλου, έχουμε

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + re^{it}\right)}{re^{it}} ire^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt\,.$$

□

Πόρισμα 4.22 (Θεώρημα μέσης τιμής του Gauss για αρμονικές συναρτήσεις). *Έστω u αρμονική συνάρτηση στον απλά συνεκτικό τόπο G, έστω $z_0 \in G$ και έστω ο κύκλος $C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ βρίσκεται μέσα στο G. Τότε,*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{it}\right) dt\,.$$

Απόδειξη. Ως γνωστόν στον απλά συνεκτικό τόπο G υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f, τέτοια ώστε $u = \Re f$ στο G. Τότε από το προηγούμενο θεώρημα είναι

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt\,.$$

Επομένως

$$u(z_0) = \Re f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re\left\{f\left(z_0 + re^{it}\right)\right\} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{it}\right) dt\,.$$

□

Παράδειγμα 4.23. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Αν ℓ είναι το μήκος της εικόνας του γ μέσω της f, να αποδειχθεί ότι*

$$\ell \geq 2\pi|f'(0)|\,.$$

Απόδειξη. Η καμπύλη $w = f \circ \gamma$ με εξίσωση $w(t) = f(\gamma(t)) = f(e^{it})$, $0 \leq t \leq 2\pi$, είναι η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου μέσω της συνάρτησης f. Αν ℓ είναι το μήκος της καμπύλης $w = f \circ \gamma$, τότε

$$\ell = \int_0^{2\pi} |w'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} |f'(e^{it})ie^{it}|\,dt = \int_0^{2\pi} |f'(e^{it})|\,dt\,.$$

Επειδή από το Θεώρημα 4.21

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(e^{it})\,dt\,,$$

έχουμε

$$|f'(0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(e^{it})\,dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(e^{it})|\,dt = \frac{1}{2\pi}\ell$$

και άρα $\ell \geq 2\pi|f'(0)|$. □

Υποθέτουμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης f στο πεδίο Ω είναι **ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης**. Δηλαδή αν γ_1, γ_2 είναι δύο οποιεσδήποτε τμηματικά λείες καμπύλες στο Ω με την ίδια αρχή και το ίδιο πέρας, τότε

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,.$$

Αν $z_0, z \in \Omega$, ο συμβολισμός

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$$

υποδηλώνει ότι η ολοκλήρωση της f γίνεται πάνω σε μια οποιαδήποτε τμηματικά λεία καμπύλη του Ω με αρχή το z_0 και πέρας το z.

Υπενθυμίζουμε ένα βασικό θεώρημα της "Διανυσματικής Ανάλυσης".

Θεώρημα 4.24 (Βασικό θεώρημα της Διανυσματικής Ανάλυσης). *Έστω* $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbf{F} = (P, Q)$, **συνεχές** *διανυσματικό πεδίο στο ανοικτό συνεκτικό σύνολο* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :*

(1) Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\mathbf{F}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης.

(2) Για κάθε κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη γ στο Ω είναι

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0\,.$$

(3) Υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ με

$$\nabla\Phi(x,y) = \mathbf{F} = (P(x,y), Q(x,y))\,, \quad \textit{για κάθε } (x,y) \in \Omega\,.$$

Αν επιπλέον το Ω είναι **απλά συνεκτικό** *σύνολο και το $\mathbf{F}$ είναι κλάσης C^1, δηλαδή οι μερικές παράγωγοι των P, Q είναι συνεχείς στο Ω, τότε οι παραπάνω προτάσεις είναι ισοδύναμες με την πρόταση:*

(4) Το πεδίο $F : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι **αστρόβιλο** *στο Ω, δηλαδή*

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \right\}\,.$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι ένα ανάλογο θεώρημα ισχύει και στη μιγαδική ανάλυση. Για την απόδειξή του χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 4.25. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση στον τόπο Ω και έστω $z_0 \in \Omega$. Υποθέτουμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης. Αν*

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta\,,$$

τότε η F είναι αναλυτική στο Ω με $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.

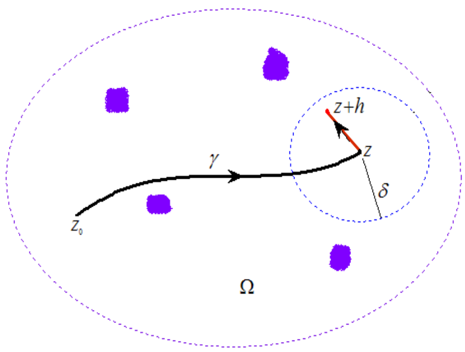
Απόδειξη. Έστω $z \in \Omega$. Επειδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης, η συνάρτηση F είναι καλά ορισμένη στο Ω. Το Ω είναι συνεκτικό σύνολο και επομένως υπάρχει τμηματικά λεία καμπύλη γ με αρχή το z_0 πέρας το z και η οποία βρίσκεται μέσα στο Ω. Είναι

$$F(z) := \int_{\gamma} f(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $z \in \Omega$ και επομένως

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } |\zeta - z| < \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon\,.$$

Παίρνουμε το $\delta > 0$ αρκετά μικρό έτσι ώστε ο ανοικτός δίσκος $D(z, \delta)$ να περιέχεται στο Ω(το Ω είναι ανοικτό σύνολο). Έστω $0 < |h| < \delta$, οπότε το $z + h \in D(z, \delta)$.



Είναι

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma + [z, z+h]} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{\gamma} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{[z, z+h]} f(\zeta)\, d\zeta\,,$$

όπου το ευθύγραμμο τμήμα $[z, z+h] = \{(1-t)z + t(z+h) = z + th : t \in [0, 1]\}$ ανήκει στον ανοικτό δίσκο $D(z,\delta)$. Τότε

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta - f(z)\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta - f(z)\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} d\zeta\right| \qquad (\textstyle\int_{[z,z+h]} d\zeta = h) \\
&= \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]} (f(\zeta)-f(z))\,d\zeta\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\int_{[z,z+h]} |f(\zeta)-f(z)|\,|d\zeta| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{|h|}\int_{[z,z+h]} |d\zeta| \\
&= \frac{\varepsilon}{|h|}|h| = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ τέτοιο ώστε για κάθε } h \text{ με } 0<|h|<\delta \Rightarrow \left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|<\varepsilon\,.$$

Άρα

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z) \text{ και επομένως } F'(z)=f(z)\,.$$

□

Θεώρημα 4.26 (Βασικό θεώρημα της Μιγαδικής Ανάλυσης). *Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$* **συνεχής** *συνάρτηση στον τόπο(ανοικτό συνεκτικό σύνολο) $\Omega\subseteq\mathbb{C}$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(1) Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης.

(2) Για κάθε κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη γ στο Ω είναι

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0\,.$$

(3) Υπάρχει αναλυτική συνάρτηση $F:\Omega\to\mathbb{C}$ με $F'(z)=f(z)$ για κάθε $z\in\Omega$.

Αν επιπλέον το Ω είναι τόπος **απλά συνεκτικός***, τότε οι παραπάνω προτάσεις είναι ισοδύναμες με την πρόταση:*

(4) Η συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο Ω.

Απόδειξη. $\underline{(1) \Leftrightarrow (2)}$ Η απόδειξη είναι εύκολη(σχεδόν προφανής!).

$\underline{(1) \Rightarrow (3)}$ Είναι το Λήμμα 4.25.

$\underline{(3) \Rightarrow (2)}$ Επειδή η συνάρτηση $F : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική με $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$, από το θεμελιώδες θεώρημα ολοκλήρωσης έχουμε

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = \oint_\gamma F'(z)\, dz = 0\,.$$

$\underline{(4) \Rightarrow (2)}$ Είναι το θεώρημα Cauchy.

$\underline{(3) \Rightarrow (4)}$ Επειδή η συνάρτηση F είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω, από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έπεται ότι η F είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο Ω και κατά συνέπεια η $f = F'$ είναι αναλυτική στο Ω. □

Θα εφαρμόσουμε το σημαντικό Θεώρημα 4.26 προκειμένου να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα Fresnel τα οποία είναι γνωστό(από τη θεωρία των γενικευμένων ολοκληρωμάτων) ότι συγκλίνουν.

Παράδειγμα 4.27. (Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων Fresnel) *Να αποδειχθεί ότι*

$$\int_0^\infty \cos x^2\, dx = \int_0^\infty \sin x^2\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\,.$$

Σημείωση. Ως γνωστόν,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-2x^2}\, dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt \qquad \text{(αντικατάσταση } t = \sqrt{2}x\text{)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\,.\end{aligned}$$

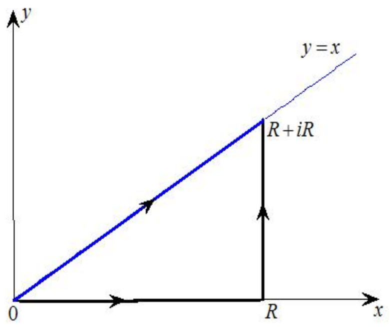
Απόδειξη. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$e^{ix^2} = \cos x^2 + i \sin x^2\,,$$

είναι φυσικό να θεωρήσουμε την ακέραια συνάρτηση(αναλυτική στο $\mathbb{C}$)

$$f(z) = e^{iz^2}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Ολοκληρώνουμε την f πάνω στο ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία 0, R και $R + iR$, $R > 0$.



Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ανεξαρτησία του δρόμου ολοκλήρωσης και επομένως

$$\int_{[0,\,R]} e^{iz^2}\,dz + \int_{[R,\,R+iR]} e^{iz^2}\,dz = \int_{[0,\,R+iR]} e^{iz^2}\,dz\,. \tag{4.8}$$

Είναι

$$\int_{[0,\,R]} e^{iz^2}\,dz = \int_0^R e^{ix^2}\,dx\,, \qquad (z = x,\ 0 \le x \le R)$$

$$\int_{[R,\,R+iR]} e^{iz^2}\,dz = i\int_0^R e^{i(R+iy)^2}\,dy = ie^{iR^2}\int_0^R e^{-2Ry-iy^2}\,dy\,, \qquad (z = R+iy,\ 0 \le y \le R)$$

$$\int_{[0,\,R+iR]} e^{iz^2}\,dz = (1+i)\int_0^R e^{-2x^2}\,dx\,, \qquad (z = x+ix,\ 0 \le x \le R)$$

οπότε από την (4.8) έχουμε

$$\int_0^R e^{ix^2}\,dx + ie^{iR^2}\int_0^R e^{-2Ry-iy^2}\,dy = (1+i)\int_0^R e^{-2x^2}\,dx\,. \tag{4.9}$$

Επειδή

$$\begin{aligned}
\left| ie^{iR^2}\int_0^R e^{-2Ry-iy^2}\,dy \right| &= \left| \int_0^R e^{-2Ry-iy^2}\,dy \right| \\
&\le \int_0^R \left| e^{-2Ry-iy^2} \right| dy \\
&= \int_0^R e^{-2Ry}\,dy \\
&= \frac{-1}{2R} e^{-2Ry} \Big|_{y=0}^{y=R} \\
&= \frac{1}{2R}\left(1 - e^{-2R^2}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,,
\end{aligned}$$

είναι $\lim_{R\to\infty} ie^{iR^2}\int_0^R e^{-2Ry-iy^2}\,dy = 0$. Επομένως, παίρνοντας στη (4.9) το $R\to\infty$ έχουμε

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx = (1+i)\int_0^\infty e^{-2x^2}\,dx = (1+i)\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

και ισοδύναμα

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx + i\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + i\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\,.$$

Άρα,

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\,.$$

□

Παράδειγμα 4.28. *Υποθέτουμε ότι η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση*

$$f'(x) + 2ixf(x) = e^{2ix} \text{ με } f(0) = 0\,.$$

Τότε

$$\lim_{x\to+\infty} e^{ix^2}(f(x) - f(-x)) = e^{-i+i\pi/4}\sqrt{\pi}\,.$$

Λύση. Πολλαπλασιάζοντας τη διαφορική εξίσωση με e^{ix^2} παίρνουμε

$$e^{ix^2}f'(x) + 2ixe^{ix^2}f(x) = e^{ix^2+2ix} \Leftrightarrow (e^{ix^2}f(x))' = e^{ix^2+2ix}$$

και επομένως

$$e^{ix^2}f(x) = \int_0^x e^{it^2+2it}\,dt + c\,.$$

Επειδή $f(0)=0$ είναι $c=0$ και άρα

$$e^{ix^2}f(x) = \int_0^x e^{it^2+2it}\,dt\,.$$

Αντικαθιστώντας όπου x το $-x$ έχουμε

$$e^{ix^2}f(-x) = \int_0^{-x} e^{it^2+2it}\,dt\,.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned}
e^{ix^2}(f(x) - f(-x)) &= \int_{-x}^{x} e^{it^2+2it}\,dt \\
&= e^{-i}\int_{-x}^{x} e^{i(t+1)^2}\,dt \\
&= e^{-i}\int_{-x+1}^{x+1} e^{iu^2}\,du && \text{(αντικατάσταση } u = t+1) \\
&= e^{-i}\int_{0}^{x+1} e^{iu^2}\,du + e^{-i}\int_{-x+1}^{0} e^{iu^2}\,du \\
&= e^{-i}\int_{0}^{x+1} e^{iu^2}\,du + e^{-i}\int_{0}^{x-1} e^{iv^2}\,dv\,. && \text{(αντικατάσταση } v = -u)
\end{aligned}$$

Όμως στο προηγούμενο παράδειγμα αποδείξαμε ότι

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx = (1+i)\frac{\sqrt{2\pi}}{4} = e^{i\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Άρα,

$$\lim_{x\to+\infty} e^{ix^2}(f(x) - f(-x)) = 2e^{-i}e^{i\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = e^{-i+i\pi/4}\sqrt{\pi}\,.$$

■

Η συνεπαγωγή $(2) \Rightarrow (4)$ στο Θεώρημα 4.26 ισχύει και για ανοικτά σύνολα $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ (όχι κατανάγκη συνεκτικά) και είναι γνωστό σαν "θεώρημα Morera". Μάλιστα ισχύει και στην περίπτωση που το ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f είναι 0 πάνω στο σύνορο κάθε τριγώνου που περιέχεται στο Ω. Το θεώρημα Morera είναι "μερικό αντίστροφο του θεωρήματος Cauchy". Δεν είναι ακριβώς το αντίστροφο του θεωρήματος Cauchy επειδή υποθέτουμε ότι η f είναι *συνεχής* στο Ω.

Θεώρημα 4.29 (Morera). *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο Ω. Αν*

$$\oint_{\partial\Delta} f(\zeta)\,d\zeta = 0$$

πάνω στο σύνορο $\partial\Delta$ κάθε τριγώνου Δ που περιέχεται στο Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω.

Απόδειξη. Έστω $z_0 \in \Omega$. Επειδή το Ω είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει περιοχή $D(z_0, r)$ του z_0 με $D(z_0, r) \subseteq \Omega$. Θα αποδείξουμε ότι η f έχει παράγουσα F στο $D(z_0, r)$.

Αν $z \in D(z_0, r)$, ορίζουμε τη συνάρτηση F με

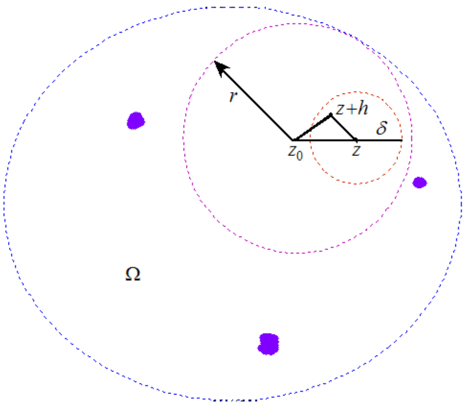
$$F(z) := \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Η F είναι καλά ορισμένη με $F(z_0) = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο z,

υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε ζ με $|\zeta - z| < \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$.

(παίρνουμε το $\delta \leq r - |z - z_0|$)

Έστω $0 < |h| < \delta$, οπότε το $z + h \in D(z, \delta)$.



Από την υπόθεση είναι

$$\int_{[z_0,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z+h,z]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z,z_0]} f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

και κατά συνέπεια

$$\int_{[z_0,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Ισοδύναμα,

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Επειδή

$$f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f(z)\, d\zeta\,,$$

είναι

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} \left(f(\zeta) - f(z)\right)\, d\zeta\,.$$

Τότε

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]}(f(\zeta)-f(z))\,d\zeta\right|\\ &\leq \frac{1}{|h|}\int_{[z,z+h]}|f(\zeta)-f(z)|\,|d\zeta|\\ &\leq \frac{\varepsilon}{|h|}\int_{[z,z+h]}|d\zeta|\\ &= \frac{\varepsilon}{|h|}|h| = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ τέτοιο ώστε για κάθε } h \text{ με } 0<|h|<\delta \Rightarrow \left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|<\varepsilon\,.$$

Δηλαδή

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z) \text{ και επομένως } F'(z)=f(z) \text{ για κάθε } z\in D(z_0,r)\,.$$

Άρα η F είναι αναλυτική στο $D(z_0,r)$ και κατά συνέπεια η F είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $D(z_0,r)$. Ειδικά η $F''(z)=f'(z)$ υπάρχει για κάθε $z\in D(z_0,r)$ και επομένως η f είναι αναλυτική στο z_0. Επειδή το z_0 είναι τυχαίο σημείο του Ω, αποδείξαμε ότι η f είναι αναλυτική στο Ω. □

Παρατήρηση 4.30. *Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο Ω. Το θεώρημα Morera ισχύει και στην περίπτωση που είναι*

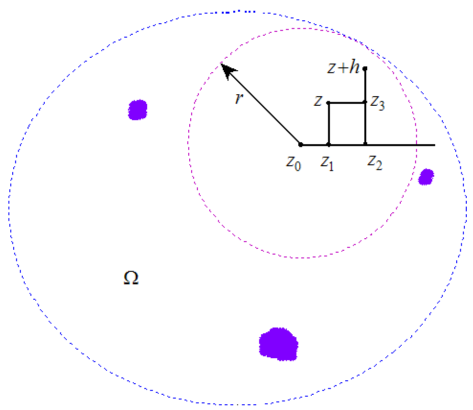
$$\oint_{\partial R} f(\zeta)\,d\zeta = 0$$

πάνω στο σύνορο ∂R κάθε ορθογώνιου παραλληλόγραμμου R που περιέχεται στο Ω.

Πράγματι, έστω $z_0\in\Omega$ και έστω $D(z_0,r)$ περιοχή του z_0 με $D(z_0,r)\subseteq\Omega$. Αν $z\in D(z_0,r)$, ορίζουμε τη συνάρτηση F με

$$F(z):=\int_{[z_0,z_1]+[z_1,z]} f(\zeta)\,d\zeta\,,$$

δηλαδή ολοκληρώνουμε την f πρώτα πάνω στο οριζόντιο ευθ. τμήμα $[z_0,z_1]\in D(z_0,r)$ και μετά πάνω στο κάθετο ευθ. τμήμα $[z_1,z]\in D(z_0,r)$.



Αν $z+h \in D(z_0,r)$*, σχηματίζουμε τα οριζόντια ευθ. τμήματα* $[z_1,z_2],[z,z_3] \in D(z_0,r)$ *και το κάθετο ευθ. τμήμα* $[z_2,z+h] \in D(z_0,r)$*. Από τον ορισμό της* F *είναι*

$$F(z+h) := \int_{[z_0,z_2]+[z_2,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta\,.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
F(z+h) &= \int_{[z_0,z_2]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z_2,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta \\
&= \int_{[z_0,z_1]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z_1,z_2]+[z_2,z_3]+[z_3,z]+[z,z_1]} f(\zeta)\,d\zeta \\
&\quad + \int_{[z_1,z]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z,z_3]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z_3,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta \\
&= \int_{[z_0,z_1]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z_1,z]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z,z_3]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z_3,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta \\
&\qquad\qquad \left(\int_{[z_1,z_2]+[z_2,z_3]+[z_3,z]+[z,z_1]} f(\zeta)\,d\zeta = 0\right) \\
&= F(z) + \int_{[z,z_3]} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z_3,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta\,.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z_3]+[z_3,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta$$

και άρα

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{[z,z_3]+[z_3,z+h]} \left(f(\zeta)-f(z)\right)\,d\zeta\,.$$

Στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 4.29.

Ασκήσεις

1. Έστω $0 < r < R$.

   (α΄) Δείξτε ότι
   $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{R+z}{(R-z)z}\,dz = 1\,.$$

   (β΄) Χρησιμοποιώντας το (α΄) δείξτε ότι
   $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos\theta}\,d\theta = 1\,.$$

2. Χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τύπους Cauchy υπολογίστε το ολοκλήρωμα
   $$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos z}{z(z-\pi)^3}\,dz\,,$$
   όπου C κύκλος με θετική φορά διαγραφής που δεν διέρχεται από τα σημεία $z=0$ και $z=\pi$. Εξετάστε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

3. Αν γ είναι απλή κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη που περιέχει τα σημεία -1 και 1 και f είναι ακέραια συνάρτηση, δείξτε ότι
   $$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^2-1}\,dz = \pi i\left(f(1)-f(-1)\right)\,.$$

4. Αν $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, είναι πολυώνυμο βαθμού n, δείξτε ότι
   $$\oint_{|z|=R} \frac{P(z)}{(z-\zeta)^{n+2}}\,dz = 0\,,$$
   για κάθε ζ με $|\zeta| \neq R$.

5. Έστω
   $$P_n(z) := \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$$
   το *πολυώνυμο Legendre* βαθμού n, $n = 0,1,2,\ldots$. Να αποδειχθεί ότι
   $$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\oint_\gamma \frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta\,,$$
   όπου γ απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη που περιέχει το σημείο $z \in \mathbb{C}$. Να υπολογιστεί το $P_n(-1)$.

6. Έστω γ_R το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με κέντρο 0 ακτίνα $R > 0$, $R \neq 1$ και θετική φορά. Δείξτε ότι
$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\, dz = \begin{cases} -2\arctan R & \text{αν } 0 < R < 1 \\ \pi - 2\arctan R & \text{αν } R > 1 \,. \end{cases}$$

7. Έστω γ απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη στο $\mathbb{C}$ με θετική φορά διαγραφής. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό της γ και ότι τα $z_1, z_2, \ldots, z_n$ είναι σημεία στο εσωτερικό της γ διάφορα ανά δύο. Αν
$$Q(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)\,,$$
δείξτε ότι το
$$P(z) := \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{Q(w)}\frac{Q(w) - Q(z)}{w - z}\, dw$$
είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $n - 1$ που έχει τις ίδιες τιμές με την f στα σημεία $z_1, z_2, \ldots, z_n$, δηλαδή $P(z_k) = f(z_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

8. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz\,, \quad n \in \mathbb{N}$$
και στη συνέχεια δείξτε ότι
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta - \sin\theta)\, d\theta = \frac{2\pi}{n!}\,.$$

9. Δείξτε ότι
$$\int_0^{2\pi} e^{e^{it} - 2it}\, dt = 2\pi\,.$$

10. Αν $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\, d\theta = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{1 + z + z^2 + \cdots + z^{2n-2}}{z^n}\, dz = \begin{cases} 2\pi & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ 0 & \text{αν } n \text{ άρτιος}\,. \end{cases}$$

11. Έστω $|z| = r$ κύκλος με κέντρο 0, ακτίνα $r > 0$ και θετική φορά διαγραφής. Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους δείξτε ότι
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(re^{i\theta})}{r^{2n}e^{i2n\theta}}\, d\theta = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,.$$

12. Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$, δείξτε ότι
$$2f(0) + f'(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\,dt$$
και
$$2f(0) - f'(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\,dt\,.$$

13. Έστω $f = u + iv$ αναλυτική συνάρτηση στον ανοικτό δίσκο $D(0,r)$, $r > 1$. Αν $f(0) = 0$, δείξτε ότι
$$\int_0^{2\pi} u(\cos t, \sin t)^4\,dt \le 36\int_0^{2\pi} v(\cos t, \sin t)^4\,dt$$
και
$$\int_0^{2\pi} v(\cos t, \sin t)^4\,dt \le 36\int_0^{2\pi} u(\cos t, \sin t)^4\,dt\,.$$
<u>*Υπόδειξη*</u>. Εφαρμογή του τύπου Cauchy για την f^4 και $z_0 = 0$.

14. Χρησιμοποιώντας το γενικευμένο θεώρημα Cauchy και τους ολοκληρωτικούς τύπους Cauchy, δείξτε ότι
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{z(z-1)^2}\,dz = 1 - \sin 1 - \cos 1\,.$$

15. Έστω $p \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι
$$(a)\quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left(z - \frac{1}{z}\right)^p\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^p}{z^{p+1}}\,dz = \begin{cases}(-1)^n\binom{2n}{n} & \text{αν } p = 2n\\ 0 & \text{αν } p = 2n-1\end{cases}$$
και
$$(b)\quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left(z + \frac{1}{z}\right)^p\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)^p}{z^{p+1}}\,dz = \begin{cases}\binom{2n}{n} & \text{αν } p = 2n\\ 0 & \text{αν } p = 2n-1\,.\end{cases}$$
<u>*Εφαρμογή*</u>. Χρησιμοποιώντας το (a) ή το (b), δείξτε ότι
$$\int_0^{2\pi}\sin^p t\,dt = \int_0^{2\pi}\cos^p t\,dt = \begin{cases}\frac{2\pi}{4^n}\binom{2n}{n} & \text{αν } p = 2n\\ 0 & \text{αν } p = 2n-1\,.\end{cases}$$
<u>*Σημείωση*</u>. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling ή το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue, έχουμε ότι
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\sin^{2n} t\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\cos^{2n} t\,dt = 0\,.$$

16. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής του Gauss για την ακέραια συνάρτηση $w = \sin^2 z$ στον κλειστό δίσκο: $\left|z - \frac{\pi}{6}\right| \leq 2$, δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{6} + 2e^{i\theta}\right) d\theta = \frac{\pi}{2}\,.$$

17. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $w = 1/z$, δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \exp\left(\exp\frac{1}{z}\right) dz = e\,.$$

18. Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$, δείξτε ότι

$$\oint_{|z|=1} z \cdot \overline{f(z)}\, dz = \pi i \cdot \overline{f''(0)}\,.$$

19. Έστω f αναλυτική συνάρτηση πάνω και στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ και έστω $a \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{\overline{f(z)}}{z-a}\, dz = \begin{cases} \overline{f(0)} & \text{αν } |a| < 1 \\ \overline{f(0)} - \overline{f(1/\overline{a})} & \text{αν } |a| > 1\,. \end{cases}$$

20. Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει τον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, δείξτε ότι για κάθε z, $|z| < R$, είναι

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\frac{Re^{it}}{Re^{it} - z} + \frac{\overline{z}}{Re^{-it} - \overline{z}}\right] f(Re^{it})\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} f(Re^{it})\, dt\,. \end{aligned}$$

21. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$. Αν $0 < r < 1$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{f(z) - f(-z)}{z^2}\, dz\,.$$

Αν

$$d = \sup_{z,w \in D(0,1)} |f(z) - f(w)|$$

είναι η διάμετρος του πεδίου τιμών της f, δείξτε ότι

$$|f'(0)| \leq \frac{d}{2}\,.$$

22. Έστω f αναλυτική συνάρτηση πάνω και στο εσωτερικό G της απλής, κλειστής και τμηματικά λεία καμπύλης $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ που περιέχει το σημείο $z = a$.

    (α΄) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι
    $$f(a)^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)^n}{z-a}\, dz\,.$$

    (β΄) Αν $M = \max\{|f(z)| : z \in \gamma^* = \gamma([\alpha, \beta])\}$, ℓ είναι το μήκος της καμπύλης γ και $d = \inf_{z\in\gamma^*} |a - z|$ είναι η απόσταση του a από την καμπύλη γ, δείξτε ότι
    $$|f(a)|^n \le \frac{\ell M^n}{2\pi d}\,.$$

    (γ΄) Χρησιμοποιώντας το (β΄) δείξτε ότι $|f(a)| \le M$. Δηλαδή η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο του G που είναι η καμπύλη γ(παραπέμπουμε στην "*αρχή μεγίστου*", Θεώρημα 4.71).

23. Έστω f αναλυτική συνάρτηση σ' ένα τόπο G που περιέχει τον κλειστό δίσκο $\overline{D}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le R\}$. Αν $|f(z)| \le M$ για κάθε $|z - z_0| = R$, δείξτε ότι για κάθε $z_1, z_2 \in \left\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le \frac{R}{2}\right\}$ έχουμε
    $$|f(z_1) - f(z_2)| \le \frac{4M}{R} |z_1 - z_2|\,.$$

24. (**Μια ανισότητα του Riemann**) Έστω γ απλή κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη και έστω $f = u + iv$ αναλυτική συνάρτηση πάνω και στο εσωτερικό G της καμπύλης γ. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green δείξτε ότι
    $$\begin{aligned}\oint_\gamma u\, dv &= \oint_\gamma (uv_x\, dx + uv_y\, dy)\\ &= \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy = \iint\limits_G |f'(z)|^2\, dxdy > 0\,.\end{aligned}$$
    Επομένως το ολοκλήρωμα $\oint_\gamma u\, dv$ μηδενίζεται μόνο αν η f είναι σταθερή στο G.

25. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0, 1) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \le 1\}$. Αν $0 < |z| < 1$, δείξτε ότι
    $$2\pi i f(z) = \oint_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \oint_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - 1/\overline{z}}\, d\zeta\,. \qquad (*)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, να δείξετε τον *ολοκληρωτικό τύπο Poisson*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} f(e^{it})\, dt$$

και ισοδύναμα

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} f(e^{it})\, dt\,, \quad 0<r<1\,.$$

26. (**Ολοκληρωτικός τύπος του Poisson για το ημιεπίπεδο**) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f=u+iv$ είναι αναλυτική στο $A=\{z\in\mathbb{C} : \Im z \geq 0\}$, δηλαδή στο άνω ημιεπίπεδο και στον πραγματικό άξονα. Αν $|f(\zeta)|\leq M$, για κάθε $\zeta\in A$ και $z=x+iy$, $y>0$, τότε

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\, d\xi\,, \quad y>0\,. \tag{$*$}$$

Δηλαδή η αρμονική συνάρτηση u στο άνω ημιεπίπεδο δίνεται από τις τιμές της στον πραγματικό άξονα. Για την απόδειξη του τύπου $(*)$ να δείξετε τα παρακάτω βήματα.

(α΄) Έστω $\gamma=[-R,R]\cup\gamma_R$ η κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη του άνω ημιεπιπέδου που περιέχει το $z=x+iy$, $y>0$, όπου γ_R το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με κέντρο 0, ακτίνα $R>0$ και θετική φορά διαγραφής. Τότε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta \quad \text{και} \quad 0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-\overline{z}}\, d\zeta\,.$$

(β΄) Αφαιρώντας τις παραπάνω εξισώσεις να συμπεράνετε ότι

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} f(\xi)\frac{2i\Im z}{|\xi-z|^2}\, d\xi + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_R} f(\zeta)\frac{2i\Im z}{(\zeta-z)(\zeta-\overline{z})}\, d\zeta\,.$$

(γ΄)

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_R} f(\zeta)\frac{2i\Im z}{(\zeta-z)(\zeta-\overline{z})}\, d\zeta\right| \leq My\frac{R}{(R-|z|)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,.$$

(δ΄)

$$u(x,y) = \Re f(z) = \Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\frac{2i\Im z}{|\xi-z|^2}\, d\xi\right) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\, d\xi\,.$$

4.4 Η Μιγαδική Λογαριθμική Συνάρτηση

Ορισμός 4.31. *Έστω η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο $D \subseteq \mathbb{C}$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση F είναι ένας* **αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου της** *$f(z)$ στο $D \subseteq \mathbb{C}$, αν*

(1) Η F είναι αναλυτική στο D

και

(2) $\exp(F(z)) = f(z)$, δηλαδή $e^{F(z)} = f(z)$ για κάθε $z \in D$.

Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $F(z) = \log_D f(z)$ ή $F(z) = \log f(z)$(αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση είναι ορισμένη στο D).

Αν η συνάρτηση F είναι ένας αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου της $f(z)$, τότε και η

$$G(z) = F(z) + 2k\pi i\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

θα είναι ένας αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου της $f(z)$.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση F είναι ένας **αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου του** z στο $D \subseteq \mathbb{C}$, αν

(1′) Η F είναι αναλυτική στο D

και

(2′) $\exp(F(z)) = z$, δηλαδή $e^{F(z)} = z$ για κάθε $z \in D$.

Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $F(z) = \log_D z$.

Αν η συνάρτηση F είναι ένας αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου του z, τότε και η

$$G(z) = F(z) + 2k\pi i\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

θα είναι ένας αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου του z.

Ας σημειωθεί ότι πάντοτε υπάρχει μια συνάρτηση F που να ικανοποιεί τη (2), θέτουμε

$$F(z) = \ln|f(z)| + i\arg(f(z))\,. \tag{4.10}$$

Όμως το $\arg(f(z))$ δεν είναι μια καλά ορισμένη συνάρτηση. Ακόμη όμως και αν ορίσουμε το $\arg(f(z))$, η συνάρτηση που ορίστηκε στην (4.10) μπορεί να μην είναι αναλυτική(ούτε καν συνεχής) στο D. Αν όμως το D είναι απλά συνεκτικός τόπος και αν η f δεν μηδενίζεται στο D, τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα αναλυτικό κλάδο του λογαρίθμου της $f(z)$ στο D.

Θεώρημα 4.32 (Αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου μιας συνάρτησης). *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : D \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στον απλά συνεκτικό τόπο $D \subseteq \mathbb{C}$ με $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$. Επιλέγουμε το $z_0 \in D$ και παίρνουμε μία τιμή του $\log f(z_0)$(ισοδύναμα, παίρνουμε ένα $c_0 \in \mathbb{C}$ με $e^{c_0} = f(z_0)$). Ορίζουμε τη συνάρτηση $F : D \to \mathbb{C}$ με*

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta + \log f(z_0)\,. \tag{4.11}$$

Τότε η F είναι ένας αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου της $f(z)$, δηλαδή η F είναι αναλυτική στο D με $e^{F(z)} = f(z)$ για κάθε $z \in D$. Επιπλέον,

$$F'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}\,, \quad \text{για κάθε } z \in D\,.$$

Απόδειξη. Επειδή η συνάρτηση f'/f είναι αναλυτική στον απλά συνεκτικό τόπο D, από το Θεώρημα 4.26 το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f'/f είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης και επομένως από το Λήμμα 4.25 η συνάρτηση F είναι αναλυτική στο D με

$$F'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}\,, \quad \text{για κάθε } z \in D\,.$$

Έστω

$$G(z) := f(z)e^{-F(z)}\,, \quad z \in D\,.$$

Η G είναι αναλυτική στο D με

$$G'(z) = f'(z)e^{-F(z)} - f(z)F'(z)e^{F(z)} = f'(z)e^{-F(z)} - f'(z)e^{-F(z)} = 0\,,$$

για κάθε $z \in D$. Τότε από την Πρόταση 3.19 η G είναι σταθερή στο D και επομένως

$$G(z) = G(z_0) = f(z_0)e^{-F(z_0)} = f(z_0)e^{-\log f(z_0)} = \frac{f(z_0)}{e^{\log f(z_0)}} = \frac{f(z_0)}{f(z_0)} = 1\,,$$

για κάθε $z \in D$. Άρα

$$f(z)e^{-F(z)} = 1 \Leftrightarrow e^{F(z)} = f(z)\,, \quad \text{για κάθε } z \in D\,.$$

Δηλαδή $F(z) = \log_D f(z)$. □

Πόρισμα 4.33. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $f : D \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στον απλά συνεκτικό τόπο $D \subseteq \mathbb{C}$ με $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$. Τότε υπάρχει συνάρτηση g αναλυτική στο D και τέτοια ώστε*

$$f(z) = g(z)^n\,, \quad \text{για κάθε } z \in D\,.$$

Δηλαδή υπάρχει αναλυτική n-οστή ρίζα της f στο D.

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αν F είναι ένας αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου της $f(z)$, θέτουμε

$$g(z) := \exp\left(\frac{1}{n}F(z)\right)\,, \quad \text{για κάθε } z \in D\,.$$

Τότε

$$g(z)^n = \exp(F(z)) = f(z)\,, \quad \text{για κάθε } z \in D\,.$$

□

Παράδειγμα 4.34. *Υποθέτουμε ότι οι ακέραιες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ικανοποιούν τη σχέση*

$$f^2(z) + g^2(z) = 1\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Τότε υπάρχει ακέραια συνάρτηση h τέτοια ώστε

$$f(z) = \cos(h(z)) \quad \text{και} \quad g(z) = \sin(h(z))\,.$$

Λύση. Από την υπόθεση είναι

$$[f(z) + ig(z)]\,[f(z) - ig(z)] = 1\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Επειδή η ακέραια συνάρτηση $f+ig$ δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{C}$, από το Θεώρημα4.32 υπάρχει ακέραια συνάρτηση F τέτοια ώστε $f(z) + ig(z) = \exp(F(z))$. Αν θέσουμε $h := -iF$, η h είναι ακέραια συνάρτηση με

$$f(z) + ig(z) = e^{ih(z)}\,.$$

Τότε

$$f(z) - ig(z) = \frac{1}{f(z) + ig(z)} = e^{-ih(z)}$$

και άρα

$$f(z) = \frac{e^{ih(z)} + e^{-ih(z)}}{2} = \cos(h(z)) \quad \text{και} \quad g(z) = \frac{e^{ih(z)} - e^{-ih(z)}}{2i} = \sin(h(z))\,.$$

■

Διατυπώνουμε τώρα το Θεώρημα 4.32 στην ειδική περίπτωση που η αναλυτική συνάρτηση $f(z) = z$, για κάθε $z \in D$.

Θεώρημα 4.35 (Αναλυτικός κλάδος του $\log z$). *Υποθέτουμε ότι το $D \subseteq \mathbb{C}$ είναι απλά συνεκτικός τόπος και ότι το $0 \notin D$. Επιλέγουμε το $z_0 \in D$ και παίρνουμε μία τιμή του $\log z_0$(ισοδύναμα, παίρνουμε ένα $w_0 \in \mathbb{C}$ με $e^{w_0} = z_0$). Ορίζουμε τη συνάρτηση $F : D \to \mathbb{C}$ με*

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} + \log z_0\,. \tag{4.12}$$

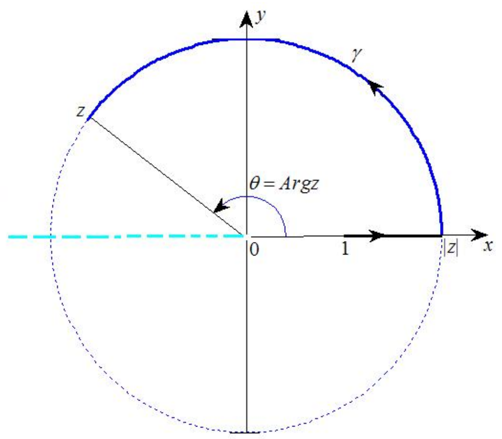
Τότε η F είναι ένας αναλυτικός κλάδος του $\log z$ με

$$F'(z) = \frac{1}{z}\,, \quad \text{για κάθε } z \in D\,.$$

Εφαρμογή. Έστω ο απλά συνεκτικός τόπος $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ και έστω $z_0 = 1 \in D$. Επιλέγουμε το $\log 1 = 0 \Leftrightarrow e^0 = 1$(ας σημειωθεί ότι $e^{2k\pi i} = 1$, $k \in \mathbb{Z}$). Τότε η

$$F(z) := \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} + \log 1 = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$

είναι ένας αναλυτικός κλάδος του $\log z$. Έστω γ το τόξο του κύκλου $C\,(0, |z|)$ με αρχή το $|z|$ και πέρας το z.



Τότε,

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{[1,|z|]} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \int_1^{|z|} \frac{dx}{x} + \int_0^{\theta} \frac{i|z|e^{it}}{|z|e^{it}}\, dt && (\zeta(t) = |z|e^{it}) \\ &= \ln|z| + i\theta = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z\,, \end{aligned}$$

όπου $-\pi < \theta = \operatorname{Arg} z < \pi$. Επομένως

$$F(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]\,,$$

δηλαδή $F(z) = \operatorname{Log} z$. Άρα πρόκειται για τον πρωτεύοντα(κύριο) κλάδο του λογαρίθμου.

Πιο γενικά, θεωρούμε την ακτίνα $N_{\theta_0} = \{re^{i\theta_0} : r \geq 0\}$, $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$ και τον απλά συνεκτικό τόπο $D := \mathbb{C} \setminus N_{\theta_0}$. Τότε και πάλι εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.35 έχουμε ότι

$$\log z = \ln|z| + i \arg z\,, \quad \theta_0 < \arg z < \theta_0 + 2\pi\,,$$

είναι ένας αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου του $z \in D$. Θεωρούμε τις περιπτώσεις (*i*) $\theta_0 = 0$ και (*ii*) $\theta_0 \neq 0$.

Παράδειγμα 4.36. *Υποθέτουμε ότι οι ακέραιες(αναλυτικές στο $\mathbb{C}$) συναρτήσεις f_1, f_2 δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Τότε υπάρχουν ακέραιες συναρτήσεις συναρτήσεις φ_1 και φ_2 τέτοιες ώστε*

$$f_1(z)\varphi_1(z) + f_2(z)\varphi_2(z) = 1\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση η ακέραια συνάρτηση $g := f_1 - f_2$ δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{C}$. Επομένως από το Θεώρημα 4.32 υπάρχει ακέραια συνάρτηση F στο $\mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$g(z) = e^{F(z)} \Leftrightarrow f_1(z) - f_2(z) = e^{F(z)} \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

Άρα,

$$f_1(z)\varphi_1(z) + f_2(z)\varphi_2(z) = 1 \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}\,,$$

όπου $\varphi_1(z) := e^{-F(z)}$ και $\varphi_2(z) := -e^{-F(z)}$ είναι δύο ακέραιες συναρτήσεις. □

Παράδειγμα 4.37. *Αν ένα τουλάχιστον από τα $a, b \in \mathbb{C}$ είναι διάφορο του μηδενός, να αποδειχθεί ότι*

$$\int_0^{2\pi} \ln|a + be^{i\theta}|\, d\theta = 2\pi \max\{\ln|a|, \ln|b|\}\,. \tag{4.13}$$

Απόδειξη. *1η περίπτωση*: $|a| > |b|$. Τότε η $f(z) := a + bz$ είναι αναλυτική και δεν μηδενίζεται σε ένα απλά συνεκτικό τόπο D που περιέχει το μοναδιαίο κύκλο $C(0,1)$(είναι $a + bz = 0$ αν και μόνο αν $z = -a/b$. Όμως $|z| = |-a/b| > 1$). Από το Θεώρημα 4.32 υπάρχει αναλυτικός κλάδος λογαρίθμου της f, έστω ο $\log f(z)$. Επειδή η παραμετρική εξίσωση του κύκλου $C^+(0,1)$ με θετική φορά διαγραφής είναι $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \ln|a + be^{i\theta}|\, d\theta &= \Re\left\{\int_0^{2\pi} \log(a + be^{i\theta})\, d\theta\right\} \\
&= \Re\left\{\int_{C^+(0,1)} \frac{\log(a+bz)}{iz}\, dz\right\} && (z = e^{i\theta},\ d\theta = dz/iz) \\
&= 2\pi\Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+(0,1)} \frac{\log(a+bz)}{z}\, dz\right\} \\
&= 2\pi\Re(\log a) && (\text{ολοκληρωτικός τύπος Cauchy}) \\
&= 2\pi \ln|a|\,.
\end{aligned}$$

Σημείωση. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το θεώρημα μέσης τιμής για αρμονικές συναρτήσεις, Πόρισμα 4.22, στο μοναδιαίο κύκλο $C(0,1)$. Επειδή η

$$u(z) = \Re\left(\log f(z)\right) = \Re\left(\log(a + bz)\right) = \ln|a + bz|$$

είναι αρμονική σε ένα απλά συνεκτικό πεδίο D που περιέχει το μοναδιαίο κύκλο $C(0,1)$, από το Πόρισμα 4.22 έχουμε

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|a + be^{i\theta}|\, d\theta \Leftrightarrow 2\pi\ln|a| = \int_0^{2\pi} \ln|a + be^{i\theta}|\, d\theta\,.$$

2η περίπτωση: $|a| < |b|$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \ln|a + be^{i\theta}|\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \ln\left|\overline{a + be^{i\theta}}\right|\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \ln\left|\overline{b} + \overline{a}e^{i\theta}\right|\, d\theta \\
&= 2\pi\ln|\overline{b}| && (\textit{1η περίπτωση}) \\
&= 2\pi\ln|b|\,.
\end{aligned}$$

3η περίπτωση: $|a| = |b| \neq 0$. Τότε, $a = |a|e^{i\alpha}$ και $b = |a|e^{i\beta}$ για κάποια $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Επειδή

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \ln|a + be^{i\theta}|\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \ln\left||a|\left(e^{i\alpha} + e^{i(\theta+\beta)}\right)\right|\, d\theta \\
&= 2\pi \ln|a| + \int_0^{2\pi} \ln\left|1 + e^{i(\theta+\beta-\alpha)}\right|\, d\theta \\
&= 2\pi \ln|a| + \int_{\beta-\alpha}^{2\pi+\beta-\alpha} \ln|1 + e^{it}|\, dt \qquad (t = \theta + \beta - \alpha) \\
&= 2\pi \ln|a| + \int_{-\pi}^{\pi} \ln|1 + e^{it}|\, dt\,, \qquad (\text{η } y = \ln|1 + e^{it}| \text{ είναι } 2\pi\text{-περιοδική})
\end{aligned}$$

αρκεί να αποδειχθεί ότι $\int_{-\pi}^{\pi} \ln|1 + e^{it}|\, dt = 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής αποτέλεσμα: τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx$, $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx$ συγκλίνουν και μάλιστα

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2\,.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \ln|1 + e^{it}|\, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln\sqrt{2 + 2\cos t}\, dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(2\cos\frac{t}{2}\right)\, dt \\
&= 2\pi \ln 2 + 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx \qquad (\text{αντικατάσταση } x = \tfrac{t}{2}) \\
&= 2\pi \ln 2 + 4\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx \\
&= 2\pi \ln 2 + 4\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) = 0\,.
\end{aligned}$$

□

4.5 Δυναμοσειρές

Στην πραγματική ανάλυση υπάρχουν διαφορές μεταξύ των συναρτήσεων που είναι **άπειρες φορές παραγωγίσιμες**(δηλαδή έχουν παραγώγους κάθε τάξης) και των **αναλυτικών συναρτήσεων**(οι οποίες αναπτύσσονται κατά Taylor). Έχουμε ήδη αποδείξει ότι μια αναλυτική(ολόμορφη) συνάρτηση είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη. Σ' αυτή την παράγραφο θα αποδείξουμε ότι κάθε αναλυτική συνάρτηση αναπτύσσεται κατά Taylor. Γενικά αυτό δεν ισχύει στην πραγματική ανάλυση. Πράγματι, έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0\,. \end{cases}$$

Η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη με $f^{(n)}(0) = 0$ για καθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και επομένως

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x)\,, \quad \text{για κάθε } x \neq 0\,.$$

Άρα σε οποιαδήποτε περιοχή του μηδενός η σειρά Maclaurin(σειρά Taylor με κέντρο το $x_0 = 0$) της f δεν ισούται με την $f(x)$.

Ορισμός 4.38 (Σημειακή–Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων). *Έστω (f_n) ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένων στο σύνολο $D \subseteq \mathbb{C}$.*

1. *Λέμε ότι η (f_n)* **συγκλίνει κατά σημείο(ή σημειακά)** *στην f στο D και γράφουμε $f_n \to f$, αν για κάθε $z \in D$ η $f_n(z)$ συγκλίνει στην $f(z)$. Δηλαδή για κάθε $z \in D$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\varepsilon, z) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N$ να είναι $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.*

2. *Λέμε ότι η (f_n)* **συγκλίνει ομοιόμορφα** *στην f στο D και γράφουμε "$f_n \to f$ ομοιόμορφα στο D", αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N$ και για κάθε $z \in D$ να είναι $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.*

Αξίζει να σημειωθεί ότι στη σημειακή σύγκλιση για $z \in D$ και $\varepsilon > 0$, το $N \in \mathbb{N}$ εξαρτάται από τα z, $\varepsilon > 0$, ενώ στην ομοιόμορφη σύγκλιση το $N \in \mathbb{N}$ λειτουργεί καθολικά για όλα τα $z \in D$.

- Είναι προφανές ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση $f_n \to f$ στο D συνεπάγεται τη σημειακή σύγκλιση $f_n \to f$ στο D.

- Αν
$$\|f_n - f\|_\infty := \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in D\}\,,$$
εύκολα διαπιστώνεται ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο D αν και μόνο αν $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Παραδείγματα 4.39. *1. Έστω η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(z) = z^n$ στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$. Η z^n συγκλίνει κατά σημείο στο 0. Επειδή*

$$\sup\{|z^n - 0| : |z| < 1\} = 1 \nrightarrow 0 \quad \textit{καθώς το } n \to \infty$$

και

$$\sup\{|z^n - 0| : |z| \le 1-\delta\} = (1-\delta)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,, \quad \delta \in (0,1)\,,$$

η z^n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο 0 στο μοναδιαίο δίσκο. Όμως $z^n \to 0$ ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0, 1-\delta)$.

2. *Έστω $f_n(z) = (1+n^2z^2)^{-1}$ στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$. Για σταθερό z, $|z|<1$, έχουμε*

$$f_n(z) = \frac{1/n^2}{1/n^2 + z^2} \to f(z) = \begin{cases} 0 & \text{αν } z \neq 0 \\ 1 & \text{αν } z = 0\,. \end{cases}$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_\infty &= \sup\{|f_n(z) - f(z)| : |z| < 1\} \\ &\ge \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \\ &= \left| \frac{1}{1+n^2\cdot(1/n)^2} - 0 \right| = \frac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\left\{\frac{1}{|1+n^2z^2|} : |z|<1\right\} \not\to 0 \quad \text{καθώς το } n\to\infty$$

και επομένως η f_n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο 0 στο μοναδιαίο δίσκο.

Στο τελευταίο παράδειγμα οι f_n είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $D(0,1)$, όμως η f δεν είναι συνεχής στο 0. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{z\to 0}\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 0 \quad \text{ενώ} \quad \lim_{n\to\infty}\lim_{z\to 0} f_n(z) = 1\,.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα αποδεικνύει ότι το παραπάνω δεν συμβαίνει στην περίπτωση που η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

Πρόταση 4.40 (Ομοιόμορφη σύγκλιση και συνέχεια). *Έστω (f_n) ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων στο $D \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο D. Αν οι f_n, $n\in\mathbb{N}$, είναι συνεχείς στο $z_0 \in D$, τότε η f είναι συνεχής στο z_0 και μάλιστα ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{z\to z_0} f_n(z) = \lim_{z\to z_0}\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z_0)\,.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_N(z) - f(z)| < \varepsilon/3$ για κάθε $z \in D$. Επειδή η f_N είναι συνεχής στο z_0 θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $z \in D$ με $|z - z_0| < \delta$ να είναι $|f_N(z) - f_N(z_0)| < \varepsilon/3$. Επομένως για κάθε $z \in D$ με $|z - z_0| < \delta$ θα είναι

$$\begin{aligned}|f(z) - f(z_0)| &= |(f(z) - f_N(z)) + (f_N(z) - f_N(z_0)) + (f_N(z_0) - f(z_0))| \\ &\leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

και άρα η f είναι συνεχής στο z_0.

Επειδή η f και οι f_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι συνεχείς στο $z_0 \in D$ και η ομοιόμορφη σύγκλιση $f_n \to f$ στο D συνεπάγεται τη σημειακή σύγκλιση $f_n \to f$ στο D, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{z\to z_0} f_n(z)) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = f(z_0)$$

και

$$\lim_{z\to z_0}(\lim_{n\to\infty} f_n(z)) = \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)\,.$$

$\square$

Ορισμός 4.41 (Σημειακή–Ομοιόμορφη σύγκλιση σειράς συναρτήσεων). *Έστω (f_n) ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένων στο σύνολο $D \subseteq \mathbb{C}$. Αν $S_N := \sum_{n=1}^{N} f_n = f_1 + \cdots + f_N$ είναι το N-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$* **συγκλίνει κατά σημείο(ή σημειακά)** *(αντ.* **ομοιόμορφα***) στην f στο D, αν η ακολουθία (S_N)* **συγκλίνει κατά σημείο***(αντ.* **ομοιόμορφα***) στην f στο D.*

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ανάλογο του κριτηρίου σύγκρισης στις σειρές πραγματικών αριθμών και μας δίνει ικανές συνθήκες για την ομοιόμορφη σύγκλιση μια σειράς μιγαδικών συναρτήσεων.

Πρόταση 4.42 (M- κριτήριο του Weierstrass). *Έστω (f_n) ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένων στο σύνολο $D \subseteq \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (M_n) μη αρνητικών αριθμών τέτοια ώστε $|f_n(z)| \leq M_n$ για κάθε $z \in D$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο D.*

Απόδειξη. Ως γνωστόν μια ακολουθία (z_n) μιγαδικών αριθμών συγκλίνει αν και μόνο αν η (z_n) είναι ακολουθία Cauchy, δηλαδή αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$

$$m, n \geq N \Rightarrow |z_m - z_n| < \varepsilon\,.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τα n-οστά μερικά αθροίσματα $S_n(z) := \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ και $\sigma_n := \sum_{k=1}^{n} M_k$ των σειρών $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ και $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ αντίστοιχα. Επειδή από την υπόθεση η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ συγκλίνει, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\text{για κάθε } m > n \geq N \Rightarrow |\sigma_m - \sigma_n| = \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon\,.$$

Τότε για κάθε $z \in D$ και για κάθε $m > n \geq N$ είναι

$$|S_m(z) - S_n(z)| = |\sum_{k=n+1}^{m} f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon\,.$$

Επομένως η ακολουθία $(S_n(z))$ είναι Cauchy και κατά συνέπεια συγκλίνει, έστω στην $f(z)$. Δηλαδή $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = f(z)$. Επειδή η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ συγκλίνει, από τις πραγματικές σειρές είναι γνωστό ότι $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = 0$ και άρα για κάθε $z \in D$

$$|f(z) - S_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Δηλαδή $S_n(z) \to f(z)$ ομοιόμορφα στο D και ισοδύναμα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο D. □

Παράδειγμα 4.43 (Γεωμετρική σειρά). *Είναι*

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \textit{και} \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n\,, \quad |z| < 1\,.$$

Οι σειρές συγκλίνουν απόλυτα και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,r)$ *με* $0 < r < 1$.

Απόδειξη. Αν $z \in D(0,1)$, τότε $z \in \overline{D}(0,r)$ δηλαδή $|z| \leq r < 1$ για κάποιο $r < 1$. Επομένως η σύγκλιση των σειρών στο z προκύπτει αν αποδείξουμε ότι οι σειρές συγκλίνουν απόλυτα και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,r)$ με $r < 1$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $z \in \overline{D}(0,r)$. Επειδή $|z^n| \leq r^n$ και ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ συγκλίνει, από το M- κριτήριο του Weierstrass οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ συγκλίνουν απόλυτα και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,r)$ με $r<1$. Όμως δεν έχουμε βρει το άθροισμα των σειρών. Για την εύρεση του αθροίσματος παρατηρούμε ότι

$$1 - z^{n+1} = (1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^n) \Leftrightarrow \frac{1}{1-z} - (1+z+z^2+\cdots+z^n) = \frac{z^{n+1}}{1-z}$$

και επομένως

$$\left|\frac{1}{1-z} - \sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}\,.$$

Επειδή $0<r<1$, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

και άρα

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,.$$

Αν θέσουμε όπου z το $-z$, τότε

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n\,.$$

Μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα για $|z|<1$. Αν $S_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$, τότε

$$\sup_{|z|<1}\left|S_{n-1}(z) - \frac{1}{1-z}\right| = \sup_{|z|<1}\left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} z^k\right| = \sup_{|z|<1}\left|\sum_{k=n}^{\infty} z^k\right| = \sup_{|z|<1}\left|\frac{z^n}{1-z}\right|\,.$$

Παίρνοντας $z = 1 - 1/n$, έχουμε

$$\sup_{|z|<1}\left|S_{n-1}(z) - \frac{1}{1-z}\right| \geq \frac{(1-1/n)^n}{1-(1-1/n)} = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\,.$$

Όμως

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\,, \quad \text{οπότε } \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = +\infty\,.$$

Επομένως

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{|z|<1}\left|S_{n-1}(z) - \frac{1}{1-z}\right| = +\infty$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{|z|<1}\left|S_{n-1}(z) - \frac{1}{1-z}\right| \neq 0\,.$$

Άρα, η σύγκλιση της σειράς

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{δεν είναι ομοιόμορφη για } |z|<1\,.$$

□

Πρόταση 4.44. *Έστω $\gamma : [a,b] \to G$ τμηματικά λεία καμπύλη στο ανοικτό σύνολο $G \subseteq \mathbb{C}$ και έστω (f_n) ακολουθία μιγαδικών συνεχών συναρτήσεων στο G.*

(1) Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στη $\gamma^* = \gamma([a,b])$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma (\lim_{n\to\infty} f_n(z))\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz\,.$$

(2) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $\gamma^* = \gamma([a,b])$, τότε

$$\sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma \left(\sum_{n=1}^\infty f_n(z)\right)\,dz\,.$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε την (1). Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ είναι $|f_N(z) - f(z)| < \varepsilon$ για κάθε $z \in \gamma^* = \gamma([a,b])$. Επομένως

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma (f_n(z) - f(z))\,dz\right| &\leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)||dz| \\ &\leq \varepsilon \int_\gamma |dz| \\ &= \varepsilon \ell(\gamma)\,,\end{aligned}$$

όπου $\ell(\gamma)$ είναι το μήκος της καμπύλης γ. Άρα

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma (f_n(z) - f(z))\,dz = 0 \text{ και ισοδύναμα } \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz\,.$$

□

Θεώρημα 4.45 (Cauchy–Taylor). *Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο τόπο G και έστω $z_0 \in G$. Υποθέτουμε ότι ο δίσκος $D(z_0, \delta)$ περιέχεται στο G(παίρνουμε το μεγαλύτερο δυνατό δίσκο που περιέχεται στο G: αν $\delta = \infty$, τότε $D(z_0,\delta) = G = \mathbb{C}$). Τότε για κάθε $z \in D(z_0, \delta)$ είναι*

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n\,. \tag{4.14}$$

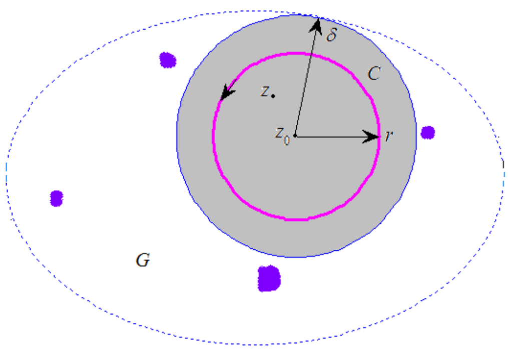
Επιπλέον, για οποιοδήποτε r με $0 < r < \delta$ οι συντελεστές της δυναμοσειράς δύονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta\,, \tag{4.15}$$

όπου $C = C(z_0, r)$ *είναι ο κύκλος με κέντρο το* z_0 *και ακτίνα* r.

Η σειρά (4.14) *λέγεται* **σειρά Taylor** *της* f *γύρω από το* z_0. *Η σειρά συγκλίνει απόλυτα στο δίσκο* $D(z_0, \delta)$ *και ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα.*

Απόδειξη. Έστω $z \in D(z_0, \delta)$. Υποθέτουμε ότι $|z - z_0| = \rho < r < \delta$.



Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,.$$

Επειδή για κάθε $\zeta \in C$

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{\rho}{r} < 1\,,$$

είναι

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n$$

(γεωμετρική σειρά)

και επομένως

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right] d\zeta\,.$$

Αν $M = \max\{|f(\zeta)| : \zeta \in C\}$, τότε

$$\left|f(\zeta) \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right| \le M \frac{1}{r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n\,, \quad \text{για κάθε } \zeta \in C\,.$$

Επειδή $(\rho/r) < 1$, η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(\rho/r)^n$ συγκλινει και από το M-κριτήριο του Weierstrass η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \quad \text{συγκλίνει ομοιόμορφα στον κύκλο } C\,.$$

Άρα, από την Πρόταση 4.44 και τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\right](z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\,.$$

<u>*Σημείωση*</u>. Στην απόδειξη υποθέσαμε ότι $|z-z_0| = \rho < r < \delta$. Στην περίπτωση που είναι $|z-z_0| = \rho \geq r$, $r < \delta$, θεωρούμε τον κύκλο $C_1 = C_1(z_0, r_1)$, όπου $r \leq \rho < r_1 < \delta$ και η απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια αν αντί του κύκλου C θεωρήσουμε τον κύκλο C_1. Από το γενικευμένο θεώρημα Cauchy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

και επομένως οι συντελεστές της δυναμοσειράς δίνοντα από τον τύπο (4.15). □

Παράδειγμα 4.46. *Να βρεθεί το ανάπτυγμα Taylor της*

$$f(z) = \frac{z-i}{(z+2)^2}$$

με κέντρο το $z_0 = i$. Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς;

Λύση. Είναι

$$f(z) = \frac{z-i}{\left((z-i)+(2+i)\right)^2} = \frac{z-i}{(2+i)^2\left(1+\frac{z-i}{2+i}\right)^2}\,.$$

Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά $1/(1+w) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w| < 1$, παίρνουμε

$$-\frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n w^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n w^{n-1}\,, \quad |w| < 1\,.$$

Επομένως αν

$$\left|\frac{z-i}{2+i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-i| < |2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}\,,$$

τότε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z-i}{(2+i)^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n\left(\frac{z-i}{2+i}\right)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(2+i)^{n+1}}(z-i)^n\,, \quad |z-i| < \sqrt{5}\,. \end{aligned}$$

Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = \sqrt{5}$. ■

Παράδειγμα 4.47. *Είναι*

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}\,, \quad |z| < 1\,,$$

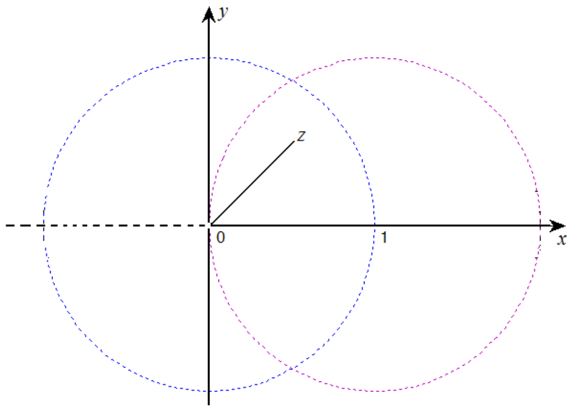
όπου $w = \operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$, $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$, *είναι ο πρωτεύον αναλυτικός κλάδος λογαρίθμου στο απλά συνεκτικό πεδίο* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι για κάθε z στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ το $1+z \in D(1,1)$. Είναι

$$(\operatorname{Log}(1+z))' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n\,, \quad |z| < 1\,.$$

Ολοκληρώνοντας πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[0,z]$ του μοναδιαίου δίσκου $D(0,1)$ έχουμε

$$\int_{[0,z]} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^n \right) d\zeta = \int_{[0,z]} (\operatorname{Log}(1+\zeta))'\, d\zeta = \operatorname{Log}(1+z) - \operatorname{Log} 1 = \operatorname{Log}(1+z)\,, \quad |z| < 1\,.$$



Επειδή το ευθ. τμήμα $[0,z]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του μοναδιαίου δίσκου $D(0,1)$, η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,z]$ και από την Πρόταση 4.44 έχουμε

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{[0,z]} \zeta^n\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}\,, \quad |z| < 1\,.$$

■

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρουμε τα αναπτύγματα σε δυναμοσειρές (σειρές Maclaurin) μερικών βασικών συναρτήσεων.

Πίνακας με αναπτύγματα γνωστών συναρτήσεων σε δυναμοσειρές

$$
\begin{array}{lll}
e^z & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} & & z \in \mathbb{C} \\
\sin z & = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} & & z \in \mathbb{C} \\
\cos z & = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & & z \in \mathbb{C} \\
\frac{1}{1-z} & = \sum_{n=0}^{\infty} x^n & (\textbf{γεωμετρική σειρά}) & |z| < 1 \\
\frac{1}{1+z} & = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n & (\textbf{γεωμετρική σειρά}) & |z| < 1 \\
\operatorname{Log}(1+z) & = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} & & |z| < 1 \\
-\operatorname{Log}(1-z) & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} & & |z| < 1
\end{array}
\tag{4.16}
$$

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η ακολουθία $f_n(z) = (1+nz)^{-1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $|z| \geq 2$ και δεν συγκλίνει ομοιόμορφα για $|z| \leq 2$.

2. (**Η συνάρτηση ζ του Riemann**) Δείξτε ότι η συνάρτηση ζ του Riemann που ορίζεται από τη σειρά του Dirichlet
$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$
συγκλίνει απόλυτα για $\Re z > 1$ και ομοιόμορφα για $\Re z \geq 1+\delta$, $\delta > 0$.

3. Δείξτε ότι οι σειρές
$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+z^n} \quad \text{και} \quad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nz^n}$$
συγκλίνουν απόλυτα για $|z| > 1$ και ομοιόμορφα για $|z| \geq R > 1$.

4. Έστω η συνάρτηση
$$f(z) = \frac{\cos z - 1}{z-2} + \frac{1}{z+3}\,.$$
Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης της σειράς Taylor της f με κέντρο το i.

5. Να βρεθεί το ανάπτυγμα Taylor της $f(z) = z^2 \cos^2 3z$ γύρω από το σημείο $z = 0$. Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς;

6. Να βρεθεί το ανάπτυγμα Taylor της
$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^2}$$
με κέντρο το $z_0 = 0$. Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς;

7. Να βρεθεί το ανάπτυγμα Taylor της
$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$$
με κέντρο το $z_0 = 1$. Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς;

8. Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^2+6z}{(2-z)(z+2)^2} = \frac{1}{2-z} - \frac{2}{(z+2)^2}$. Να βρεθεί το ανάπτυγμα της f σε σειρά Taylor με κέντρο το $z_0 = 0$, καθώς επίσης και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

9. Να βρεθεί το ανάπτυγμα της $f(z) = \frac{1}{z^2+4z-3i}$ σε δυναμοσειρά με κέντρο το $z_0 = -2$. Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς;

10. Έστω η συνάρτηση
$$f(z) = \left(\frac{z}{z+1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{1+z}\right)^2 = 1 - 2\frac{1}{1+z} + \frac{1}{(1+z)^2}\,.$$
Να βρεθεί το ανάπτυγμα της f σε σειρά Taylor γύρω από το i, δηλαδή με κέντρο το $z_0 = i$, καθώς επίσης και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

11. Έστω
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$
το ανάπτυγμα Taylor της ακέραιας συνάρτησης f. Υποθέτουμε ότι
$$|f(z)| \leq M \cdot a^{|z|}\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,,$$
όπου $a > 1$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cauchy-Taylor, δείξτε ότι για οποιοδήποτε $r > 0$
$$|c_n| \leq M \cdot \frac{a^r}{r^n}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Να συμπεράνετε ότι

$$|c_n| \leq \begin{cases} M \cdot \left(\frac{e \ln a}{n}\right)^n & \text{αν } n \geq 1 \\ M & \text{αν } n = 0\,. \end{cases}$$

12. Θεωρούμε την αναλυτική συνάρτηση $f(z) = 1/z$ στο διάτρητο δίσκο $D'(0,2) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία (p_n) πολυωνύμων που να συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $D'(0,2)$.

    Υπόδειξη. Θεωρείστε το μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{T}$ που είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $D'(0,2)$.

13. Έστω η ακέραια συνάρτηση $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, τέτοια ώστε $f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

14. Έστω η ακέραια συνάρτηση $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, τέτοια ώστε $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ και $f(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(-z) = f(z)$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

15. Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ και έστω

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}\,, \qquad |z| < 1\,.$$

    (α΄) Δείξτε ότι

$$n a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1-\frac{1}{n}} \frac{f'(z)}{z^n}\,,dz\,, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,.$$

    (β΄) Δείξτε ότι

$$|a_n| \leq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e\,.$$

4.6 Ανισότητες Cauchy και το θεώρημα Liouville

Αν μια αναλυτική συνάρτηση είναι φραγμένη σε μια περιοχή $D(z_0, R)$ του $z_0 \in \mathbb{C}$, το παρακάτω αποτέλεσμα μας δίνει ένα φράγμα για τις παραγώγους της συνάρτησης στο z_0 συναρτήσει του φράγματος της συνάρτησης.

Θεώρημα 4.48 (Ανισότητες Cauchy–1η διατύπωση). *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $D(z_0, R)$ με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$. Αν $|f(z)| \leq M$*

για κάθε $z \in D(z_0, R)$*, τότε*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Έστω $0 < r < R$. Από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Από την υπόθεση $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in C(z_0, r)$ και επομένως

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \right| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\, |dz| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{M}{r^{n+1}}\, |dz| \\
&= \frac{n!M}{2\pi r^{n+1}} \oint_{|z-z_0|=r} |dz| \\
&= \frac{n!M}{2\pi r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}, \quad \text{για κάθε } 0 < r < R.$$

Επειδή το αριστερό μέλος της παραπάνω ανισότητας δεν εξαρτάται από το r, παίρνουμε το όριο καθώς το $r \to R^-$ και τελικά έχουμε

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

□

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου $C(z_0, R)$ με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$ και ότι $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in C(z_0, R)$. Αν χρησιμοποιήσουμε τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους στον κύκλο $C(z_0, R)$ και εργαστούμε όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 4.48, τότε και πάλι προκύπτουν οι ανισότητες Cauchy

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Θεώρημα 4.49 (Ανισότητες Cauchy–2η διατύπωση). *Έστω f αναλυτική συνάρτηση πάνω και στο εσωτερικό του κύκλου $C(z_0, R)$ με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$ και έστω $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in C(z_0, R)$. Τότε*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Παράδειγμα 4.50. *Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε*

$$|f(z)| \leq |z|^2 + |z|^3, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}. \tag{4.17}$$

Τότε

$$f(z) = a_2 z^2 + a_3 z^3$$

με $|a_2| \leq 1$ και $|a_3| \leq 1$.

Λύση. Η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ακέραια(αναλυτική στο $\mathbb{C}$) και επομένως

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \cdots, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Έστω $C(0,\, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα $R > 0$. Αν $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$, από την (4.17) έχουμε

$$M \leq R^2 + R^3$$

και από τις ανισότητες Cauchy για κάθε $n > 3$ είναι

$$|a_n| = \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} \leq \frac{M}{R^n} \leq \frac{R^2 + R^3}{R^n} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$$

Επομένως $a_n = 0$, για κάθε $n > 3$. Άρα η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 3, δηλαδή $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$. Από την (4.17) έχουμε $f(0) = 0$ οπότε $a_0 = 0$ και κατά συνέπεια $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$. Επίσης είναι

$$|a_1| = |f'(0)| \leq \frac{M}{R} \leq \frac{R^2 + R^3}{R} = R + R^2 \xrightarrow[R \to 0]{} 0,$$

οπότε $a_1 = 0$. Άρα

$$f(z) = a_2 z^2 + a_3 z^3.$$

Και πάλι από τις ανισότητες Cauchy έχουμε

$$|a_2| = \frac{\left|f^{(2)}(0)\right|}{2!} \le \frac{M}{R^2} \le \frac{R^2+R^3}{R^2} = 1+R \xrightarrow[R\to 0]{} 1$$

και

$$|a_3| = \frac{\left|f^{(3)}(0)\right|}{3!} \le \frac{M}{R^3} \le \frac{R^2+R^3}{R^3} = \frac{1}{R}+1 \xrightarrow[R\to \infty]{} 1\,.$$

■

Θεώρημα 4.51 (Γενίκευση του θεωρήματος Liouville). *Υποθέτουμε ότι η $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ είναι ακέραια συνάρτηση και ότι υπάρχουν σταθερές $A\ge 0$, $B>0$ και $k\ge 0$, έτσι ώστε να ισχύει η ανισότητα*

$$|f(z)| \le A + B|z|^k\,, \quad \text{για κάθε } |z| \ge R_0 > 0\,. \tag{4.18}$$

Τότε η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ k.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ είναι ακέραια(αναλυτική στο $\mathbb{C}$) και επομένως

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdots\,, \quad \text{για κάθε } z\in\mathbb{C}.$$

Έστω $C(0,\,R) = \{z\in\mathbb{C} : |z| = R\}$ κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα $R>R_0$. Αν $M = \max_{|z|=R}|f(z)|$, από την (4.18) έχουμε

$$M \le A + BR^k\,.$$

Τότε από τις ανισότητες Cauchy για κάθε $n>k$ είναι

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \le \frac{M}{R^n} \le \frac{A+BR^k}{R^n} = \frac{A}{R^n} + \frac{B}{R^{n-k}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,.$$

Επομένως $a_n = 0$, για κάθε $n>k$. Άρα η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ k. □

Αν $k=0$ στο προηγούμενο θεώρημα, δηλαδή αν $|f(z)|\le M$ για κάθε $|z|\ge R_0$ (ή για κάθε $z\in\mathbb{C}$), όπου $M = A+B$, τότε η f είναι σταθερή. Αυτό είναι το κλασικό θεώρημα Liouville.

Θεώρημα 4.52 (Liouville). *Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση.*

Αν η f είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$, δηλαδή αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(z)| \le M$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

Πιο γενικά, αν $|f(z)| \le M$ **για μεγάλα** *z, δηλαδή για κάθε $|z| \ge R > 0$, τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.*

Εφαρμόζοντας τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy, στο Παράδειγμα 4.20 δώσαμε μια απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας. Θα δώσουμε στη συνέχεια μια διαφορετική απόδειξη χρησιμοποιώντας το κλασικό θεώρημα Liouville.

Θεώρημα 4.53 (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας). *Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού $n \ge 1$ έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$. Επομένως, κάθε μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού $n \ge 1$ έχει ακριβώς n ρίζες στο $\mathbb{C}$*

Απόδειξη. Έστω $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, πολυώνυμο βαθμού $n \ge 1$. Υποθέτουμε ότι $p(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επειδή το p είναι ακέραια συνάρτηση που δεν μηδενίζεται και η $1/p$ είναι επίσης ακέραια συνάρτηση. Από το Παράδειγμα 1.6 υπάρχει $R \ge 1$ τέτοιο ώστε

$$|p(z)| \ge \frac{1}{2}|a_n||z|^n\,, \quad \text{για κάθε } |z| \ge R\,.$$

Επομένως,

$$\left|\frac{1}{p(z)}\right| \le \frac{2}{|a_n||z|^n} \le \frac{2}{|a_n|R^n}\,, \quad \text{για κάθε } |z| \ge R\,.$$

Άρα, η ακέραια συνάρτηση $1/p$ είναι φραγμένη για μεγάλα z, δηλαδή για κάθε $|z| \ge R \ge 1$ και από το κλασικό θεώρημα Liouville έπεται ότι η $1/p$ είναι σταθερή, έστω $1/p(z) = \alpha$. Τότε όμως και το πολυώνυμο $p(z) = 1/\alpha$ είναι σταθερό, άτοπο. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι το πολυώνυμο p δεν έχει ρίζα. Άρα, το p έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$. □

Παράδειγμα 4.54. *Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση και έστω $M > 0$.*

(i) Αν $\Re f(z) \le M$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, τότε η f είναι σταθερή.

(ii) Αν $\Re f(z) \geq M$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, τότε η f είναι σταθερή.

(iii) Αν $\Im f(z) \leq M$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, τότε η f είναι σταθερή.

(iv) Αν $\Im f(z) \geq M$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, τότε η f είναι σταθερή.

Λύση.

(i) Η συνάρτηση $g(z) := e^{f(z)}$ είναι ακέραια με

$$|g(z)| = |e^{f(z)}| = |e^{\Re f(z) + i\Im f(z)}| = e^{\Re f(z)} \leq e^M . \qquad (\Re f(z) \leq M \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C})$$

Επομένως από το θεώρημα Liouville η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. Κατά συνέπεια και η $|g| = e^{\Re f}$ θα είναι σταθερή οπότε και η $\Re f$ είναι σταθερή. Όμως τότε από την Πρόταση 3.20 και η συνάρτηση f θα είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

(ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(z) := e^{-f(z)}$ και εργαζόμαστε όπως και στην περίπτωση (i).

(iii) Η συνάρτηση $h(z) := e^{-if(z)}$ είναι ακέραια με

$$|h(z)| = |e^{-if(z)}| = |e^{(\Im f(z) - i\Re f(z))}| = e^{\Im f(z)} \leq e^M . \qquad (\Im f(z) \leq M \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C})$$

Επομένως από το θεώρημα Liouville η συνάρτηση h είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. Κατά συνέπεια και η $|h| = e^{\Im f}$ θα είναι σταθερή οπότε και η $\Im f$ είναι σταθερή. Όμως τότε από την Πρόταση 3.20 και η συνάρτηση f θα είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

(iv) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(z) := e^{if(z)}$ και εργαζόμαστε όπως και στην περίπτωση (iii).

■

Παράδειγμα 4.55. *Αν η ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ δεν είναι σταθερή, τότε το σύνολο $f(\mathbb{C})$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.*

Λύση. Υποθέτουμε ότι το πεδίο τιμών της f δεν είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$. Τότε υπάρχει $w_0 \in \mathbb{C}$ και δίσκος $D(w_0, r)$, τέτοιος ώστε $D(w_0, r) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$. Δηλαδή

$$|f(z) - w_0| > r\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w_0}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Η g είναι ακέραια συνάρτηση με $|g(z)| < 1/r$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Τότε από το θεώρημα Liouville η g θα είναι σταθερή και κατά συνέπεια η f θα είναι σταθερή, άτοπο. Άρα το σύνολο $f(\mathbb{C})$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$. ■

Ασκήσεις

1. Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο σημείο $a \in \mathbb{C}$, μπορεί να είναι
$$|f^{(n)}(a)| \geq n!n^n\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N};$$
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση με
$$|f(z)| \leq C|z|^{2\pi}\,, \quad \text{για κάθε } |z| > 1, \text{ όπου } C > 0\,.$$
Δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 6.

3. Έστω $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραιες συναρτήσεις τέτοιες ώστε για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι
$$\Re(f(z)) \leq \lambda \Re(g(z))\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$
Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε
$$f(z) = \lambda g(z) + c\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

4. Έστω $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραιες συναρτήσεις τέτοιες ώστε για κάποιο $\mu \in \mathbb{R}$ είναι
$$\Im(f(z)) \leq \mu \Im(g(z))\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$
Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε
$$f(z) = \mu g(z) + c\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

5. Έστω $f = u + iv$ μια ακέραια συνάρτηση. Αν $u^2(x, y) \geq v^2(x, y)$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.
Υπόδειξη. Θεωρείστε τη συνάρτηση $F(z) := e^{-f^2(z)}$.

6. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακέραια συνάρτηση $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε
$$|g(z)| > |z|\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

7. Υποθέτουμε ότι η ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι τέτοια ώστε

$$f(z+1) = f(z) \;\text{ και }\; f(z+i) = f(z)\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

8. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση και έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\lambda \notin \mathbb{R}$. Αν

$$f(z+1) = f(z) \;\text{ και }\; f(z+\lambda) = f(z)\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,,$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

9. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0\,, \quad \text{για κάποιο } n \in \mathbb{N}\,.$$

Δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n-1$.

10. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες συναρτήσεις $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ που έχουν το 0 απλή ρίζα και είναι τέτοιες ώστε

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{f'(z)}{z} = 0\,.$$

11. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε για μεγάλα z

$$|f'(z)| \le |z|\,.$$

Δείξτε ότι

$$f(z) = a + bz^2\,, \quad \text{όπου } a, b \in \mathbb{C} \text{ με } |b| \le \frac{1}{2}\,.$$

12. Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ και τέτοια ώστε

$$|f(z)| \le |z|^{1/2} + |z|^{-1/2}\,,$$

δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

13. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$f(1) = 1 \quad \text{και} \quad |f(z)| \le |z|^{1/2}\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

14. Να βρεθούν όλες οι αναλυτικές συναρτήσεις f στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ τέτοιες ώστε

$$f(1)=1 \quad \text{και} \quad |f(z)|\leq \frac{1}{|z|^3}\,, \quad \text{για κάθε } z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Θεωρείστε τη συνάρτηση $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με

$$g(z)=\begin{cases} z^5 f(z) & \text{αν } z\neq 0 \\ 0 & z=0\,. \end{cases}$$

15. Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε

$$|f(z)|\leq 2|z|+|z|^4\,, \quad \text{για κάθε } z\in\mathbb{C}\,.$$

Δείξτε ότι

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4$$

με $|a_1|\leq 2$, $|a_2|\leq 3$, $|a_3|\leq \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$ και $|a_4|\leq 1$.

16. Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε

$$|f(z)|\leq 2|z|+|z|^4\,, \quad \text{για κάθε } z\in\mathbb{C}\,.$$

Δείξτε ότι

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4$$

με $|a_1|\leq 2$, $|a_2|\leq 3$, $|a_3|\leq \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$ και $|a_4|\leq 1$.

17. Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(z)|\leq Ae^{ax}$ για κάθε $z=x+iy\in\mathbb{C}$, όπου $a,A>0$. Δείξτε ότι

$$f(z)=ce^{az}\,, \quad \text{για κάποια σταθερά } c\in\mathbb{C}\,.$$

Ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα αν $|f(z)|\leq Ae^{a|z|}$, για κάθε $z\in\mathbb{C}$;

18. Έστω f ακέραια συνάρτηση και έστω $\Omega=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. Αν $|f(z)|\leq|\operatorname{Log} z|$, για κάθε $z\in\Omega$, όπου $w=\operatorname{Log} z$ είναι ο πρωτεύον(κύριος) κλάδος λογαρίθμου, δείξτε ότι η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο $\mathbb{C}$.

19. Υπάρχουν μη σταθερές ακέραιες συναρτήσεις f που να ικανοποιούν την ανισότητα

$$|f(z)| \leq A + B \ln |z|\,, \quad \text{για κάθε } |z| \geq 1\,,$$

όπου A και B θετικές σταθερές;

20. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες συναρτήσεις f τέτοιες ώστε

$$|f'(z)| \leq A + B\sqrt{|z|}\,,$$

όπου A και B θετικές σταθερές.

21. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες συναρτήσεις f τέτοιες ώστε

$$|f(z)| \leq A(1 + \sqrt{|z+i|})\,,$$

όπου $A > 0$.

22. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες συναρτήσεις f τέτοιες ώστε

$$|f(z)| \leq M(1 + |z - i|)\,,$$

όπου $M > 0$.

23. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση. Αν

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{1 + |z|^{5/2}} = 0\,,$$

δείξτε ότι η f είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2.

24. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση. Αν $|f(z)| \geq 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

25. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες συναρτήσεις f τέτοιες ώστε

$$|f'(z)| < |f(z)|\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

26. Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ με

$$|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}\,, \quad \text{για κάθε } |z| < 1\,.$$

Δείξτε ότι

$$|a_n| \leq (2n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

27. Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ με $a_0 \neq 0$ και έστω z_0 ρίζα της f. Για κάθε r με $|z_0| < r < 1$ θέτουμε $M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|$. Δείξτε ότι
$$|z_0| \geq \frac{r|a_0|}{M(r) + |a_0|}\,.$$

28. Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ με
$$|f'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}\,, \quad \text{για κάθε } |z| < 1\,.$$
Δείξτε ότι $|a_n| < e$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Είναι
$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\,, \quad \text{όπου } n a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f'(z)}{z^n}\, dz, \quad 0 < r < 1\,.$$

29. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leq r^{20/3}\,,$$
για κάθε $r > 0$. Δείξτε ότι $f(z) = 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

4.7 Ρίζες αναλυτικής συνάρτησης -Θεώρημα ταυτοτισμού- Εφαρμογές

Ορισμός 4.56. *Έστω $f : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο G και έστω $z_0 \in G$ με $f(z_0) = 0$. Το z_0 είναι* **ρίζα τάξης** $k \geq 1$ **της** f*, αν υπάρχει αναλυτική συνάρτηση $g : G \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε*
$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) \quad \text{με } g(z_0) \neq 0\,. \tag{4.19}$$

Πρόταση 4.57. *Έστω $f : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο G και έστω $z_0 \in G$. Το z_0 είναι ρίζα τάξης $k \geq 1$ της f, αν και μόνο αν*
$$0 = f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) \quad \text{και } f^{(k)}(z_0) \neq 0\,. \tag{4.20}$$

Απόδειξη. Έστω ότι το z_0 είναι ρίζα τάξης $k \geq 1$ της f, δηλαδή ισχύει η (4.19). Τότε εύκολα διαπιστώνεται ότι ισχύει η (4.20).

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύει η (4.20). Επειδή η f είναι αναλυτική στο z_0, υπάρχει περιοχή $D(z_0, R) \subseteq G$ τέτοια ώστε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \,, \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0, R)\,.$$

Επομένως λόγω της (4.20) έχουμε

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z - z_0)^n \,, \quad a_k \neq 0, \text{ για κάθε } z \in D(z_0, R)\,. \quad (4.21)$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : G \to \mathbb{C}$ με

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} & \text{αν } z \in G \setminus \{z_0\}\,, \\ a_k & z = z_0\,. \end{cases}$$

Η g είναι αναλυτική στο $z \in G \setminus \{z_0\}$ και επειδή $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n}(z - z_0)^n$, για κάθε $z \in D(z_0, R)$, η g είναι αναλυτική και στο z_0. Άρα

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) \quad \text{με } g(z_0) = a_k \neq 0\,,$$

όπου g αναλυτική συνάρτηση στο G. □

Παράδειγμα 4.58. *Έστω η συνάρτηση $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ με*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^7}{1-\cos z} & \text{αν } z \neq 0 \\ 0 & z = 0\,. \end{cases}$$

Η f είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο με

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^7}{1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right)} \\ &= \frac{z^7}{\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \cdots} \\ &= \frac{z^5}{\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \cdots} \\ &= z^5 g(z)\,, \end{aligned}$$

όπου

$$g(z) = \frac{1}{\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \cdots}$$

αναλυτική συνάρτηση στο $D(0,1)$ *με* $g(0) = 1/2 \neq 0$. *Το* 0 *είναι ρίζα τάξης* 5 *της* f.

Το $z_0 \in G$ είναι **ρίζα άπειρης τάξης της** f, αν

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

Συμβολισμός: Συμβολίζουμε με Z_f ή $Z(f)$ το σύνολο των ριζών της αναλυτικής συνάρτησης $f : G \to \mathbb{C}$ στο ανοικτό σύνολο G. Δηλαδή

$$Z_f = \{z \in G : f(z) = 0\}\,.$$

Το Z_f είναι κλειστό σύνολο στο G. Πράγματι, έστω (z_k) ακολουθία σημείων του Z_f με $\lim_{k\to\infty} z_k = z \in G$. Επειδή η f είναι συνεχής στο G, από το θεώρημα μεταφοράς έχουμε

$$0 = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = f(z)$$

και επομένως $z \in Z_f$. Άρα το Z_f είναι κλειστό σύνολο στο G.

Θεώρημα 4.59 (Θεώρημα ταυτοτισμού). *Έστω* $f : G \to \mathbb{C}$ *αναλυτική συνάρτηση στον τόπο* $G \subseteq \mathbb{C}$. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(1) $f \equiv 0$, *δηλαδή* $f(z) = 0$ *για κάθε* $z \in G$.

(2) Υπάρχει ρίζα της f *άπειρης τάξης. Δηλαδή υπάρχει* $a \in G$ *τέτοιο ώστε* $f^{(n)}(a) = 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(3) Υπάρχει ρίζα της f *στο* G *που δεν είναι μεμονωμένο σημείο του* Z_f, *δηλαδή του συνόλου των ριζών της* f.

(4) Το Z_f, *δηλαδή το σύνολο ριζών της* f, *έχει σημείο συσσώρευσης(σ.σ) στο* G.

(5) Υπάρχει συμπαγές υποσύνολο K *του* G *τέτοιο ώστε το* $K \cap Z_f$ *δεν είναι πεπερασμένο σύνολο.*

(6) Το σύνολο Z_f *είναι υπεραριθμήσιμο, δηλαδή το σύνολο των ριζών της* f *στο* G *δεν είναι ούτε πεπερασμένο ούτε αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. $(1) \Rightarrow (6)$: Αν $f \equiv 0$, τότε $Z_f = G$ και επομένως το σύνολο Z_f είναι υπεραριθμήσιμο. Πράγματι, το ανοικτό σύνολο G περιέχει ανοικτό δίσκο και επομένως θα περιέχει ένα διάστημα που ως γνωστόν δεν είναι ούτε πεπερασμένο ούτε αριθμήσιμο σύνολο.

$(6) \Rightarrow (5)$: Ως γνωστόν, Πρόταση 2.3, υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια (K_n) συμπαγών υποσυνόλων του G με $K_n \subseteq K_{n+1}$ και $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Τότε

$$Z_f = G \cap Z_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K_n \cap Z_f)\,.$$

Επειδή το Z_f είναι υπεραριθμήσιμο, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το $K_n \cap Z_f$ δεν είναι ούτε πεπερασμένο ούτε αριθμήσιμο σύνολο(ως γνωστόν η αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων η αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο). Άρα, υπάρχει συμπαγές υποσύνολο K του G τέτοιο ώστε το $K \cap Z_f$ δεν είναι πεπερασμένο σύνολο.

$(5) \Rightarrow (4)$: Υποθέτουμε ότι το $K \cap Z_f$ είναι ένα απειροσύνολο στο συμπαγές σύνολο K. Τότε το $K \cap Z_f$ έχει $\sigma.\sigma$ στο K. Αυτό συνεπάγεται ότι το Z_f έχει $\sigma.\sigma$ στο $K \subset G$, δηλαδή το σύνολο των ριζών της f έχει $\sigma.\sigma$ στο G.

$(4) \Rightarrow (3)$: Ως γνωστόν το Z_f είναι κλειστό σύνολο στο G. Αν a είναι $\sigma.\sigma$ του Z_f στο G, τότε υπάρχει ακολουθία (z_n) σημείων του Z_f με $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Επειδή το Z_f είναι κλειστό σύνολο το $a \in Z_f$, δηλαδή το a είναι ρίζα της f. Μάλιστα το a δεν είναι μεμονωμένη ρίζα της f καθώς η ακολουθία (z_n) ριζών της f τείνει στο a.

$(3) \Rightarrow (2)$: Θα δείξουμε ότι κάθε ρίζα της f πεπερασμένης τάξης είναι μεμονωμένο σημείο στο Z_f. Έστω $z_0 \in Z_f$ ρίζα πεπερασμένης τάξης της f. Τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)\,, \quad \text{όπου } g \text{ αναλυτική συνάρτηση με } g(z_0) \neq 0\,.$$

Επειδή η g είναι συνεχής με $g(z_0) \neq 0$, υπάρχει περιοχή $D(z_0, r)$ του z_0 με $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0, r)$. Τότε $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ και κατά συνέπεια η ρίζα z_0 της f είναι μεμονωμένο σημείο στο Z_f. Όμως από την υπόθεση υπάρχει ρίζα a της f που δεν είναι μεμονωμένο σημείο στο Z_f και άρα το a είναι ρίζα άπειρης τάξης της f στο G.

$(2) \Rightarrow (1)$: Έστω

$$E = \left\{ z \in G : f^{(n)}(z) = 0\,, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}\,.$$

Από την υπόθεση το $E \neq \emptyset$. Επειδή η $f^{(n)}$ είναι συνεχής συνάρτηση, το E είναι κλειστό στο G. Θα αποδείξουμε ότι το E είναι ανοικτό στο G.

Πράγματι, έστω $a \in E$. Επειδή η f είναι αναλυτική συνάρτηση στο a, υπάρχει περιοχή $D(a,r)$ του a τέτοια ώστε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = 0\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(a,r).$$

Επομένως $D(a,r) \subseteq E$ και κατά συνέπεια το E είναι ανοικτό στο G. Όμως το G είναι συνεκτικό σύνολο και το υποσύνολο $E \neq \emptyset$ του G είναι ανοικτό και κλειστό στο G. Άρα $E = G$ και αυτό συνεπάγεται ότι $f(z) = 0$ για κάθε $z \in G$. □

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι μια ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος ταυτοτισμού.

Πόρισμα 4.60. *Έστω $f : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(1) $f \not\equiv 0$, δηλαδή η f δεν είναι ταυτοτικά 0 στο G.

(2) Όλες οι ρίζες της f(αν υπάρχουν) είναι πεπερασμένης τάξης.

(3) Όλες οι ρίζες της f στο G είναι μεμονωμένα σημεία του Z_f, δηλαδή του συνόλου των ριζών της f.

(4) Το Z_f, δηλαδή το σύνολο ριζών της f, δεν έχει σημεία συσσώρευσης($\sigma.\sigma$) στο G.

(5) Για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του G το $K \cap Z_f$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Δηλαδή κάθε συμπαγές υποσύνολο K του G περιέχει πεπερασμένο το πλήθος ρίζες της f.

(6) Το σύνολο Z_f είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Αν το σύνολο Z_f των ριζών της αναλυτικής συνάρτησης f δεν έχει $\sigma.\sigma$ στον τόπο G, μπορεί να έχει $\sigma.\sigma$ στο σύνορο ∂G του G. Αν για παράδειγμα το G είναι φραγμένο και το Z_f είναι απειροσύνολο, τότε το Z_f θα έχει ένα τουλάχιστον $\sigma.\sigma$ στο G(βλέπε άσκηση 5).

Το θεώρημα ταυτοτισμού μας δίνει μια άλλη σημαντική διαφορά μεταξύ της πραγματικής και της μιγαδικής ανάλυσης. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x \leq 0\ . \end{cases}$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι $f^{(n)}(0) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως το 0 είναι ρίζα άπειρης τάξης της f. Επίσης το σύνολο Z_f των ριζών της f έχει σημεία συσσώρευσης στο $\mathbb{R}$ και είναι υπεραριθμήσιμο.

Η παρακάτω σημαντική εφαρμογή του θεωρήματος 4.59 λέγεται και *θεώρημα μοναδικότητας*.

Θεώρημα 4.61 (Θεώρημα μοναδικότητας). *Έστω $f, g : G \to \mathbb{C}$ αναλυτικές συναρτήσεις στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$.*

(1) Είναι $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in G$, αν και μόνο αν το σύνολο

$$Z_{f-g} := \{z \in G : \ f(z) = g(z)\}$$

έχει σημείο συσσώρευσης(σ.σ) στο G.

(2) Έστω (z_n) ακολουθία σημείων του G με όρους διάφορους ανά δύο και $\lim_{n\to\infty} z_n = a \in G$. Αν $f(z_n) = g(z_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in G$.

(3) Υποθέτουμε ότι το $X \subset G$ έχει σ.σ στο G. Αν $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in X$, τότε $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in G$.

(4) Αν $f(z) = g(z)$ για κάθε σημείο ενός ευθ. τμήματος που ανήκει στο G, τότε $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in G$.

(5) Αν $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in D(a, r) \subseteq G$, τότε $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in G$.

Απόδειξη. (1) Εφαρμογή του θεωρήματος ταυτοτισμού για τη συνάρτηση $h(z) := f(z) - g(z)$.

(2) Η απόδειξη προκύπτει από την (1).

(3) Επειδή $X \subseteq Z_{f-g}$, η απόδειξη προκύπτει από την (1).

(4) Υποθέτουμε ότι $[\alpha, \beta] \subset G$. Επειδή το α είναι $\sigma.\sigma$ του $[\alpha, \beta]$ και $\alpha \in G$, η απόδειξη προκύπτει από την (3).

(5) Αν $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in D(a, r) \subseteq G$, τότε θα είναι $f(z) = g(z)$ για κάθε σημείο ενός ευθ. τμήματος που περιέχεται στον ανοικτό δίσκο $D(a, r)$. Επομένως από την (4) έπεται ότι $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in G$.

$\square$

Παρατήρηση 4.62. *Στο Θεώρημα 4.61* (2) *είναι σημαντικό το όριο της ακολουθίας να ανήκει στον τόπο* G. *Η συνάρτηση* $f(z) = e^{1/(1-z)}$ *είναι αναλυτική στο* $D(0, 1)$ *και δεν είναι σταθερή. Αν* $z_n = 1 - 1/2n\pi i$, *τότε*

$$f(z_n) = e^{1/(1-z_n)} = e^{2n\pi i} = 1\,.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{n\to\infty} z_n = 1 \notin D(0, 1)$.

Το θεώρημα μοναδικότητας είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο. Αν για παράδειγμα οι f και g είναι ακέραιες συναρτήσεις, για να δείξουμε ότι $f = g$ αρκεί να δείξουμε ότι $f = g$ σε κάποιο διάστημα του πραγματικού άξονα.

Παρατήρηση 4.63. *Με το θεώρημα μοναδικότητας μπορούμε εύκολα να αποδεικνύουμε τριγωνομετρικές ταυτότητες. Για παράδειγμα, έστω*

$$f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z\,, \quad \textit{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

Η f *είναι ακέραια συνάρτηση με* $f(x) = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$. *Επομένως, από το Θεώρημα 4.61* (4) *έπεται ότι* $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$.

Θα δώσουμε τώρα μια αλγεβρική εφαρμογή του θεωρήματος μοναδικότητας. Υπενθυμίζεται ότι ένας δακτύλιος $(R, +, \cdot)$ ονομάζεται *ακέραια περιοχή (integral domain)*, αν είναι μεταθετικός, έχει μοναδιαίο στοιχείο διαφορετικό του μηδενικού και δεν έχει μηδενοδιαιρέτες (δηλαδή για όλα τα στοιχεία x, y του δακτυλίου, αν $x \cdot y = 0$ τότε είτε $x = 0$ ή $y = 0$).

Πόρισμα 4.64. *Αν $G \subseteq \mathbb{C}$ είναι ένας οποιοσδήποτε τόπος, ο δακτύλιος $H(G)$ όλων των αναλυτικών(ολόμορφων) συναρτήσεων στο G είναι μια ακέραια περιοχή. Δηλαδή αν οι $f, g : G \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις στον τόπο G με*

$$f(z)g(z) = 0\,, \quad \text{για κάθε } z \in G\,,$$

τότε είτε $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$ στο G.

Απόδειξη. Έστω $g(z_0) \neq 0$ για κάποιο $z_0 \in G$. Επειδή η g είναι συνεχής στο z_0, υπάρχει περιοχή $D(z_0, r) \subset G$ τέτοια ώστε $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0, r)$. Τότε $f(z) = 0$ για κάθε $z \in D(z_0, r)$ και από το Θεώρημα 4.61 (5) $f \equiv 0$ στο G. □

Παράδειγμα 4.65. *Αν η f είναι αναλυτική συνάρτηση στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0,1)$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε*

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \neq \frac{1}{n+1}\,.$$

Λύση. Υποθέτουμε ότι

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} = \frac{1/n}{1+1/n}\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

Αν $g(z) := \frac{z}{1+z}$, τότε $f(1/n) = g(1/n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $\lim_{n\to 0} 1/n = 0 \in D(0,1)$. Επομένως το σύνολο $\{z \in D(0,1) : f(z) = g(z)\}$ έχει σημείο συσσώρευσης($\sigma.\sigma$) στο $D(0,1)$ και από το θεώρημα μοναδικότητας $f(z) = \frac{z}{1+z}$ για κάθε $z \in D(0,1)$. Όμως η f δεν είναι αναλυτική στο σημείο $-1 \in \overline{D}(0,1)$, άτοπο. Άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \neq \frac{1}{n+1}\,.$$

■

Παράδειγμα 4.66. *Έστω f αναλυτική συνάρτηση στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ και τέτοια ώστε*

$$|f(1/n)| \leq 2^{-n}\,, \quad \text{για } n = 2, 3, 4, \ldots\,.$$

Να βρεθεί η f.

Λύση. Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, από την υπόθεση έχουμε

$$|f(0)| = \lim_{n\to\infty} |f(1/n)| \leq \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0\,, \quad \text{δηλαδή } f(0) = 0\,.$$

– Αν το 0 είναι ρίζα άπειρης τάξης της f, από το θεώρημα ταυτοτισμού η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο $D(0,1)$.

– Υποθέτουμε τώρα ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Αν το 0 είναι ρίζα τάξης m της f, τότε

$$f(z) = z^m g(z)\,,$$

όπου η συνάρτηση g είναι αναλυτική στο 0 με $g(0) \neq 0$. Επειδή $|g(1/n)| = n^m|f(1/n)| \leq n^m 2^{-n}$, έχουμε

$$|g(0)| = \lim_{n\to\infty} |g(1/n)| \leq \lim_{n\to\infty} n^m 2^{-n} = 0\,.$$

Δηλαδή $g(0) = 0$, άτοπο. Άρα η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο $D(0,1)$. ■

Παράδειγμα 4.67. *Να εξεταστεί αν ισχύει το παρακάτω:*

Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο $\{0 < |z| < 2\}$ και $f(1/n) = 0$, $n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, τότε η f είναι ταυτοτικά μηδέν.

Απάντηση: Δεν ισχύει. Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση $f(z) = \sin(\pi/z)$. Η f είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο $\{0 < |z| < 2\}$, δεν είναι ταυτοτικά μηδέν και $f(1/n) = \sin(\pi n) = 0$, $n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Σημειώνεται ότι αν η f ήταν αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $D(0,2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, οπότε $0 \in D(0,2)$, από το θεώρημα ταυτοτισμού η f θα ήταν ταυτοτικά μηδέν.

Παράδειγμα 4.68. *Έστω f αναλυτική συνάρτηση στον τόπο $G = \{z : |z| > a\}$. Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές στο διάστημα (a,∞) του $\mathbb{R}$, τότε η f θα παίρνει πραγματικές τιμές και στο διάστημα $(-\infty,-a)$*

Λύση. Επειδή

$$G^* = \{z : \overline{z} \in G\} = \{z : |\overline{z}| > a\} = \{z : |z| > a\} = G\,,$$

από το Παράδειγμα 3.18 η συνάρτηση $f^*(z) := \overline{f(\overline{z})}$ είναι αναλυτική στο G. Επειδή $f(x) = f^*(x)$ για κάθε $x \in (a,\infty)$, από το θεώρημα μοναδικότητας θα είναι και $f(z) = f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ για κάθε $z \in G$. Ειδικά για κάθε $x \in (-\infty,-a)$ είναι $f(x) = \overline{f(x)}$. Άρα, $f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in (-\infty,-a)$.

■

Παράδειγμα 4.69. *Αν $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \infty$, δηλαδή $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$, τότε η f είναι ένα πολυώνυμο.*

Απόδειξη. Επειδή $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(z)| > 1$ για κάθε $|z| > M$. Επειδή το $\overline{D}(0, M)$ είναι συμπαγές σύνολο, από το Πόρισμα 4.60 η f έχει πεπερασμένο το πλήθος ρίζες στο $\overline{D}(0, M)$. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ οι ρίζες της f στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0, M)$. Ορίζουμε την ακέραια συνάρτηση $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_N)}\,.$$

Επειδή $|f(z)| > 1$ για κάθε $|z| > M$, είναι $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και κατά συνέπεια η συνάρτηση

$$h(z) := \frac{1}{g(z)} = \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_N)}{f(z)}$$

είναι ακέραια. Επίσης $h(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επειδή για $z \neq 0$

$$\frac{h(z)}{z^N} = \frac{(1-\alpha_1/z)(1-\alpha_2/z)\cdots(1-\alpha_N/z)}{f(z)}$$

και από την υπόθεση $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$, είναι

$$\lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{h(z)}{z^N}\right| = 0\,.$$

Έστω $\varepsilon = 1$. Τότε υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left|\frac{h(z)}{z^N}\right| < 1 \Leftrightarrow |h(z)| < |z|^N\,, \quad \text{για κάθε } |z| > R\,.$$

Επομένως από τη γενίκευση του θεωρήματος Liouville το h είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ N. Επειδή $h(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, θα είναι $h(z) = c$ και άρα

$$f(z) = \frac{1}{c}(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_N)\,.$$

Σημείωση: Για μια διαφορετική απόδειξη παραπέμπουμε στο Παράδειγμα 6.13. □

Ασκήσεις

1. Έστω f αναλυτική συνάρτηση σε μια περιοχή U του 0, με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) \neq 0$. Δείξτε ότι υπάρχει αναλυτική συνάρτηση ϕ σε μια περιοχή V του 0, τέτοια ώστε $f(z) = \phi(z)^2$ για κάθε $z \in V$.

2. Έστω $f : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο G και έστω $z_0 \in G$ ρίζα τάξης $n \geq 1$ της f. Δείξτε ότι υπάρχει αναλυτική συνάρτηση ϕ σε μια περιοχή $D(z_0, \delta)$ του z_0, τέτοια ώστε $f(z) = \phi(z)^n$ για κάθε $z \in D(z_0, \delta) \subseteq G$. Δηλαδή η f έχει αναλυτική n-οστή ρίζα σε μια περιοχή του z_0.

3. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο U και έστω z_0 σημείο του U τέτοιο ώστε η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν σε μια περιοχή του z_0. Δείξτε ότι υπάρχει ένας μη αρνητικός ακέραιος k, μια περιοχή $V \subseteq U$ του z_0 και μια αναλυτική συνάρτηση h στο V, τέτοια ώστε
$$f(z) = (z - z_0)^k e^{h(z)}\,, \quad \text{για κάθε } z \in V\,.$$

4. Έστω f ακέραια συνάρτηση με ρίζες $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, όπου α_j είναι ρίζα τάξης m_j, $1 \leq j \leq n$. Δείξτε ότι υπάρχει ακέραια συνάρτηση g τέτοια ώστε
$$f(z) = (z - \alpha_1)^{m_1}(z - \alpha_2)^{m_2} \cdots (z - \alpha_n)^{m_n} e^{g(z)}\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $D(0,1) \setminus \{0\}$ με
$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) \sin\left(\frac{1}{1-z}\right)\,, \quad 0 < |z| < 1\,.$$
Να βρεθούν οι ρίζες και τα σημεία συσσώρευσης της f.

6. Αν η ακέραια συνάρτηση f έχει πεπερασμένο το πλήθος ρίζες, δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο p και ακέραια συνάρτηση g τέτοια ώστε $f(z) = p(z)g(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

7. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι είτε $f(z) \equiv 0$ σε μια περιοχή του z_0 ή υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $f(z) \neq 0$ για κάθε z στο διάτρητο δίσκο $\Delta : 0 < |z - z_0| < r$.

8. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ με
$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{1-z}\right)\,.$$
Αν $z_n = 1 - 1/n$, τότε $f(z_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Γιατί δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα 4.61;

9. Αν η f είναι αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$, δείξτε ότι
$$f\left(\frac{1}{n}\right) \neq \frac{1}{n+2}\,, \quad \text{για κάποιο } n = 2, 3, \ldots.$$

10. Υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ και τέτοια ώστε

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{n}, \quad n = 2,3,\dots\ ;$$

11. Για ποια $a \in \mathbb{C}$ υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\ 1)$, τέτοια ώστε

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+a}, \quad \text{για κάθε φυσικό αριθμό } n \geq 2\,;$$

12. Εξετάστε αν υπάρχουν αναλυτικές συναρτήσεις f στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ που να ικανοποιούν οποιαδήποτε από τις παρακάτω συνθήκες.

$$\begin{array}{lll}
(i) & f\left(\dfrac{1}{n}\right) & = \dfrac{1}{n^2} - 1\,, \quad n = 2,3,\dots\,. \\
(ii) & f\left(\dfrac{1}{n}\right) & = (-1)^n \dfrac{1}{n} \quad , \quad n = 2,3,\dots\,. \\
(iii) & f\left(\dfrac{1}{2n+1}\right) & = \dfrac{1}{2n}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \\
(iv) & |f^{(n)}(0)| & \geq (n!)^2\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.
\end{array}$$

13. Εξετάστε αν υπάρχει ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$\Re f(z) = \sin x\,, \quad \text{για κάθε } z = x + iy \in \mathbb{C}\,.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

14. Έστω f, g αναλυτικές συναρτήσεις στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ με $f(z) \neq 0$ και $g(z) \neq 0$, για κάθε $|z| < 1$. Υποθέτουμε ότι

$$\frac{f'\left(\frac{1}{n}\right)}{f\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{g'\left(\frac{1}{n}\right)}{g\left(\frac{1}{n}\right)}, \quad n = 2,3,\dots\,.$$

Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $f(z) = cg(z)$ για κάθε $|z| < 1$.

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ είναι αναλυτική στο $D(0,1)$.

15. Έστω f ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\left| f\left(\frac{1}{\ln(n+2)}\right) \right| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

Δείξτε ότι $f \equiv 0$.

16. Υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$, τέτοια ώστε
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\ln n},$$
για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$;

17. Υπάρχει ακέραια συνάρτηση f, τέτοια ώστε $f(p) = \cos\sqrt{p}$ για κάθε $p \in \mathbb{N}$;

18. (i) Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f που είναι αναλυτικές στο $D(0,1)$ και τέτοιες ώστε
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)^3, \quad \text{για } n = 2,3,4,\ldots.$$
(ii) Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις g που είναι αναλυτικές στο $D(0,1)$ και τέτοιες ώστε
$$g\left(\frac{1}{n}\right) = n^4 g\left(\frac{1}{n}\right)^5, \quad \text{για } n = 2,3,4,\ldots.$$

19. Έστω (a_k) ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Αν
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k n^{-k} = 0, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$
δείξτε ότι $a_k = 0$, για κάθε $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

20. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση, $f \not\equiv 0$, με $f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Αν η f απεικονίζει το φανταστικό άξονα σε μια ευθεία γραμμή στο $\mathbb{C}$, δείξτε ότι αυτή η ευθεία γραμμή θα είναι είτε ο πραγματικός άξονας ή ο φανταστικός άξονας.
Υπόδειξη. Η συνάρτηση $f^*(z) := \overline{f(\overline{z})}$ είναι ακέραια στο $\mathbb{C}$.

21. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση η οποία παίρνει πραγματικές τιμές τόσο στην ευθεία $\Im z = 0$, δηλαδή στον πραγματικό άξονα, όσο και στην ευθεία $\Im z = \pi$. Δείξτε ότι η f έχει περίοδο $2\pi i$, δηλαδή
$$f(z + 2\pi i) = f(z), \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$
Υπόδειξη. Η συνάρτηση $f^*(z) := \overline{f(\overline{z})}$ είναι ακέραια στο $\mathbb{C}$.

22. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ που περιέχει το 0. Αν $f'(0) \neq 0$, δείξτε ότι υπάρχει αναλυτική συνάρτηση g ορισμένη σε μια περιοχή του 0 τέτοια ώστε
$$f(z^n) = f(0) + (g(z))^n.$$

23. Έστω $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραιες συναρτήσεις με

$$|f(z)| \leq (1+|z|)|g(z)|\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b \in \mathbb{C}$ με $|a| \leq 1$ και $|b| \leq 1$ τέτοια ώστε

$$f(z) = (az+b)g(z)\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

24. Έστω $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραιες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και για όλα τα μεγάλα $|z|$, $|f(z)| \leq |z^k g(z)|$. Δηλαδή υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(z)| \leq |z^k g(z)|\,, \quad \text{για κάθε } |z| > R\,.$$

Δείξτε ότι $f(z) = h(z)g(z)$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$, όπου h είναι ρητή συνάρτηση(δηλαδή η h είναι πηλίκο δύο πολυωνύμων).

<u>*Υπόδειξη*</u>. Έστω $g \not\equiv 0$. Αν $z_1, \ldots, z_m$ είναι οι ρίζες της g στο $\overline{D}(0, R)$, η συνάρτηση

$$G(z) := f(z)\frac{\prod_{n=1}^{m}(z - z_n)}{g(z)}$$

είναι ακέραια.

25. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$ που περιέχει τον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

(αʹ) Αν
$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{(n+1)z - 1}\,dz = 0\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\,,$$
δείξτε ότι $f \equiv 0$ στο G.

(βʹ) Αν
$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{((n+1)z-1)^3}\,dz = 0\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\,,$$
με $f'(0) = 0$, δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο G.

26. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (z_n) στο $D(0,1)$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty}|z_n| = 1$ και η $(f(z_n))$ είναι φραγμένη.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Εξετάστε τις περιπτώσεις (i) η f έχει άπειρο το πλήθος ρίζες στο $D(0,1)$ και (ii) η f έχει πεπερασμένο το πλήθος ρίζες στο $D(0,1)$.

4.8 Αρχή Μεγίστου- Αρχή Ελαχίστου- Λήμμα Schwarz

Θεώρημα 4.70 (Αρχή Μεγίστου–1η μορφή). *Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$ και η $|f|$ έχει τοπικό μέγιστο στο $z_0 \in G$, τότε η f είναι σταθερή στο G.*

Απόδειξη. Αν η $|f|$ έχει τοπικό μέγιστο στο $z_0 \in G$, τότε υπάρχει περιοχή $D(z_0, \delta) \subseteq G$ τέτοια ώστε $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ για κάθε $z \in D(z_0, \delta)$. Για κάθε $r > 0$ με $r < \delta$ από το θεώρημα μέσης τιμής του Gauss για αναλυτικές συναρτήσεις, Θεώρημα 4.21, είναι

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt\,.$$

Επειδή ο κύκλος $C(z_0, r) \subset D(z_0, \delta)$, από την υπόθεση έχουμε $|f(z_0 + re^{it})| \leq |f(z_0)|$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$ και επομένως

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\, dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)|\, dt = |f(z_0)|\,. \end{aligned}$$

Άρα

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\, dt$$

και ισοδύναμα

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{it})|\big)\; dt = 0\,, \quad \text{με } |f(z_0)| - |f(z_0 + re^{it})| \geq 0\,.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{it})| = 0 \Leftrightarrow |f(z_0 + re^{it})| = |f(z_0)|$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $r > 0$, $0 < r < \delta$, έχουμε αποδείξει ότι $|f(z)| = |f(z_0)|$ για κάθε $z \in D(z_0, \delta)$. Τότε από την Πρόταση 3.20 η f είναι σταθερή στο $D(z_0, \delta)$ και επομένως από το Θεώρημα μοναδικότητας, Θεώρημα 4.61 (5), η f θα είναι σταθερή στο G. □

Αν το $G \subset \mathbb{C}$ είναι ένας *φραγμένος* τόπος, τότε το $\overline{G}$ είναι κλειστό και φραγμένο και κατά συνέπεια συμπαγές σύνολο. Αν η f είναι συνεχής στο $\overline{G}$, τότε η συνεχής και με πραγματικές τιμές συνάρτηση $|f|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $\overline{G}$. Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική και μη σταθερή στο G, το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγεται ότι η $|f|$ δεν μπορεί να πάρει τη μέγιστη τιμή της σε κάποιο σημείο του G. Επομένως η $|f|$ θα παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο ∂G του G. Έχουμε λοιπόν αποδείξει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.71 (Αρχή Μεγίστου–2η μορφή). *Υποθέτουμε ότι το G είναι ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$, δηλαδή το G είναι ένας φραγμένος τόπος. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\overline{G}$, αναλυτική στο G και μη σταθερή, τότε η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο ∂G του G και μόνο εκεί.*

Υποθέτουμε ότι η f είναι αναλυτική στο πεδίο $G \subseteq \mathbb{C}$ και ότι δεν μηδενίζεται, δηλαδή η f δεν έχει ρίζες στο G. Αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.70 για τη συνάρτηση $g = 1/f$, τότε προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.72 (Αρχή Ελαχίστου–1η μορφή). *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$ και δεν έχει ρίζες στο G. Αν η $|f|$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $z_0 \in G$, τότε η f είναι σταθερή στο G.*

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στον φραγμένο τόπο $\overline{G}$, αναλυτική και μη σταθερή στο G και δεν μηδενίζεται στο G, τότε το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγεται ότι η $|f|$ θα παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο ∂G του G.

Θεώρημα 4.73 (Αρχή Ελαχίστου–2η μορφή). *Έστω G ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$, δηλαδή το G είναι ένας φραγμένος τόπος. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται στο G. Αν η f είναι συνεχής στο $\overline{G}$, αναλυτική στο G και μη σταθερή, τότε η $|f|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο ∂G του G και μόνο εκεί.*

Χρησιμοποιώντας την αρχή ελαχίστου μπορούμε να δώσουμε μια άλλη απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας, παραπέμπουμε στην άσκηση 14.

Θεώρημα 4.74 (Αρχή Μεγίστου–Ελαχίστου για αρμονικές συναρτήσεις). *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $u : G \to \mathbb{R}$ είναι αρμονική και μη σταθερή στον τόπο G. Τότε η u δεν έχει τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο στο G.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση u έχει τοπικό μέγιστο στο $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$, δηλαδή ότι υπάρχει περιοχή $D(z_0, \delta) \subseteq G$ του z_0 τέτοια ώστε $u(x, y) \leq u(x_0, y_0)$ για κάθε $z = x + iy \in D(z_0, \delta)$. Επειδή το $D(z_0, \delta)$ είναι ένας απλά συνεκτικός τόπος, υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f στο $D(z_0, \delta)$ με $u = \Re f$. Αν $g = e^f$, η g είναι αναλυτική και μη σταθερή στο $D(z_0, \delta)$. Επιπλέον, για κάθε $z = x + iy \in D(z_0, \delta)$ είναι

$$|g(z)| = |e^{\Re f(z) + i\Im f(z)}| = e^{u(x,y)} \leq e^{u(x_0,y_0)} = |g(z_0)|$$

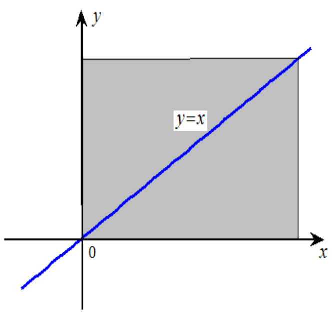
και επομένως η $|g|$ έχει τοπικό μέγιστο στο z_0 το οποίο είναι άτοπο από το Θεώρημα 4.70. Άρα η u δεν έχει τοπικό μέγιστο στο G.

Αν αντικαταστήσουμε τη u με τη $-u$, τότε προκύπτει ότι η u δεν έχει τοπικό ελάχιστο στο G. □

Παρατήρηση 4.75. *Γενικά η αρχή μεγίστου, Θεώρημα 4.71, δεν ισχύει για μη φραγμένους τόπους. Έστω η ακέραια συνάρτηση $f(z) = e^{-iz^2}$ ορισμένη στο πρώτο τεταρτημόριο $A = \{z \in \mathbb{C} : \Re z, \Im z > 0\}$. Είναι*

$$|f(z)| = |f(x + iy)| = |e^{-i(x+iy)^2}| = |e^{i(y^2 - x^2)}|e^{2xy} = e^{2xy}\,.$$

Στο σύνορο του A είναι $y = 0$ ή $x = 0$ και επομένως $|f(z)| = 1$.



Όμως πάνω στην ευθεία $y = x$, με $x, y > 0$, που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο έχουμε

$$|f(z)| = |e^{-i(x+ix)^2}| = e^{2x^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty\,.$$

Επομένως η αρχή μεγίστου δεν ισχύει για την ακέραια συνάρτηση $f(z) = e^{-iz^2}$ στο μη φραγμένο τόπο A.

Παρατήρηση 4.76. *Στα κλειστά και φραγμένα διαστήματα του $\mathbb{R}$ οι συνεχείς συναρτήσεις με πραγματικές ή μιγαδικές τιμές προσεγγίζονται ομοιόμορφα από πολυώνυμα. Αυτό είναι το κλασικό προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass, παραπέμπουμε στο [16] ή στο [39]. Δηλαδή αν η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο*

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \quad (n \in \mathbb{N}\,,\ a_k \in \mathbb{C})$$

τέτοιο ώστε

$$|f(t) - p(t)| < \varepsilon\,, \quad \text{για κάθε } t \in [a, b]\,.$$

Ειδικά αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(t) = e^{-it}$ στο $[0, 2\pi]$, από το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε

$$|e^{-it} - p(t)| < \varepsilon\,, \quad \text{για κάθε } t \in [0, 2\pi]\,.$$

Αυτό το αποτέλεσμα δεν ισχύει αν κάποιος θεωρήσει πολυώνυμα του e^{it} και όχι του t. Πράγματι, έστω η συνεχής συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z}$ στο μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ που είναι ένα συμπαγές(κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Για $\varepsilon = 1$ υποθέτουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε

$$\left|\frac{1}{z} - p(z)\right| < 1\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{T}\,.$$

Αν $q(z) := zp(z)$, το πολυώνυμο q είναι μια αναλυτική μη σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$|1 - q(z)| < 1\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{T}\,.$$

Επομένως από την αρχή μεγίστου θα πρέπει να είναι

$$|1 - q(z)| < 1\,, \quad \text{για κάθε } |z| \leq 1\,.$$

Όμως για $z = 0$ παίρνουμε

$$1 = |1 - q(0)| < 1$$

που είναι άτοπο. Άρα, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε πολυώνυμο p μιας μιγαδικής μεταβλητής είναι

$$\left|\frac{1}{z} - p(z)\right| \geq \varepsilon\,, \quad \textit{για κάθε } z \in \mathbb{T}$$

και ισοδύναμα

$$|e^{-it} - p(e^{it})| \geq \varepsilon\,, \quad \textit{για κάθε } t \in [0, 2\pi]\,.$$

Αποδείξαμε ότι η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z}$ δεν προσεγγίζεται ομοιόμορφα στο μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{T}$ από πολυώνυμα. Όμως η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z}$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα στο $\mathbb{T}$ από **τριγωνομετρικά πολυώνυμα**, *δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο P τέτοιο ώστε*

$$|e^{-it} - P(e^{it})| < \varepsilon\,, \quad \textit{για κάθε } t \in [0, 2\pi]\,.$$

Αυτό είναι άμεση συνέπεια του παρακάτω αποτελέσματος που είναι ένα πόρισμα του θεωρήματος Stone-Weierstrass(βλέπε [35], [39]).

Πρόταση 4.77. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ και $(c_n)_{n=-N}^{N} \subset \mathbb{C}$ έτσι ώστε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο*

$$P(z) = \sum_{n=-N}^{N} c_n z^n \quad \left(\textit{και ισοδύναμα το } P(e^{it}) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}\right)$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$|f(z) - P(z)| < \varepsilon\,,\ \textit{για κάθε } z \in \mathbb{T}\ \left(\textit{και ισοδύναμα } |f(e^{it}) - P(e^{it})| < \varepsilon\,,\ \textit{για κάθε } t \in [0, 2\pi]\right)\,.$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι οι αναλυτικές συναρτήσεις σ' ένα απλά συνεκτικό τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$ προσεγγίζονται ομοιόμορφα από πολυώνυμα στα συμπαγή υποσύνολα του G, αυτό είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Runge, παραπέμπουμε στο [32, 13.9 Theorem]. Δηλαδή για κάθε αναλυτική συνάρτηση f στον απλά συνεκτικό τόπο G, για κάθε συμπαγές υποσύνολο $K \subset G$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα πολυώνυμο p τέτοιο ώστε

$$|f(z) - p(z)| < \varepsilon\,, \quad \textit{για κάθε } z \in K.$$

Το θεώρημα του Runge δεν μπορεί να εφαρμοστεί για τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z}$ *που θεωρήσαμε παραπάνω. Ο μοναδιαίος κύκλος* $\mathbb{T}$ *είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του* $\mathbb{C}$ *και η συνάρτηση* f *είναι αναλυτική στο* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$*, όμως η* f *δεν είναι αναλυτική στο σημείο* 0.

Παράδειγμα 4.78. *Έστω η συνάρτηση* $f(z) = \frac{e^z}{z}$ *και έστω* $\Delta : \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1$. *Να βρεθούν τα σημεία του* Δ *στα οποία η* $|f|$ *παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της καθώς επίσης και το* $\max_{z\in\Delta} |f(z)|$, $\min_{z\in\Delta} |f(z)|$.

Λύση. Επειδη η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ και δεν μηδενίζεται στο εσωτερικό του Δ, από την αρχή μεγίστου/ελαχίστου η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο του Δ που είναι οι ομόκεντροι κύκλοι: $|z| = \frac{1}{2}$ και $|z| = 1$.
Η παραμετρική εξίσωση του κύκλου $|z| = R$, όπου $R = \frac{1}{2}$ και $R = 1$, είναι $z(\theta) = Re^{i\theta} = R(\cos\theta + i\sin\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Για κάθε z στο σύνορο του Δ έχουμε

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{R(\cos\theta+i\sin\theta)}}{R(\cos\theta + i\sin\theta)}\right| = \frac{\left|e^{R\cos\theta}\right|\left|e^{iR\sin\theta}\right|}{R} = \frac{e^{R\cos\theta}}{R}\,.$$

Επομένως η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της για $\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$ και την ελάχιστη τιμή της για $\cos\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi$.

− Για $\theta = 0$ και $R = 1/2$, έχουμε

$$|f(1/2)| = \frac{e^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{e} \approx 3,3\,.$$

− Για $\theta = 0$ και $R = 1$, έχουμε

$$|f(1)| = \frac{e}{1} = e \approx 2,7\,.$$

Επομένως $\max_{z\in\Delta} |f(z)| = |f(1/2)| = 2\sqrt{e} \approx 3,3$.

− Για $\theta = \pi$ και $R = 1/2$, έχουμε

$$|f(-1/2)| = \frac{e^{-1/2}}{1/2} = \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1,2\,.$$

− Για $\theta = \pi$ και $R = 1$, έχουμε

$$|f(-1)| = \frac{e^{-1}}{1} = \frac{1}{e} \approx 0,4\,.$$

Επομένως $\min_{z\in\Delta} |f(z)| = |f(-1)| = \frac{1}{e} \approx 0,4$. ■

Παράδειγμα 4.79. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* $f : \overline{D}(a,r) \to \mathbb{C}$ *είναι αναλυτική στον κλειστό δίσκο* $\overline{D}(a,r)$ *και ότι η* $|f|$ *είναι σταθερή στον κύκλο* $C(a,r)$ *που είναι το σύνορο του δίσκου, έστω* $|f(z)| = c$ *για κάθε* $z \in C(a,r)$. *Τότε είτε η* f *έχει ρίζα στον ανοικτό δίσκο* $D(a,r)$ *ή η* f *είναι σταθερή στον ανοικτό δίσκο* $D(a,r)$.

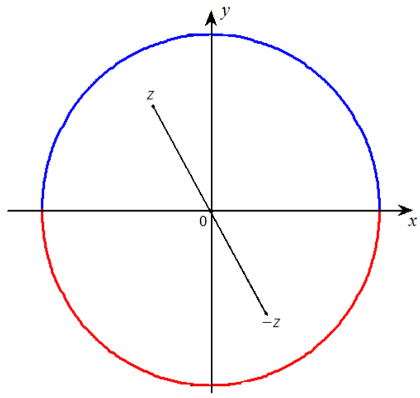
Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f δεν έχει ρίζα στον ανοικτό δίσκο $D(a,r)$. Τότε από την αρχή μεγίστου και την αρχή ελαχίστου η $|f|$ θα παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο του $D(a,r)$, δηλαδή στον κύκλο $C(a,r)$. Επειδή $|f(z)| = c$ στον κύκλο $C(a,r)$, θα είναι $|f(z)| = c$ για κάθε $z \in D(a,r)$. Τότε από την Πρόταση 3.20 η f θα είναι σταθερή στο $D(a,r)$. □

Παράδειγμα 4.80. *Έστω* f *αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο* $D(0,1)$ *και συνεχής στον κλειστό μοναδιαίο μοναδιαίο δίσκο* $\overline{D}(0,1)$. *Αν*

$$|f(z)| \le \begin{cases} 2 & \text{αν } |z| = 1, \Im z \ge 0 \\ 3 & \text{αν } |z| = 1, \Im z < 0\,, \end{cases}$$

τότε $|f(0)| \le \sqrt{6}$.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(z) := f(z)f(-z)$. Αν $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1, \Im z \ge 0\}$ και $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1, \Im z \le 0\}$, παρατηρούμε ότι για κάθε $z \in A$ το $-z \in K$ και για κάθε $z \in K$ το $-z \in A$. Επομένως η g είναι αναλυτική στο $D(0,1)$ και συνεχής στο $\overline{D}(0,1)$.



Είναι

$$|g(z)| = |f(z)||f(-z)| \le \begin{cases} 2 \times 3 = 6 & \text{αν } |z| = 1, \Im z \ge 0 \\ 3 \times 2 = 6 & \text{αν } |z| = 1, \Im z < 0\,, \end{cases}$$

δηλαδή $|g(z)| \leq 6$ για κάθε $|z| = 1$. Επομένως από την αρχή μεγίστου είναι $|g(z)| \leq 6$ για κάθε $z \in \overline{D}(0, 1)$. Ειδικά $|g(0)| = |f(0)||f(-0)| \leq 6$ και κατά συνέπεια $|f(0)|^2 \leq 6$. Άρα $|f(0)| \leq \sqrt{6}$.
■

Παράδειγμα 4.81. *Έστω f αναλυτική συνάρτηση στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0,\,1)$. Αν $f(z) = 1$ για κάθε z στο ημικύκλιο γ^+ με εξίσωση $z(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, τότε $f(z) = 1$ για κάθε $z \in \overline{D}(0,\,1)$.*

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(z) := (f(z) - 1)(f(-z) - 1)$ η οποία είναι αναλυτική στο $\overline{D}(0,\,1)$. Αν $z \in \gamma^+$, τότε $F(z) = 0$. Επίσης αν $z \in \gamma^-$, όπου γ^- είναι το κάτω ημικύκλιο με εξίσωση $z(\theta) = e^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, τότε το $-z \in \gamma^+$ οπότε και πάλι $F(z) = 0$. Επομένως, για κάθε z στο μοναδιαίο κύκλο $C(0,\,1)$ είναι $F(z) = 0$ και από την αρχή μεγίστου θα είναι $F(z) = 0$ για κάθε $z \in \overline{D}(0,\,1)$. Ισοδύναμα,

$$(f(z) - 1)(f(-z) - 1) = 0\,, \quad \text{για κάθε } \overline{D}(0,\,1).$$

Τότε, από το Πόρισμα 4.64 θα είναι είτε $f(z) - 1 \equiv 0$ ή $f(-z) - 1 \equiv 0$ στο $\overline{D}(0,\,1)$. Επειδή η $f(z) - 1 \equiv 0$ στο $\overline{D}(0,\,1)$ είναι ισοδύναμη με την $f(-z) - 1 \equiv 0$ στο $\overline{D}(0,\,1)$, τελικά έχουμε $f(z) \equiv 1$ στο $\overline{D}(0,\,1)$. ■

Παράδειγμα 4.82. *Έστω f αναλυτική συνάρτηση σε ένα τόπο G που περιέχει τον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0, 3) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3\}$. Αν $f(\pm 1) = f(\pm i) = 0$, τότε*

$$|f(0)| \leq \frac{1}{80} \max_{|z|=3} |f(z)|\,. \tag{4.22}$$

Να βρεθούν όλες οι αναλυτικές συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει η ισότητα στην (4.22).

Λύση. Τα $\pm 1, \pm i$ είναι ρίζες της f και επομένως

$$f(z) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)g(z) = (z^4 - 1)g(z)\,,$$

όπου g αναλυτική συνάρτηση στο G. Από την αρχή μεγίστου έχουμε

$$|g(0)| \leq \max_{|z|=3} |g(z)|$$

και επομένως

$$\begin{aligned} |f(0)| &= |g(0)| \\ &\le \max_{|z|=3} |g(z)| \\ &= \max_{|z|=3} \frac{|f(z)|}{|z^4-1|} \\ &\le \max_{|z|=3} \frac{|f(z)|}{|z^4|-1} \\ &= \frac{1}{3^4-1} \max_{|z|=3} |f(z)| = \frac{1}{80} \max_{|z|=3} |f(z)| \,. \end{aligned}$$

Η ισότητα στην (4.22) συνεπάγεται ότι $|g(0)| = \max_{|z|=3} |g(z)|$ και από την αρχή μεγίστου έπεται ότι η g είναι σταθερή στο $D(0,3)$, έστω $g(z) = c$. Επομένως από το θεώρημα μοναδικότητας θα είναι $g(z) = c$ για κάθε $z \in G$ και κατά συνέπεια $f(z) = c(z^4 - 1)$, για κάθε $z \in G$. Άρα, όλες οι αναλυτικές συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει η ισότητα στην (4.22) είναι της μορφής $f(z) = c(z^4 - 1)$, όπου $c \in \mathbb{C}$. ■

Παράδειγμα 4.83. *Έστω το πολυώνυμο $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. Τότε είτε $P(z) \equiv z^n$ ή υπάρχει σημείο w στο μοναδιαίο κύκλο $C(0,1)$ τέτοιο ώστε $|P(w)| > 1$.*

Λύση. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει σημείο w στο μοναδιαίο κύκλο $C(0,1)$ τέτοιο ώστε $|P(w)| > 1$. Τότε έχουμε $|P(z)| \le 1$ για κάθε $|z| = 1$. Θα δείξουμε ότι $P(z) \equiv z^n$.
Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$Q(z) := z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + a_{n-1}z + \cdots + a_0 z^n \,.$$

Επειδή $|P(z)| \le 1$ για κάθε $|z| = 1$, είναι $|P(e^{-i\theta})| \le 1$ για κάθε $\theta \in [-\pi, \pi]$ και επομένως

$$\max_{|z|=1} |Q(z)| = \max_{|z|=1} |P(1/z)| = \max_{\theta \in [-\pi,\pi]} |P(e^{-i\theta})| \le 1 \,.$$

Όμως $Q(0) = 1$ οπότε από την αρχή μεγίστου το Q θα πρέπει να είναι σταθερό στο μοναδιαίο δίσκο. Επομένως $Q(z) \equiv 1$ στο μοναδιαίο δίσκο. Από το θεώρημα μοναδικότητας $Q(z) \equiv 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και κατά συνέπεια $a_{n-1} = \cdots = a_0 = 0$. Άρα $P(z) \equiv z^n$. ■

Το παρακάτω λήμμα του H. A. Schwarz, παρότι είναι ένα πόρισμα της αρχής μεγίστου για αναλυτικές συναρτήσεις, είναι ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία για τη μελέτη των μιγαδικών απεικονίσεων.

Θεώρημα 4.84 (Λήμμα του Schwarz). *Έστω f αναλυτική συνάρτηση στον ανοικτό δίσκο $D(0,R)$ με $|f(z)| \leq M < \infty$ για κάθε $|z| < R$ και $f(0) = 0$. Τότε*

(i) $|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|$, *για κάθε* $|z| < R$,

(ii) $|f'(0)| \leq \frac{M}{R}$.

Αν

$$|f(z)| = \frac{M}{R}|z|\,, \text{ για κάποιο } 0 < |z| < R \quad \text{ή} \quad |f'(0)| = \frac{M}{R}\,,$$

τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| = \frac{M}{R}$ τέτοιο ώστε $f(z) = \lambda z = \frac{M}{R}e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$, για κάθε $z \in D(0,R)$.

Απόδειξη. Επειδή η f είναι αναλυτική συνάρτηση στον ανοικτό δίσκο $D(0,R)$ με $f(0) = 0$, για κάθε $z \in D(0,R)$ είναι

$$\begin{aligned} f(z) &= f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdots \\ &= z\left(f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-1} + \cdots\right) = zg(z)\,, \end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση

$$g(z) := f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-1} + \cdots$$

είναι αναλυτική στο $D(0,R)$. Είναι

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{αν } 0 < |z| < R \\ f'(0) & \text{αν } z = 0\,. \end{cases}$$

Αν $0 < r < R$, τότε για κάθε $|z| \leq r$ από την αρχή μεγίστου έχουμε

$$|g(z)| \leq \max\{|g(w)| : |w| = r\} = \frac{1}{r}\max\{|f(w)| : |w| = r\} \leq \frac{M}{r}\,.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $r \in (0,R)$, παίρνοντας $r \to R^-$ έχουμε ότι

$$|g(z)| \leq \frac{M}{R}\,, \quad \text{για κάθε } |z| < R$$

και αυτό αποδεικνύει το (i) και το (ii).

Αν η ισότητα ισχύει στο (i) για κάποιο $z \in D(0, R)$ με $z \neq 0$, ή αν η ισότητα ισχύει στο (ii), τότε η $|g|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της σε ένα εσωτερικό σημείο του ανοικτού δίσκου $D(0, R)$ και επομένως από την αρχή μεγίστου η g θα είναι σταθερή, δηλαδή $g(z) = \lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| = \frac{M}{R}$. Άρα $f(z) = \lambda z = \frac{M}{R} e^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbb{R}$, για κάθε $z \in D(0, R)$. □

Παρατήρηση 4.85. *Πολλές φορές χρειαζόμαστε το λήμμα του Schwarz στην ειδική περίπτωση του μοναδιαίου δίσκου $D(0, 1)$. Αν $M = 1$, το λήμμα του Schwarz στο μοναδιαίο δίσκο διατυπώνεται ως εξής:*
Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο $D(0, 1)$ με $|f(z)| \leq 1$ για κάθε $|z| < 1$ και $f(0) = 0$. Τότε

(i) $|f(z)| \leq |z|$, *για κάθε* $|z| < 1$,

(ii) $|f'(0)| \leq 1$.

Αν

$$|f(z)| = |z|, \text{ για κάποιο } 0 < |z| < 1 \quad \text{ή} \quad |f'(0)| = 1,$$

τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| = 1$ τέτοιο ώστε $f(z) = \lambda z = e^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbb{R}$, για κάθε $z \in D(0, 1)$.

Σαν πρώτη εφαρμογή του λήμματος Schwarz θα χαρακτηρίσουμε όλες εκείνες τις αναλυτικές συναρτήσεις $f : D(0, 1) \to D(0, 1)$ που είναι $1 - 1$ και επί και οι οποίες απεικονίζουν το 0 στο 0.

Πρόταση 4.86. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : D(0, 1) \to D(0, 1)$ είναι αναλυτική και τέτοια ώστε*

(i) *η* $f : D(0, 1) \to D(0, 1)$ *είναι* $1 - 1$ *και επί,*

(ii) *η* $f^{-1} : D(0, 1) \to D(0, 1)$ *είναι αναλυτική,*

(iii) $f(0) = 0$.

Τότε $f(z) = \lambda z$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| = 1$, για κάθε $z \in D(0, 1)$.

Απόδειξη. Επειδή η f είναι αναλυτική, $f(0) = 0$ και $|f(z)| < 1$ για κάθε $z \in D(0, 1)$, από το λήμμα του Schwarz έπεται ότι $|f(z)| \leq |z|$ για κάθε $z \in D(0, 1)$.

Παρόμοια, επειδή η f^{-1} είναι αναλυτική, $f^{-1}(0) = 0$ και $|f^{-1}(z)| < 1$ για κάθε $z \in D(0,1)$, από το λήμμα του Schwarz έπεται ότι $|f^{-1}(z)| \leq |z|$ για κάθε $z \in D(0,1)$. Επομένως

$$|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)| \leq |z|$$

και κατά συνέπεια $|f(z)| = |z|$ για κάθε $z \in D(0,1)$. Τότε από το λήμμα του Schwarz προκύπτει ότι $f(z) = \lambda z$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| = 1$, για κάθε $z \in D(0,1)$. □

Πριν χαρακτηρίσουμε όλες εκείνες τις αναλυτικές συναρτήσεις $f : D(0,1) \to D(0,1)$ που είναι $1-1$ και επί και οι οποίες απεικονίζουν το α, $|\alpha| < 1$, στο 0, χρειαζόμαστε το εξής:

Πρόταση 4.87. *Για κάθε $\alpha \in D(0,1)$, η*

$$\varphi_\alpha(z) := \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

είναι $1-1$ και απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ στον εαυτό του. Δηλαδή η συνάρτηση $\varphi_\alpha : D(0,1) \to D(0,1)$ είναι $1-1$ και επί.

Απόδειξη. Έστω $z \in D(0,1)$. Αν $w = \varphi_\alpha(z)$, τότε

$$\begin{aligned} 1 - |w|^2 &= 1 - w\overline{w} \\ &= 1 - \frac{(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})}{(1-\overline{\alpha}z)(1-\alpha\overline{z})} \\ &= \frac{(1-|\alpha|^2)(1-|z|^2)}{(1-\overline{\alpha}z)(1-\alpha\overline{z})} \\ &= \frac{(1-|\alpha|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{\alpha}z|^2} > 0 \end{aligned}$$

και επομένως $|w| < 1$. Δηλαδή η φ_α απεικονίζει το $D(0,1)$ στο $D(0,1)$. Επειδή η

$$\varphi_{-\alpha}(z) = \frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}$$

είναι η αντίστροφη της φ_α, συμπεραίνουμε ότι η $\varphi_\alpha : D(0,1) \to D(0,1)$ είναι $1-1$ και επί. □

Θεώρημα 4.88. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : D(0,1) \to D(0,1)$ είναι αναλυτική, $1-1$, επί και η f^{-1} είναι αναλυτική. Αν $f(\alpha)=0$, $|\alpha|<1$, τότε για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda|=1$ είναι*

$$f(z) = \lambda\varphi_\alpha(z) = \lambda\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\,, \quad \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(z) := f(\varphi_{-\alpha}(z))$, όπου $\varphi_{-\alpha}(z) = \frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}$. Επειδή οι συναρτήσεις $f, \varphi_{-\alpha} : D(0,1) \to D(0,1)$ είναι αναλυτικές, $1-1$, επί και οι $f^{-1}, \varphi_{-\alpha}^{-1} = \varphi_\alpha$ είναι αναλυτικές, η συνάρτηση $g = f \circ \varphi_{-\alpha} : D(0,1) \to D(0,1)$ θα είναι αναλυτική, $1-1$, επί και η $g^{-1} = \varphi_{-\alpha}^{-1} \circ f^{-1} = \varphi_\alpha \circ f^{-1}$ θα είναι αναλυτική. Επειδή $g(0) = f(\varphi_{-\alpha}(0)) = f(\alpha) = 0$, από την Πρόταση 4.86 $g(z) = \lambda z$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| = 1$, για κάθε $z \in D(0,1)$. Επομένως

$$g(\varphi_\alpha(z)) = \lambda\varphi_\alpha(z) \Leftrightarrow f(z) = \lambda\varphi_\alpha(z) = \lambda\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(0,1)\,.$$

□

Παρατήρηση 4.89. *Στη Πρόταση 4.86 και στο Θεώρημα 4.88 δεν χρειάζεται να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f^{-1} : D(0,1) \to D(0,1)$ είναι αναλυτική. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η συνάρτηση $f : D(0,1) \to D(0,1)$ είναι αναλυτική και $1-1$. Αποδεικνύεται ότι αν η αναλυτική συνάρτηση f είναι $1-1$, τότε $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(0,1)$(για την απόδειξη χρησιμοποιείται το θεώρημα Rouché, παραπέμπουμε στο [5] ή στο [31]). Επομένως αν $w = f(z)$ με $f'(z) \neq 0$, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο w με*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

Παράδειγμα 4.90. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ με $|f(z)| \leq 1$ για κάθε $|z| < 1$ και $f(1/2) = 0$. Τότε το βέλτιστο άνω φράγμα του $|f(2/3)|$ είναι $1/4$.*

Λύση. Η αναλυτική συνάρτηση $\varphi_{1/2}(z) = \frac{z-1/2}{1-z/2}$ απεικονίζει το $D(0,1)$ στο $D(0,1)$ και το $1/2$ στο 0. Η $\varphi_{-1/2}(z) = \frac{z+1/2}{1+z/2}$ είναι η αντίστροφη της $\varphi_{1/2}$ και απεικονίζει το 0 στο $1/2$. Όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 4.88, ορίζουμε τη συνάρτηση $g(z) := f(\varphi_{-1/2}(z))$. Η συνάρτηση g απεικονίζει το $D(0,1)$ στο $D(0,1)$ και είναι $g(0) = f(\varphi_{-1/2}(0)) = f(1/2) = 0$. Τότε, από το λήμμα του Schwarz

$$|g(z)| \leq |z| \Leftrightarrow |f(\varphi_{-1/2}(z))| \leq |z|\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(0,1)\,.$$

Επειδή $\varphi_{1/2}(2/3) = 1/4 \Leftrightarrow \varphi_{-1/2}(1/4) = 2/3$, έχουμε ότι

$$\left| f\left(\frac{2}{3}\right) \right| \leq \frac{1}{4}\,.$$

Ειδικά, για την αναλυτική συνάρτηση $\varphi_{1/2} : D(0,1) \to D(0,1)$ με $\varphi_{1/2}(1/2) = 0$ είναι $\varphi_{1/2}(2/3) = 1/4$. Επομένως το $1/4$ είναι το βέλτιστο άνω φράγμα του $|f(2/3)|$. ■

Παράδειγμα 4.91. *Αν η συνάρτηση $f : D(0,1) \to D(0,1)$ είναι αναλυτική με $f(0) = 0$ και $f(\alpha) = \alpha$, για κάποιο $\alpha \in D(0,1)$, $\alpha \neq 0$, τότε $f(z) \equiv z$.*

Λύση. Επειδή η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ με $|f(z)| < 1$ για κάθε $|z| < 1$, $f(0) = 0$ και $|f(\alpha)| = |\alpha|$ για κάποιο $0 < |\alpha| < 1$, από το λήμμα του Schwarz $f(z) = \lambda z$, $|\lambda| = 1$, για κάθε $z \in D(0,1)$. Όμως $f(\alpha) = \alpha$ και επομένως $\lambda = 1$. Άρα, $f(z) \equiv z$. ■

Το προηγούμενο παράδειγμα γενικεύεται στην περίπτωση που η αναλυτική συνάρτηση $f : D(0,1) \to D(0,1)$ έχει δύο σταθερά σημεία.

Παράδειγμα 4.92. *Αν η συνάρτηση $f : D(0,1) \to D(0,1)$ είναι αναλυτική και έχει δύο σταθερά σημεία, δηλαδή $f(z_1) = z_1$ και $f(z_2) = z_2$ για κάποια $z_1, z_2 \in D(0,1)$ με $z_1 \neq z_2$, τότε $f(z) \equiv z$.*

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g := \varphi_{z_1} \circ f \circ \varphi_{-z_1}$ η οποία απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ στον εαυτό του και είναι τέτοια ώστε

$$g(0) = \varphi_{z_1}(f(\varphi_{-z_1}(0))) = \varphi_{z_1}(f(z_1)) = \varphi_{z_1}(z_1) = 0\,.$$

Αν $z_3 := \varphi_{z_1}(z_2) = \frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2}$, τότε $0 < |z_3| < 1$ και $\varphi_{-z_1}(z_3) = \varphi_{-z_1}(\varphi_{z_1}(z_2)) = z_2$. Επομένως,

$$g(z_3) = \varphi_{z_1}(f(z_2)) = \varphi_{z_1}(z_2) = z_3\,.$$

Τότε από το προηγούμενο παράδειγμα είναι $g(z) = z$, για κάθε $z \in D(0,1)$ και κατά συνέπεια

$$f(\varphi_{-z_1}(z)) = \varphi_{z_1}^{-1}(z) = \varphi_{-z_1}(z)\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(0,1)\,.$$

Άρα $f(\varphi_{-z_1}(\varphi_{z_1}(z))) = \varphi_{-z_1}(\varphi_{z_1}(z)) \Leftrightarrow f(z) = z$, για κάθε $z \in D(0,1)$. ■

Ασκήσεις

1. Έστω $f(z) = e^{-z^2}$, όπου $1 \leq |z| \leq 2$. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η $|f|$ παίρνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της καθώς επίσης και το $\min|f(z)|$, $\max|f(z)|$.

2. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z^2 + 3z - 1|$ στο δίσκο: $|z| \leq 1$.

3. Έστω T το κλειστό και φραγμένο χωρίο με σύνορο το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία 0, -1 και $1+i$. Αν $f(z) = e^{z^2}$, δείξτε ότι
$$\max_{z\in T} |f(z)| = f(-1) = e \quad \text{και} \quad \min_{z\in T} |f(z)| = \left| f\left(\frac{1+2i}{3}\right) \right| = e^{-1/3} .$$

4. Να βρεθούν τα σημεία του τετραγώνου $S = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ στα οποία το $|\sin z|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του καθώς επίσης και το $\max_{z\in S} |\sin z|$.

   Σημείωση. Είναι
$$|\sin z| = |\sin(x+iy)| = \left(\sin^2 x + \sinh^2 y\right)^{1/2} .$$

5. Έστω R το ορθογώνιο με κορυφές τα σημεία 0, π, i και $\pi + i$. Θεωρούμε τη συνάρτηση
$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{αν } z \neq 0 \\ 1 & \text{αν } z = 0 . \end{cases}$$
   Να βρεθούν τα σημεία του R στα οποία η $|f|$ παίρνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της καθώς επίσης και το $\min_{z\in R} |f(z)|$, $\max_{z\in R} |f(z)|$.

6. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο τετράγωνο
$$S = \{x + iy : \, 0 < |x| < 1 \, , 0 < |y| < 1\}$$
   και συνεχής στο $\overline{S}$. Αν η $|f|$ φράσσεται από τα $M_1, \ldots, M_4$ πάνω στις πλευρές $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ του S αντίστοιχα, δείξτε ότι
$$|f(0)| \leq (M_1 M_2 M_3 M_4)^{1/4} .$$
   Υπόδειξη. Θεωρείστε τη συνάρτηση $g(z) := f(z)f(iz)f(-z)f(-iz)$.

7. Έστω η πραγματική συνάρτηση $g(x, y) = (1 + 3x^2y - y^3)^2 + (3xy^2 - x^3)^2$. Εφαρμόζοντας την αρχή μεγίστου/ελαχίστου για κατάλληλη ακέραια συνάρτηση στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, δείξτε ότι
$$\max_{x^2+y^2\leq 1} g(x, y) = g\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = g(0, -1) = 4$$

και

$$\min_{x^2+y^2\leq 1} g(x,y) = g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = g\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = g(0,1) = 0\,.$$

Υπόδειξη. Δείξτε ότι η $f(z) = f(x+iy) = (1+3x^2y-y^3)+i(3xy^2-x^3)$ είναι ακέραια συνάρτηση με $|f(x+iy)|^2 = g(x,y)$.

8. Έστω f ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε

$$|f(0)| \geq \max_{|z|=1} |f(z)|\,.$$

Τι συμπεραίνετε για την f; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

9. Αν $a, b \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι

$$\max_{|z|\leq 1} |az^n + b| = |a| + |b|\,.$$

10. Υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$, τέτοια ώστε $|f(z)| = e^{|z|}$ για κάθε $z \in D(0,1)$;

11. Υποθέτουμε ότι η f είναι αναλυτική στο δακτύλιο $\Delta : 1 < |z| < 2$ και συνεχής στο σύνορο του Δ. Αν $|f(z)| \leq 1$ για κάθε $|z| = 1$ και $|f(z)| \leq 4$ για κάθε $|z| = 2$, δείξτε ότι $|f(z)| \leq |z|^2$ για κάθε $z \in \Delta$.

12. Έστω $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στον τόπο G με $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in G$. Έστω $z_0 \in G$ και υποθέτουμε ότι $f(z_0) \neq 0$. Αν $D(z_0, \delta) \subseteq G$ είναι μια περιοχή του z_0, δείξτε ότι υπάρχουν $z_1, z_2 \in D(z_0, \delta)$ τέτοια ώστε

$$|f(z_1)| > |f(z_0)| \quad \text{και} \quad |f(z_2)| < |f(z_0)|\,.$$

13. Έστω f αναλυτική συνάρτηση σε ένα τόπο G που περιέχει τον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$. Αν $f(\pm\sqrt{2}) = f(\pm\sqrt{2}i) = 0$, δείξτε ότι

$$|f(0)| \leq \frac{1}{3} \max_{|z|=3} |f(z)|\,. \tag{$*$}$$

Να βρεθούν όλες οι αναλυτικές συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει η ισότητα στην $(*)$.

14. (*Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας*) Εφαρμόζοντας την αρχή ελαχίστου, δείξτε ότι κάθε μιγαδικό πολυώνυμο

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,, \quad a_n \neq 0\,,$$

βαθμού $n \geq 1$ έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την πολυωνυμική ανισότητα στο Παράδειγμα 1.6, δείξτε ότι υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$|P(z)| > |P(0)| = |a_0|\,, \quad \text{για κάθε } |z| = r\,.$$

15. Δείξτε ότι για κάθε μιγαδικό πολυώνυμο της μορφής

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,,$$

είναι $\max_{|z|=1} |P(z)| \geq 1$

Υπόδειξη. Θεωρείστε το πολυώνυμο $Q(z) := z^n P(1/z)$ και δείξτε ότι

$$\max_{|z|=1} |P(z)| = \max_{|z|=1} |Q(z)| \geq 1\,.$$

16. Έστω

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n\,, \quad a_n \neq 0\,,$$

πολυώνυμο βαθμού n. Αν $|p(z)| \leq M$, για κάθε $|z| \leq 1$, δείξτε ότι

$$|p(z)| \leq M|z|^n\,, \quad \text{για κάθε } |z| \geq 1\,.$$

Υπόδειξη. Εφαρμογή της αρχής μεγίστου για το

$$q(\zeta) := \zeta^n \cdot p\left(\frac{1}{\zeta}\right)\,, \quad |\zeta| \leq 1\,.$$

17. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ και συνεχής στο σύνορο $|z| = 1$. Αν $f(0) = 0$ και $|f(z)| \leq |e^z|$ για $|z| = 1$, δείξτε ότι $|f(\ln 2)| \leq \ln 4$.

Υπόδειξη. Λήμμα του Schwarz για τη συνάρτηση $g(z) := f(z)e^{-z}$.

18. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ με $f(0) = 0$ και $|f(z)| \leq 1$ για κάθε $|z| < 1$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f(z^n)$ συγκλίνει ομοιόμορφα

στους κλειστούς δίσκους $|z| \leq r < 1$.

Υπόδειξη. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(z^n)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}\,.$$

19. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$, $|f(z)| \leq 1$ και $f(\alpha) = 0$, όπου $|\alpha| < 1$. Δείξτε ότι

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1}{1-|\alpha|^2}\,.$$

Υπόδειξη. Λήμμα του Schwarz για τη συνάρτηση $g(z) := f(\varphi_{-\alpha}(z))$, όπου $\varphi_{-\alpha}(z) = \frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}$.

20. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο άνω ημιεπίπεδο $A = \{w \in \mathbb{C} : \Im w > 0\}$ με $|f(w)| \leq 1$, για κάθε $w \in A$. Αν $f(c) = 0$, όπου $c \in A$, δείξτε ότι

$$|f'(c)| \leq \frac{1}{2\Im c}\,.$$

Υπόδειξη. Λήμμα του Schwarz για τη συνάρτηση $g(z) := f\left(\frac{\overline{c}z-c}{z-1}\right)$, όπου ο μετασχηματισμός $w = \frac{\overline{c}z-c}{z-1}$ απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ στο άνω ημιεπίπεδο A και το 0 στο c.

21. Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ και $|f(z)| < 1$ για κάθε $|z| < 1$, δείξτε ότι

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{z}\right| \leq \left|1-\overline{f(0)}f(z)\right|.$$

Υπόδειξη. Λήμμα του Schwarz για τη συνάρτηση $g(z) := \frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}$.

22. Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ και $|f(z)| < M$ για κάθε $|z| < 1$. Δείξτε ότι $M|a_1| \leq M^2 - |a_0|^2$.

Υπόδειξη. Λήμμα του Schwarz για τη συνάρτηση $F(z) := M\frac{f(z)-a_0}{M^2-\overline{a_0}f(z)}$. Δείξτε ότι $|F(z)| < 1$ για κάθε $|z| < 1$.

23. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : D(0,1) \to D(0,1)$ είναι αναλυτική και και ότι για κάποιο $z_0 \in D(0,1)$ είναι

$$f(z_0) = z_0 \quad \text{και} \quad f'(z_0) = 1\,.$$

Δείξτε ότι $f(z) = z$, για κάθε $|z| < 1$.

Υπόδειξη. Λήμμα του Schwarz για τη συνάρτηση $g := \varphi_{z_0} \circ f \circ \varphi_{-z_0}$.

Κεφάλαιο 5

Σειρές Laurent- Ανώμαλα σημεία- Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

5.1 Σειρές Laurent

Το ανάπτυγμα μιας μιγαδικής συνάρτησης σε σειρά Taylor δεν είναι αρκετό σε πολλές εφαρμογές. Μια χρήσιμη γενίκευση δόθηκε από τον Laurent ο οποίος θεώρησε "δυναμοσειρές" οι οποίες έχουν αρνητικές και θετικές δυνάμεις. Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση $f(z) = e^{-1/z^2}$, $z \neq 0$. Επειδή

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}, \quad \text{για κάθε } w \in \mathbb{C},$$

αντικαθιστώντας το w με το $-1/z^2$ παίρνουμε

$$e^{-1/z^2} = 1 - z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-4} - \frac{1}{6}z^{-6} + \cdots .$$

Αυτή η σειρά έχει " αρνητικές δυνάμεις" και συγκλίνει για όλα τα z για τα οποία η $f(z) = e^{-1/z^2}$ ορίζεται, δηλαδή $\forall z \neq 0$.

Γενικά, αν η μιγαδική συνάρτηση f δεν είναι αναλυτική στο $z_0 \in \mathbb{C}$, συνήθως είναι δυνατόν να βρούμε ένα ανάπτυγμα της f το οποίο θα έχει θετικές και αρνητικές δυνάμεις του $(z - z_0)$. Το ανάπτυγμα αυτό λέγεται **ανάπτυγμα(ή σειρά) Laurent** και δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά από τον Laurent το 1843 [1]. Αυτό το ανάπτυγμα είναι ιδιαίτερα σημαντικό στη μελέτη

[1]Pierre Alphonse Laurent[1813–1854] γάλλος μαθηματικός γνωστός για τις σειρές Laurent.

των ανώμαλων σημείων των συναρτήσεων και οδηγεί σε ένα άλλο θεμελιώδες αποτέλεσμα της μιγαδικής ανάλυσης που είναι το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων. Αρχίζουμε με το θεώρημα Laurent.

Θεώρημα 5.1 (Laurent). *Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο δακτύλιο*

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \, R_1 < |z - z_0| < R_2\} \,, \quad \text{όπου } 0 \le R_1 < R_2 \le +\infty \,.$$

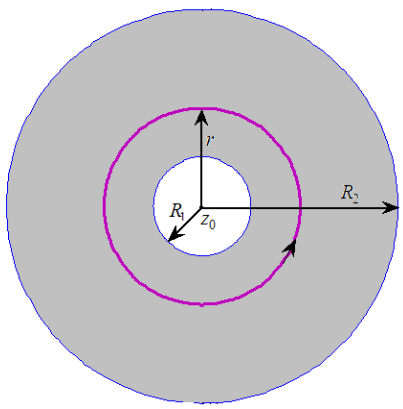
Τότε η f έχει μοναδικό ανάπτυγμα σε σειρά της μορφής

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

με

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \,, \quad n \in \mathbb{Z} \,, \tag{5.1}$$

όπου $|z - z_0| = r$ είναι ένας κύκλος στο δακτύλιο Δ με κέντρο το z_0 και ακτίνα r, $R_1 < r < R_2$. Η παραπάνω σειρά, λέγεται **σειρά ή ανάπτυγμα Laurent**, *συγκλίνει απόλυτα στο Δ και ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του Δ.*



Ορισμός 5.2. *Το σημείο z_0 είναι ένα* **μεμονωμένο ανώμαλο σημείο** *μιας μιγαδικής συνάρτησης f, αν η f είναι αναλυτική στο* **διάτρητο δίσκο**

$$D'(z_0, \delta) := \{z \in \mathbb{C} : \, 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

όχι όμως στο δίσκο $D(z_0, \delta)$. Η f μπορεί να μην ορίζεται στο σημείο z_0.

Παράδειγμα 5.3. *Έστω η συνάρτηση*

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}\,.$$

Να βρεθεί η σειρά(το ανάπτυγμα) Laurent της f σε όλους τους δυνατούς δακτυλίους με κέντρο το $z_0 = i$.

Λύση. Τα $\pm i$ είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f και επομένως έχουμε δύο δακτυλίους με κέντρο το i, το $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 2\}$ και το $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| > 2\}$. Θα βρούμε το ανάπτυγμα της f σε σειρά Laurent με δύο διαφορετικούς τρόπους.

1ος τρόπος. Θα χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n\,, \quad |w| < 1\,.$$

1η περίπτωση: $\Delta_1 : 0 < |z-i| < 2$. Τότε,

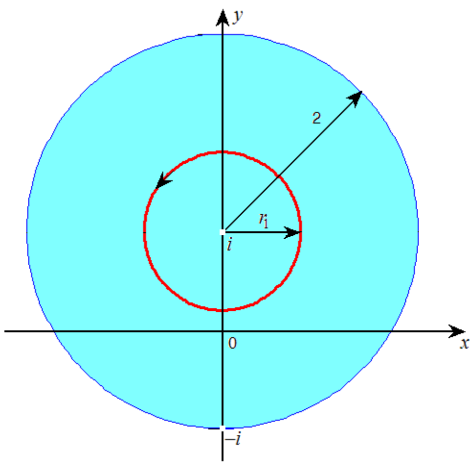
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-i)[2i + (z-i)]} \\ &= \frac{1}{2i(z-i)\left[1 + \frac{z-i}{2i}\right]} \\ &= \frac{1}{2i(z-i)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n && \left(\left|\tfrac{z-i}{2i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-i| < |2i| = 2\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2i)^{n+1}} (z-i)^{n-1} \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2i)^{n+2}} (z-i)^n\,. \end{aligned}$$

2η περίπτωση: $\Delta_2 : |z-i| > 2$. Τότε,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-i)[2i+(z-i)]} \\ &= \frac{1}{(z-i)^2\left[1+\frac{2i}{z-i}\right]} \\ &= \frac{1}{(z-i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2i}{z-i}\right)^n \qquad \left(\left|\frac{2i}{z-i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-i| > |2i| = 2\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2i)^n\frac{1}{(z-i)^{n+2}} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}(2i)^{n-2}\frac{1}{(z-i)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^{-n}(2i)^{-n-2}(z-i)^n\,. \end{aligned}$$

2ος τρόπος. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Laurent.

1η περίπτωση: $\Delta_1 : 0 < |z-i| < 2$. Θεωρούμε τον κύκλο $|z-i| = r_1$, $0 < r_1 < 2$, στο δακτύλιο Δ_1, βλέπε το παρακάτω σχήμα.



(*i*) Έστω $n \geq -1 \Leftrightarrow n+2 \geq 1$. Από το θεώρημα Laurent έχουμε $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-i)^n$ και οι συντελεστές δίνονται από τον τύπο

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-i|=r_1} \frac{f(z)}{(z-i)^{n+1}}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-i|=r_1} \frac{1}{(z+i)(z-i)^{n+2}}\,dz \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left\{\frac{(n+1)!}{2\pi i}\oint_{|z|=r_1} \frac{\frac{1}{z+i}}{(z-i)^{n+2}}\,dz\right\} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{z+i}\right)^{(n+1)}\Bigg|_{z=i} \qquad \text{(ολοκληρωτικός τύπος Cauchy)} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}(-1)^{n+1}(n+1)!\,\frac{1}{(z+i)^{n+2}}\Bigg|_{z=i} = (-1)^{n+1}\frac{1}{(2i)^{n+2}}\,.
\end{aligned}$$

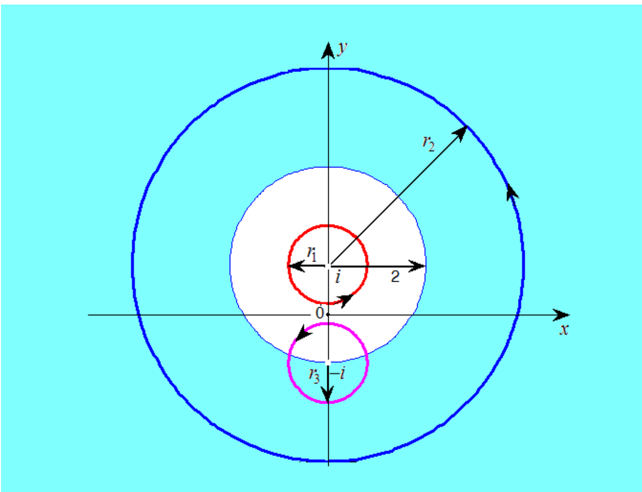
(ii) Έστω $n \le -2 \Leftrightarrow -(n+2) \ge 0$. Τότε από το θεώρημα Cauchy είναι

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-i|=r_1} \frac{f(z)}{(z-i)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-i|=r_1} \frac{(z-i)^{-(n+2)}}{(z+i)}\,dz = 0\,.$$

Επομένως,

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{(2i)^{n+2}}(z-i)^n\,, \quad 0 < |z-i| < 2\,.$$

<u>*2η περίπτωση*</u>: $\Delta_2 : |z-i| > 2$. Θεωρούμε τον κύκλο $|z-i| = r_2$, $r_2 > 2$, στον εξωτερικό δακτύλιο Δ_2 καθώς επίσης και τους κύκλους $|z-i| = r_1$, $|z+i| = r_3$ που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $|z-i| = r_2$. Βλέπε το παρακάτω σχήμα.



(i) Έστω $n \ge -1 \Leftrightarrow n+2 \ge 1$. Σ' αυτή την περίπτωση οι συντελεστές στο ανάπτυγμα Laurent δίνονται από τον τύπο

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-i|=r_2} \frac{f(z)}{(z-i)^{n+1}}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-i|=r_1} \frac{f(z)}{(z-i)^{n+1}}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z+i|=r_3} \frac{f(z)}{(z-i)^{n+1}}\,dz \quad \text{(γενικευμένο θεώρημα Cauchy)} \\
&= (-1)^{n+1}\frac{1}{(2i)^{n+2}} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z+i|=r_3} \frac{\frac{1}{(z-i)^{n+2}}}{z+i}\,dz \quad \text{(από την 1η περίπτωση)} \\
&= (-1)^{n+1}\frac{1}{(2i)^{n+2}} + \left.\frac{1}{(z-i)^{n+2}}\right|_{z=-i} \quad \text{(τύπος Cauchy)} \\
&= (-1)^{n+1}\frac{1}{(2i)^{n+2}} + \frac{1}{(-2i)^{n+2}} = 0\,.
\end{aligned}$$

(ii) Έστω $n \le -2 \Leftrightarrow -(n+2) \ge 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-i|=r_2} \frac{f(z)}{(z-i)^{n+1}}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-i|=r_2} \frac{(z-i)^{-(n+2)}}{z+i}\,dz \\
&= \left.(z-i)^{-(n+2)}\right|_{z=-i} \quad \text{(τύπος Cauchy)} \\
&= (-1)^{-n}(2i)^{-(n+2)}\,.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^{-n}(2i)^{-n-2}(z-i)^n\,, \quad |z-i| > 2\,,$$

■

Παράδειγμα 5.4. *Έστω η συνάρτηση*

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-z}\,.$$

Να βρεθεί η σειρά(το ανάπτυγμα) Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 0$ σε όλους τους δυνατούς δακτυλίους.

Λύση. Τα σημεία 0, 1 και 2 είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f και επομένως έχουμε τρεις δακτυλίους με κέντρο το 0, το $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, το $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ και τον εξωτερικό δακτύλιο $\Delta_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n\,, \quad |w| < 1\,.$$

<u>*1η περίπτωση*</u>: $\Delta_1 : 0 < |z| < 1$. Τότε,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n && (\left|\tfrac{z}{2}\right| < 1| \Leftrightarrow |z| < 2) \\ &= \frac{1}{2}z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(1-2^{-n-2})z^n\,. \end{aligned}$$

<u>*2η περίπτωση*</u>: $\Delta_2 : 1 < |z| < 2$. Είναι

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n && (\left|\tfrac{1}{z}\right| < 1| \Leftrightarrow |z| > 1 \text{ και } \left|\tfrac{z}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2) \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-2}z^n = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n - \frac{1}{2}z^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-2}z^n\,. \end{aligned}$$

<u>*3η περίπτωση*</u>: $\Delta_3 : |z| > 2$. Σ' αυτή την πρίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n \\ & \qquad (\text{επειδή } |z| > 2, \text{ είναι } \left|\tfrac{1}{z}\right| < \tfrac{1}{2} < 1. \text{ Επίσης, } \left|\tfrac{2}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 2) \\ &= -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{n-1}\frac{1}{z^{n+1}} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}(2^{n-1}-1)z^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{-3}(2^{-n-2}-1)z^n\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 5.5. *Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της*

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{(z^2+4)^2}$$

με κέντρο το $z_0 = 0$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $1-i$.

Λύση. Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f είναι: -1 και $\pm 2i$. Επομένως το ανάπτυγμα Laurent της f μπορεί να γίνει στους δακτυλίους $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \le |z| < 1\}$ (ανάπτυγμα Taylor),

$\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ και $\Delta_3 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < \infty\}$. Επειδή το $1 - i \in \Delta_2$, θα αναπτύξουμε την f στο δακτύλιο $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad \text{και} \quad \frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n\,, \quad |w| < 1\,.$$

Παραγωγίζοντας τη δεύτερη δυναμοσειρά, παίρνουμε

$$-\frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n w^{n-1}\,, \quad |w| < 1$$

και ισοδύναμα

$$\frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n w^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) w^n\,, \quad |w| < 1\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z} + \frac{1}{(z^2+4)^2} \\
&= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z^2}{4}\right)^2} \\
&= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{4^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z^2}{4}\right)^n \\
&\qquad \left(\left|\tfrac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1 \text{ και } \left|\tfrac{z^2}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2\right) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}} z^{2n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}} z^{2n}\,.
\end{aligned}$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα ισχύει στο δακτύλιο $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ που είναι ο μεγαλύτερος δυνατός δακτύλιος που περιέχει το σημείο $1 - i$. ■

Παράδειγμα 5.6. *Να βρεθούν οι τρεις πρώτοι μη μηδενικοί όροι του αναπτύγματος κατά Laurent της $f(z) = \cot z$ με κέντρο το $z_0 = 0$ στο διάτρητο δίσκο: $0 < |z| < \pi$.*

Λύση. Επειδή

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

τα $z_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, είναι απλοί πόλοι της συνάρτησης $f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$. Το 0 είναι απλός πόλος της $f(z) = \cot z$ και επομένως το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \cot z$ στο διάτρητο δίσκο $0 < |z| < \pi$ είναι

$$\cot z = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \Leftrightarrow \cos z = \sin z \left(\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots\right)\,.$$

Ως γνωστόν

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \text{ και } \sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\,,$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επομένως

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)\left(\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots\right)$$

και ισοδύναμα

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = a_{-1} + a_0 z + \left(a_1 - \frac{a_{-1}}{3!}\right) z^2 + \left(a_2 - \frac{a_0}{3!}\right) z^3 + \left(a_3 - \frac{a_1}{3!} + \frac{a_{-1}}{5!}\right) z^4 + \cdots\,.$$

Άρα, $a_{-1} = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 - a_{-1}/3! = -1/2! \Leftrightarrow a_1 = -1/3$, $a_2 = 0$, $a_3 - a_1/3! + a_{-1}/5! = 1/4! \Leftrightarrow a_3 = -1/45$. Τελικά έχουμε

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 + \cdots\,, \quad 0 < |z| < \pi\,.$$

■

Παρατήρηση 5.7. *Στην πράξη, όπως φαίνεται και στο Παράδειγμα 5.3, η εφαρμογή του ολοκληρωτικού τύπου* (5.1) *δεν είναι και ο ευκολότερος τρόπος για τον υπολογισμό των συντελεστών a_n στο ανάπτυγμα Laurent μιας συνάρτησης f. Και στα τρία προηγούμενα παραδείγματα θεωρήσαμε ρητές συναρτήσεις. Για τα αναπτύγματα Laurent των ρητών συναρτήσεων χρησιμοποιήσαμε κατάλληλα τη γεωμετρική σειρά, αυτός φαίνεται να είναι και ο ευκολότερος τρόπος. Επειδή το ανάπτυγμα Laurent μιας συνάρτησης f είναι μοναδικό όταν υπάρχει, κάθε ανάπτυγμα που ισούται με την $f(z)$ σε κάποιο δακτύλιο Δ, θα είναι το ανάπτυγμα Laurent της f. 'Ομως όπως θα δούμε και στις επόμενες παραγράφους, όταν η συνάρτηση δεν είναι ρητή πολλές φορές για τον υπολογισμό των συντελεστών a_n θα πρέπει να χρησιμοποιείται ο ολοκληρωτικός τύπος* (5.1).

Ασκήσεις

1. Να αναπτυχθεί σε σειρά Laurent η

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2}$$

σε όλους τους δυνατούς δακτυλίους με κέντρο το $z_0 = 1$.

2. Να αναπτυχθεί σε σειρά Laurent η

$$f(z) = \frac{z^3}{(2z+1)(3z-2)}$$

σε όλους τους δυνατούς δακτυλίους με κέντρο το $z_0 = 0$.

3. Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 13z^2 + 36}\,.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 0$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $2 + i$.

4. Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{20}{(z^4-4)(z^4+16)} = \frac{1}{z^4-4} - \frac{1}{z^4+16}\,.$$

Δείξτε ότι το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 0$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο Δ που περιέχει το σημείο $3i/2$ είναι

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{4n} \quad \text{με } a_n = \begin{cases} 4^{-(n+1)} & \text{αν } n \le -1 \\ (-1/16)^{n+1} & \text{αν } n \ge 0\,. \end{cases}$$

Ποιος είναι ο δακτύλιος Δ;

5. Αν

$$f(z) = \frac{z^2 - z - i}{(z-1-3i)(z^2-2z+1+2i)} = \frac{1}{z-1-3i} + \frac{1}{z^2-2z+1+2i}\,,$$

δείξτε ότι το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 1$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2} < |z-1| < 3\}$ που περιέχει το σημείο $-1/2$ είναι

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3i)^{n+1}}(z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1+i)^{2n}\frac{1}{(z-1)^{2(n+1)}}\,.$$

<u>*Σημείωση*</u>. Η f γράφεται και στη μορφή

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1-3i} + \frac{1}{(z-1-i(1+i))\,(z-1+i(1+i))} \\ &= \frac{1}{z-1-3i} + \frac{1}{(z-1+(1-i))\,(z-1-(1-i))} \\ &= \frac{1}{z-1-3i} + \frac{1}{2(1-i)}\cdot\frac{1}{z-1-(1-i)} - \frac{1}{2(1-i)}\cdot\frac{1}{z-1+(1-i)}\,. \end{aligned}$$

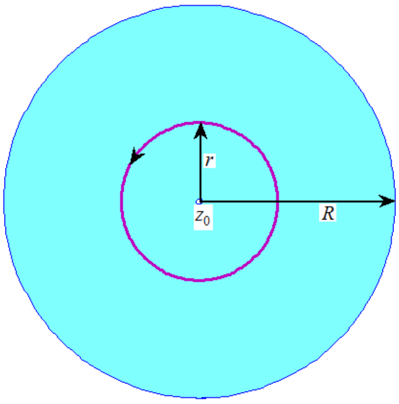
6. Έστω
$$f(z) = \frac{i}{z(z+i)(z^2+1)}\,.$$
Να βρεθούν όλοι οι δυνατοί δακτύλιοι με κέντρο το $z_0 = -i$ στους οποίους η f αναπτύσσεται σε σειρά Laurent και να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο $1 - 2i$.

7. Να βρεθούν οι τρεις πρώτοι όροι του αναπτύγματος Laurent της $f(z) = \frac{e^z}{\sin z}$ με κέντρο το $z_0 = 0$ στο διάτρητο δίσκο: $0 < |z| < \pi$.

8. Έστω
$$g(z) = \exp\left(\frac{z + 1/z}{2}\right) = e^{(z+1/z)/2}\,.$$
Αν $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ είναι το ανάπτυγμα Laurent της g στο διάτρητο δίσκο: $0 < |z| < \infty$, υπολογίστε το c_0 και δείξτε ότι
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\, dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (n!)^2}\,.$$

5.2 Ταξινόμηση των μεμονωμένων ανώμαλων σημείων

Θα εξετάσουμε τώρα την ειδική περίπτωση του θεωρήματος Laurent, Θεώρημα 5.1, όταν $R_1 = 0$ και $R_2 = R > 0$. Σ' αυτή την περίπτωση η f είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο
$$D'(z_0, R) : 0 < |z - z_0| < R$$
(το z_0 είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f) και στο $D'(z_0, R)$ έχει ένα μοναδικό ανάπτυγμα Laurent
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{5.2}$$
με
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \tag{5.3}$$
όπου $|z - z_0| = r$ είναι ένας κύκλος με κέντρο το z_0 και ακτίνα r, $0 < r < R$.



Μπορούμε να γράψουμε την (5.2) και στη μορφή

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n\,.$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέλος είναι αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο $D(z_0,R)$. Το πρώτο άθροισμα

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$$

είναι γνωστό και σαν **κύριο μέρος** του αναπτύγματος Laurent.

Η ταξινόμηση του μεμονωμένου ανώμαλου σημείου z_0 της f εξαρτάται από τη συμπεριφορά των συντελεστών a_n για $n<0$ στο ανάπτυγμα (5.2). Λέμε ότι το z_0 είναι

- ένα **επουσιώδες ή απαλείψιμο ή εξουδετερώσιμο** ανώμαλο σημείο της f αν $a_n=0$ για κάθε $n<0$,
- ένας **πόλος τάξης** $k(k\geq 1)$ της f αν $a_{-k}\neq 0$ και $a_n=0$ για κάθε $n<-k$,
- ένα **ουσιώδες** ανώμαλο σημείο της f αν $a_n\neq 0$ για άπειρο το πλήθος αρνητικές τιμές του n.

Ένας πόλος τάξης $1,2,3,\dots$ λέγεται **απλός, διπλός, τριπλός,** $\dots$ πόλος.

Ορισμός 5.8. *Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο διάτρητο δίσκο $D'(z_0,R)\,:\,0<|z-z_0|<R$ (το z_0 είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f). Το* **ολοκληρωτικό υπόλοιπο της** f **στο** z_0, *συμβολίζεται με $\mathrm{Res}(f,z_0)$ ή $\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}\,f(z)$, είναι ο συντελεστής a_{-1} στο ανάπτυγμα Laurent* (5.2) *της f*

στο διάτρητο δίσκο $D'(z_0, R)$. *Από την* (5.3) *το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της* f *στο* z_0 *δίνεται από τον τύπο*

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz\,, \tag{5.4}$$

όπου $|z - z_0| = r$ *είναι ένας κύκλος με κέντρο το* z_0 *και ακτίνα* r, $0 < r < R$.

Πρόταση 5.9. *Έστω* $U \subseteq \mathbb{C}$ *ανοικτό σύνολο,* $z_0 \in U$ *και η συνάρτηση* f *είναι αναλυτική στο* $U \setminus \{z_0\}$. *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(1) Το z_0 *είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της* f.

(2) Το όριο $\lim_{z\to z_0} f(z)$ *υπάρχει.*

(3) Υπάρχουν $M > 0$ *και* $\delta > 0$ *τέτοια ώστε* $|f(z)| < M$ *για* $0 < |z - z_0| < \delta$. *Δηλαδή η* f *είναι φραγμένη σε μια διάτρητη περιοχή του* z_0.

(4) Το όριο $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$.

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$.

$(4) \Rightarrow (1)$: Έστω

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n\,, \quad 0 < |z - z_0| < R\,,$$

το ανάπτυγμα Laurent της f, όπου

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz\,, \quad n \in \mathbb{Z}$$

και $|z - z_0| = r$ είναι ένας κύκλος με κέντρο το z_0 και ακτίνα r, $0 < r < R$, του οποίου το εσωτερικό (με εξαίρεση το z_0) βρίσκεται στο U.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \in U$ με $0 < |z - z_0| < \delta$ να ισχύει $|(z - z_0)f(z)| < \varepsilon$. Μπορούμε να πάρουμε $r > 0$ με $r < \min\{1, \delta\}$ ώστε για τα σημεία του κύκλου $|z - z_0| = r$ να ισχύει

$$|f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z - z_0|} = \frac{\varepsilon}{r}\,.$$

Τότε για $n = 1, 2, \ldots$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|a_{-n}| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}\, dz \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=r} |f(z)||z-z_0|^{n-1}\, dz \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{r} \cdot r^{n-1} \oint_{|z-z_0|=r} |dz| \\
&= \frac{1}{2\pi} \varepsilon r^{n-2} 2\pi r = \varepsilon r^{n-1} \leq \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, έπεται ότι $a_{-n} = 0$ για $n = 1, 2, \ldots$. Άρα, το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f. □

Έστω η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο $D'(z_0, R) : 0 < |z - z_0| < R$ (το z_0 είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f) και έστω

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

το ανάπτυγμα Laurent της f στο $D'(z_0, R)$. Αν το z_0 είναι *επουσιώδες ανώμαλο σημείο της* f, τότε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,, \quad 0 < |z - z_0| < R\,.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση g στο δίσκο $D(z_0, R)$ με

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{αν } z \neq z_0 \\ a_0 & \text{αν } z = z_0\,. \end{cases}$$

Τότε η g είναι αναλυτική στο z_0 με

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,, \quad \text{για κάθε } z \in D(z_0, R)\,.$$

Επομένως, αν το το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f, μπορούμε να ορίσουμε την f κατά τέτοιο τρόπο στο z_0 ώστε η f να γίνει αναλυτική στο z_0. Δηλαδή ¨αίρεται¨ η ανωμαλία της συνάρτησης f στο σημείο z_0.

Παραδείγματα 5.10. *(1) Έστω η συνάρτηση*

$$f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}\,, \quad z \neq 0\,.$$

Είναι

$$f(z) = \frac{\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) - 1}{z^2} = -\frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^4}{6!} + \cdots$$

και επομένως το $z = 0$ *είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της* f.

(2) Έστω η συνάρτηση

$$g(z) = \frac{\sin^5 z}{z^5} + \cos z\,, \quad z \neq 0\,.$$

Είναι $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ *και κατά συνέπεια*

$$\lim_{z\to 0} g(z) = 1 + \cos 0 = 2\,.$$

Επειδή το $\lim_{z\to 0} g(z)$ *υπάρχει, από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι το* $z = 0$ *είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της* g. *Ας σημειωθεί ότι δεν χρειάστηκε το ανάπτυγμα Laurent της* g *γύρω από το σημείο* $z = 0$ *για να συμπεράνουμε ότι το το* 0 *είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της* g.

Πρόταση 5.11. *Έστω* $U \subseteq \mathbb{C}$ *ανοικτό σύνολο,* $z_0 \in U$ *και η συνάρτηση* f *είναι αναλυτική στο* $U \setminus \{z_0\}$. *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(1) Το z_0 *είναι πόλος τάξης* $\leq k$.

(2) Υπάρχουν $M > 0$ *και* $\delta > 0$ *τέτοια ώστε*

$$|f(z)| < \frac{M}{|z - z_0|^k} \quad \text{για } 0 < |z - z_0| < \delta\,.$$

(3) Το όριο $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$.

(4) Το όριο $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^k f(z)$ *υπάρχει.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 5.9 για τη συνάρτηση $g(z) := (z - z_0)^k f(z)$. □

Πρόταση 5.12. *Έστω* f *αναλυτική συνάρτηση στο διάτρητο δίσκο* $D'(z_0, R) : 0 < |z - z_0| < R$.

(α΄) Το z_0 είναι πόλος τάξης k της f αν και μόνο αν

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)=\lambda\neq 0\,.$$

(β΄) Το z_0 είναι πόλος τάξης k της f αν και μόνο αν

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^k}\,,$$

όπου g αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο $D(z_0,R)$ με $g(z_0)\neq 0$.

Απόδειξη. (α΄) Αν το z_0 είναι πόλος τάξης k της f, τότε

$$f(z)=\sum_{n=-k}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n\,,\quad 0<|z-z_0|<R\,,$$

όπου $a_{-k}\neq 0$. Επομένως

$$(z-z_0)^k f(z)=a_{-k}+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{k-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^{n+k}\,,\quad 0<|z-z_0|<R$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)=a_{-k}\neq 0\,.$$

Αντίστροφα, έστω $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)=\lambda\neq 0$. Αν $g(z):=(z-z_0)^k f(z)$, $0<|z-z_0|<R$, τότε από την Πρόταση 5.9 το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Επομένως

$$g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n\,,\quad |z-z_0|<R \text{ και } a_0=\lambda\neq 0\,.$$

Τότε όμως είναι

$$f(z)=\frac{a_0}{(z-z_0)^k}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+k}(z-z_0)^n\,,\quad 0<|z-z_0|<R\,,$$

όπου $a_0=\lambda\neq 0$. Άρα, το z_0 είναι πόλος τάξης k της f.

(β΄) Η απόδειξη είναι παρόμοια και την αφήνουμε σαν άσκηση.

□

Παρατήρηση 5.13. *Αν το z_0 είναι απλός πόλος της f, τότε*

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \quad 0 < |z - z_0| < R \,,$$

όπου $a_{-1} \neq 0$. Επομένως

$$(z - z_0) f(z) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n+1} \,, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = a_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0) \,.$$

Πρόταση 5.14. *Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο $D'(z_0, R) : 0 < |z - z_0| < R$, τότε το z_0 είναι πόλος της f αν και μόνο αν*

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty \,.$$

Απόδειξη. Έστω το z_0 είναι πόλος τάξης k της f. Αν $g(z) := (z - z_0)^k f(z)$, $0 < |z - z_0| < R$, τότε από την Πρόταση 5.12(αʹ) είναι $\lim_{z \to z_0} g(z) = \lambda \neq 0$ και επομένως

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \left| \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \right| = |\lambda| \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{1}{|z - z_0|^k} = +\infty \,.$$

Αντίστροφα, έστω $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$. Τότε $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ και επομένως το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της συνάρτησης $1/f$. Επειδή $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$, για κάποιο $\delta > 0$, $\delta \leq R$, η f δεν μηδενίζεται στο διάτρητο δίσκο $D'(z_0, \delta) : 0 < |z - z_0| < \delta$ και άρα η $1/f$ είναι αναλυτική στο $D'(z_0, \delta)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση h στο δίσκο $D(z_0, \delta)$ με

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{αν } z \neq z_0 \\ 0 & \text{αν } z = z_0 \,. \end{cases}$$

Η h είναι αναλυτική στο δίσκο $D(z_0, \delta)$ με $h(z_0) = 0$. Αν το z_0 είναι ρίζα τάξης $k \geq 1$ της h, τότε

$$h(z) = (z - z_0)^k h_1(z) \,,$$

όπου h_1 αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο $D(z_0, \delta)$ με $h_1(z_0) \neq 0$. Τότε όμως

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{h_1(z)} = \frac{1}{h_1(z_0)} \neq 0$$

και από την Πρόταση 5.12(αʹ) το z_0 είναι πόλος τάξης k της f. □

Πόρισμα 5.15. *Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο $D'(z_0, R) : 0 < |z-z_0| < R$, τότε το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f αν και μόνο αν το όριο $\lim_{z\to z_0} f(z)$ δεν υπάρχει και δεν ισούται με $+\infty$(δηλαδή $\lim_{z\to z_0} |f(z)| \neq +\infty$).*

Απόδειξη. Το z_0 είναι είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f αν δεν είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο ούτε πόλος της f. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των προτάσεων 5.9 και 5.14. □

Πρόταση 5.16. *Έστω f, g αναλυτικές συναρτήσεις στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι το $z_0 \in U$ είναι ρίζα τάξης m της f και ρίζα τάξης n της g.*

(1) Αν $m \geq n$, τότε το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της συνάρτησης f/g.

(2) Αν $m < n$, τότε το z_0 είναι πόλος τάξης $n - m$ της συνάρτησης f/g.

Απόδειξη. Από την υπόθεση είναι

$$f(z) = (z - z_0)^m f_1(z) \quad \text{και} \quad g(z) = (z - z_0)^n g_1(z)\,,$$

όπου οι συναρτήσεις f_1, g_1 είναι αναλυτικές στο U με $f_1(z_0) \neq 0$ και $g_1(z_0) \neq 0$. Τότε οι συναρτήσεις f_1 και g_1 δεν μηδενίζονται σε μια περιοχή $D(z_0, \delta) \subseteq U$ του z_0. Η συνάρτηση $h(z) := f_1(z)/g_1(z)$ είναι αναλυτική και δεν μηδενίζεται στο δίσκο $D(z_0, \delta)$. Επομένως, για κάθε z στο διάτρητο δίσκο $D'(z_0, \delta) : 0 < |z - z_0| < \delta$ έχουμε

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z - z_0)^m f_1(z)}{(z - z_0)^n g_1(z_0)} = (z - z_0)^{m-n} h(z)\,.$$

(1) Αν $m \geq n$, τότε το όριο $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ υπάρχει και επομένως από την Πρόταση 5.9 το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της συνάρτησης f/g.

(2) Αν $m < n$, τότε

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{h(z)}{(z - z_0)^{n-m}} \quad \text{με } h(z_0) \neq 0\,, \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

και επομένως από την Πρόταση 5.12(β') το z_0 είναι πόλος τάξης $n - m$ της συνάρτησης f/g. □

Παραδείγματα 5.17. *(1) Έστω η συνάρτηση*

$$f(z) = \frac{z(z-1)^2}{\sin^2 \pi z}\,, \quad z \notin \mathbb{Z}\,.$$

Επειδή το 0 είναι ρίζα τάξης 2 του παρανομαστή και απλή ρίζα του αριθμητή της f, το $z = 0$ είναι απλός πόλος της f.

Επειδή το 1 είναι ρίζα τάξης 2 του αριθμητή και του παρανομαστή της f, το $z = 1$ είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f.

Επειδή όλοι οι ακέραιοι αριθμοί z, $z \neq 0, 1$, είναι ρίζες τάξης 2 του παρανομαστή και δεν είναι ρίζες του αριθμητή της f, αυτοί οι ακέραιοι αριθμοί είναι πόλοι τάξης 2 της f.

(2) Έστω η συνάρτηση

$$g(z) = \frac{1-\cos(z+1)}{(z+1)^2}\,, \quad z \neq -1\,.$$

Επειδή το -1 είναι ρίζα τάξης 2 του αριθμητή και του παρανομαστή της g, το $z = -1$ είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g. Για $z \neq -1$ είναι

$$g(z) = \frac{1-\left(1-\frac{(z+1)^2}{2!}+\frac{(z+1)^4}{4!}-\frac{(z+1)^6}{6!}+\cdots\right)}{(z+1)^2} = \frac{1}{2!} - \frac{(z+1)^2}{4!} + \frac{(z+1)^4}{6!} - \cdots$$

Αν ορίσουμε τη g ως εξής:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1-\cos(z+1)}{(z+1)^2} & \text{αν } z \neq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{αν } z = -1\,, \end{cases}$$

η συνάρτηση g γίνεται ακέραια(αναλυτική στο $\mathbb{C}$).

Σημείωση. Για τον υπολογισμό του ορίου $\lim_{z\to-1} g(z)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον κανόνα L'Hôpital. Πράγματι,

$$\lim_{z\to-1}\frac{1-\cos(z+1)}{(z+1)^2} = \lim_{z\to-1}\frac{\sin(z+1)}{2(z+1)} = \lim_{z\to-1}\frac{\cos(z+1)}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

(3) Έστω η συνάρτηση

$$h(z) = \cos(e^{1/z})\,, \quad z \neq 0\,.$$

Θεωρούμε την ακολουθία

$$z_n = \frac{1}{\ln(n\pi)}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Επειδή $e^{1/z_n} = n\pi$ *και* $\cos(e^{1/z_n}) = \cos(n\pi) = (-1)^n$, *έχουμε ότι* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ *ενώ το όριο* $\lim_{n\to\infty} h(z_n) = \lim_{n\to\infty}(-1)^n$ *δεν υπάρχει. Επομένως το όριο* $\lim_{z\to 0} h(z)$ *δεν υπάρχει και δεν ισούται με* $+\infty$*(δηλαδή* $\lim_{z\to 0} |h(z)| \neq +\infty$*). Άρα, το* $z = 0$ *είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της* h*.*

Παράδειγμα 5.18. *Αν* $z_0 \in \mathbb{C}$ *και* $R > 0$*, υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις* f, g *είναι αναλυτικές στο διάτρητο δίσκο* $D'(z_0, R) : 0 < |z - z_0| < R$*. Αν το* z_0 *είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της* f *και πόλος της* g*, τότε το* z_0 *είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο των συναρτήσεων* fg*,* f/g *και* $f + g$*.*

Λύση. Θα δείξουμε ότι το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της fg. Έστω το z_0 είναι πόλος τάξης $k \in \mathbb{N}$ της g. Τότε,

$$g(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^k}\,, \text{ όπου } h \text{ αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο } |z - z_0| < R \text{ με } h(z_0) \neq 0\,.$$

Επομένως για κάποιο $\delta \leq R$ είναι $h(z) \neq 0$ στο δίσκο $|z - z_0| < \delta$.

(i) Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της fg. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την fg στο z_0 έτσι ώστε η fg να είναι αναλυτική στο δίσκο $|z - z_0| < R$. Επειδή

$$f(z) = \frac{f(z)g(z)}{g(z)} = \frac{f(z)g(z)}{h(z)}(z - z_0)^k\,, \quad 0 < |z - z_0| < \delta\,,$$

είναι $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$ και επομένως το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f(άτοπο).

(ii) Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι πόλος τάξης $m \in \mathbb{N}$ της fg. Τότε

$$f(z)g(z) = \frac{H(z)}{(z - z_0)^m}\,, \text{ όπου } H \text{ αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο } |z - z_0| < R \text{ με } H(z_0) \neq 0\,.$$

Επομένως

$$f(z) = \frac{f(z)g(z)}{g(z)} = \frac{H(z)/h(z)}{(z - z_0)^{m-k}}\,, \quad 0 < |z - z_0| < \delta\,,$$

όπου $w = H(z)/h(z)$ αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο $|z - z_0| < \delta$ με $H(z_0)/h(z_0) \neq 0$.

$-$ Αν $m > k$, το z_0 είναι πόλος τάξης $m - k$ της f(άτοπο).

$-$ Αν $m \leq k$, τότε το όριο $\lim_{z\to z_0} f(z)$ υπάρχει και επομένως το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f(άτοπο).

Άρα το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της fg.

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο των συναρτήσεων f/g και $f+g$ (άσκηση 1). ■

Παράδειγμα 5.19. *Αν f είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 0 είναι απλός πόλος της f και $f(\mathbb{T})\subset\mathbb{R}$, όπου $\mathbb{T}$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος, τότε*

$$f(z) = az + \frac{\overline{a}}{z} + b\,,$$

για κάποιο $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ και κάποιο $b\in\mathbb{R}$.

Λύση. Επειδή το 0 είναι απλός πόλος της f, το ανάπτυγμα Laurent της f στο διάτρητο δίσκο: $0<|z|<+\infty$ είναι

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n\,, \quad a_{-1}\neq 0\,,$$

όπου οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\,, \quad n\geq -1\,. \tag{5.5}$$

Η παραμετρική εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$ με θετική φορά διαγραφής είναι $z(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$. Επειδή από την υπόθεση $f(e^{i\theta})\in\mathbb{R}$, για κάθε $\theta\in[0,2\pi]$, από τον τύπο (5.5) για $n=0$ έχουμε ότι

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}}\,ie^{i\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta\in\mathbb{R}\,.$$

Επίσης για κάθε $n\in\mathbb{N}$ από τον τύπο (5.5) έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{e^{i(n+1)\theta}}\,ie^{i\theta}\,d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{e^{in\theta}}\,d\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\left(\frac{f(e^{i\theta})}{e^{-in\theta}}\right)}\,d\theta && (\text{επειδή } f(e^{i\theta})\in\mathbb{R})\\
&= \frac{1}{2\pi}\overline{\left(\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{e^{-in\theta}}\,d\theta\right)} = \overline{a_{-n}}\,.
\end{aligned}$$

– Για $n=1$ έχουμε $a_1=\overline{a_{-1}}\Leftrightarrow\overline{a_1}=a_{-1}$. Επειδή $a_{-1}\neq 0$, το $a_1\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

– Έστω $n\geq 2$. Τότε $a_n=\overline{a_{-n}}$ και επειδή $a_{-n}=0$ για $-n\leq -2$, έπεται ότι

$$a_n = 0\,, \quad n=\pm2,\pm3,\pm4,\ldots\,.$$

Άρα,

$$f(z) = a_1z + \frac{\overline{a_1}}{z} + a_0\,,$$

όπου $a_0\in\mathbb{R}$ και $a_1\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. ∎

Ασκήσεις

1. Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ και $R > 0$, υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι αναλυτικές στο διάτρητο δίσκο $D'(z_0, R) : 0 < |z - z_0| < R$. Αν το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f και πόλος της g, δείξτε ότι το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο των συναρτήσεων f/g και $f+g$.

2. Αν το $z = 0$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της συνάρτησης f, δείξτε ότι το 0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f^2.

3. Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $z_0 \in U$ ρίζα τάξης $n \geq 1$ της f. Τότε ως γνωστόν υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f_1 στο U και περιοχή $D(z_0, \delta) \subset U$ του z_0, ώστε

$$f(z) = (z - z_0)^n f_1(z)\,, \quad \text{με } f_1(z) \neq 0 \text{ για κάθε } z \in D(z_0, \delta)\,.$$

Αν $f\left(D(z_0, \delta)\right) \subseteq D(0, R)$, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση g είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο $D'(0, R) : 0 < |w| < R$ και ότι το 0 είναι πόλος τάξης $m \geq 1$ της g. Δείξτε ότι το z_0 είναι πόλος τάξης mn της συνάρτησης $h := g \circ f$.

4. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο και έστω $z_0 \in \Omega$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \Omega \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική. Αν το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f', δείξτε ότι το z_0 θα είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f.

5. Έστω f ακέραια συνάρτηση με $f(n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι όλα τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης $g(z) := f(z)/\sin(\pi z)$ είναι επουσιώδη.

6. Έστω η συνάρτηση $g(z) = z\cos(1/z)$, $z \neq 0$. Υπολογίστε τα όρια $\lim_{n\to\infty} g(z_n)$ και $\lim_{n\to\infty} g(\zeta_n)$, όπου $z_n = i/n$ και $\zeta_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Υπάρχει το όριο $\lim_{z\to 0} g(z)$; Τι είδους μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της g είναι το 0; Υπολογίστε το $\operatorname{Res}(g,\, 0)$.

7. Έστω f ακέραια συνάρτηση με $f(z+1) = -f(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και $f(0) = 0$. Αν

$$|f(z)| \leq e^{\pi|\Im z|}\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,,$$

δείξτε ότι $f(z) = c\sin(\pi z)$ για κάποια σταθερά c.

Υπόδειξη. Θεώρημα Liouville και η προηγούμενη άσκηση.

8. Έστω

$$\sin\left(a(z + z^{-1})\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n\,, \quad a \in \mathbb{C}\,,$$

το ανάπτυγμα Laurent της αναλυτικής συνάρτησης $f(z) = \sin\left(a(z + z^{-1})\right)$ στο διάτρητο δίσκο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Δείξτε ότι

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{\sin\left(a(z + z^{-1})\right)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2a\cos\theta)\cos n\theta\,d\theta\,, \quad n \in \mathbb{Z}$$

και

$$\operatorname{Res}\left(\sin\left(\frac{i}{2}(z + z^{-1})\right)\,,\,0\right) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta\,.$$

9. Έστω $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ το ανάπτυγμα Laurent μιας αναλυτικής συνάρτησης f στο διάτρητο δίσκο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ με κέντρο το $z_0 \in \mathbb{C}$. Αν

$$M(r) := \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}\,, \quad 0 < r < R\,,$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent δείξτε ότι

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Αν $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^m f(z) = 0$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}^*$, τότε το z_0 είναι πόλος τάξης $\leq m - 1$ της f(αν $m = 1$, τότε το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f).

10. Έστω $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της αναλυτικής συνάρτησης f στο διάτρητο δίσκο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Υποθέτουμε ότι

$$|f(z)| \leq \ln\frac{2}{|z|}\,, \quad z \in \Delta\,.$$

Δείξτε ότι

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n}\ln\frac{2}{r}\,, \quad 0 < r < 1\,.$$

Δείξτε ότι το $z_0 = 0$ είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f και κατά συνέπεια η f επεκτείνεται σε μια αναλυτική συνάρτηση στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$. Είναι $\lim_{z\to 0}|f(z)| = |a_0| \leq \ln 2$.

5.3 Λογισμός των ολοκληρωτικών υπολοίπων

Θα δώσουμε πρώτα ένα γενικό τύπο για την εύρεση του ολοκληρωτικού υπολοίπου $\operatorname{Res}(f, z_0)$ μιας συνάρτησης f που έχει πόλο τάξης k στο σημείο z_0. Από την Πρόταση 5.12 είναι γνωστό ότι αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο $D'(z_0,R) : 0 < |z-z_0| < R$ και το όριο $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)$ υπάρχει και είναι διάφορο του μηδενός, τότε το z_0 είναι πόλος τάξης k της f.

Πρόταση 5.20. *Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο διάτρητο δίσκο $D'(z_0,R) : 0 < |z-z_0| < R$. Αν $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) = \lambda \neq 0$, τότε το z_0 είναι πόλος τάξης k της f με*

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)]\right\}.$$

Ειδικά, αν το z_0 είναι απλός πόλος της f, δηλαδή $k=1$, τότε

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Απόδειξη. Αν το z_0 είναι πόλος τάξης k της f, τότε

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad 0 < |z-z_0| < R,$$

όπου $a_{-k} \neq 0$. Επομένως

$$(z-z_0)^k f(z) = a_{-k} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n+k}, \quad 0 < |z-z_0| < R.$$

Παραγωγίζοντας $(k-1)$-φορές, για $0 < |z-z_0| < R$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)] &= (k-1)!a_{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{n+1}a_n(z-z_0)^{n+1}\\ &= (k-1)!a_{-1} + (z-z_0)g(z),\end{aligned}$$

όπου η $g(z) := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{n+1}a_n(z-z_0)^n$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο z_0. Επειδή

$$\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)]\right\} = (k-1)!a_{-1},$$

έπεται ότι

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)]\right\}.$$

□

Αν το z_0 είναι απλός πόλος της f, από την προηγούμενη πρόταση το ολοκληρωτικό υπόλοιπο $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$. Στην ειδική περίπτωση που η f είναι πηλίκο δύο αναλυτικών συναρτήσεων, το z_0 είναι απλή ρίζα του παρανομαστή και δεν είναι ρίζα του αριθμητή, έχουμε τον παρακάτω χρήσιμο τύπο για τον υπολογισμό του ολοκληρωτικού υπολοίπου της f στο z_0.

Πρόταση 5.21. *Έστω φ_1 και φ_2 αναλυτικές συναρτήσεις στο $z_0 \in \mathbb{C}$. Αν $\varphi_1(z_0) \neq 0$, $\varphi_2(z_0) = 0$ και $\varphi_2'(z_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $f = \varphi_1/\varphi_2$ έχει απλό πόλο στο z_0 με*

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{\varphi_1(z_0)}{\varphi_2'(z_0)}\,.$$

Απόδειξη. Επειδή το z_0 είναι απλή ρίζα της φ_2 και δεν είναι ρίζα της φ_1, από την Πρόταση 5.16 (2) το z_0 είναι απλός πόλος της $f = \varphi_1/\varphi_2$. Είναι

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f, z_0) &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{\varphi_1(z)}{\frac{\varphi_2(z)}{z-z_0}}\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{\varphi_1(z)}{\frac{\varphi_2(z)-\varphi_2(z_0)}{z-z_0}}\\ &= \frac{\varphi_1(z_0)}{\varphi_2'(z_0)}\,.\end{aligned}$$

□

Πρόταση 5.22. *Έστω φ_1 και φ_2 αναλυτικές συναρτήσεις στο $z_0 \in \mathbb{C}$. Αν το z_0 είναι ρίζα τάξης k της φ_1 και ρίζα τάξης $k+1$ της φ_2, τότε η συνάρτηση $f = \varphi_1/\varphi_2$ έχει απλό πόλο στο z_0 με*

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = (k+1)\frac{\varphi_1^{(k)}(z_0)}{\varphi_2^{(k+1)}(z_0)}\,.$$

Απόδειξη. Επειδή το z_0 είναι ρίζα τάξης k της φ_1 και ρίζα τάξης $k+1$ της φ_2, από την Πρόταση 5.16 (2) το z_0 είναι απλός πόλος της $f = \varphi_1/\varphi_2$. Επειδή $\varphi_1(z_0) = \cdots = \varphi_1^{(k-1}(z_0) = 0$,

$\varphi_1^{(k}(z_0) \neq 0$ και $\varphi_2(z_0) = \cdots = \varphi_2^{(k}(z_0) = 0$, $\varphi_2^{(k+1}(z_0) \neq 0$, αν εφαρμόσουμε $(k+1)$-φορές τον κανόνα L'Hôpital έχουμε

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)\varphi_1^{(k+1)}(z) + (k+1)\varphi_1^{(k)}(z)}{\varphi_2^{(k+1)}(z)} \\ &= (k+1) \frac{\varphi_1^{(k)}(z_0)}{\varphi_2^{(k+1)}(z_0)} \,.\end{aligned}$$

□

Οι τύποι για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα μιας συνάρτησης σε διπλούς πόλους είναι πιο περίπλοκοι. Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι χρήσιμο στις εφαρμογές.

Πρόταση 5.23. *Έστω φ_1 και φ_2 αναλυτικές συναρτήσεις στο $z_0 \in \mathbb{C}$. Αν $\varphi_1(z_0) \neq 0$, $\varphi_2(z_0) = \varphi_2'(z_0) = 0$ και $\varphi_2''(z_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $f = \varphi_1/\varphi_2$ έχει πόλο τάξης 2 στο z_0 με*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = 2\frac{\varphi_1'(z_0)}{\varphi_2''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{\varphi_1(z_0)\varphi_2'''(z_0)}{(\varphi_2''(z_0))^2} \,.$$

Απόδειξη. Επειδή το z_0 δεν είναι ρίζα της φ_1 και είναι ρίζα τάξης 2 της φ_2, από την Πρόταση 5.16 (2) το z_0 είναι πόλος τάξης 2 της $f = \varphi_1/\varphi_2$. Σε κάποια περιοχή $D(z_0, R)$ του z_0 είναι

$$\varphi_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi_1^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

και

$$\varphi_2(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 \sum_{n=2}^{+\infty} b_n (z - z_0)^{n-2} = (z - z_0)^2 g(z) \,,$$

όπου

$$g(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} b_n (z - z_0)^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\varphi_2^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-2} \,.$$

Τότε,

$$f(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} = \frac{\varphi_1(z)}{(z - z_0)^2 g(z)} \,, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

και από την Πρόταση 5.20

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,z_0) &= \lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}[(z-z_0)^2 f(z)]\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2\frac{\varphi_1(z)}{(z-z_0)^2 g(z)}\right]\\ &= \frac{\varphi_1'(z_0)g(z_0)-\varphi_1(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2} = \frac{\varphi_1'(z_0)}{g(z_0)} - \frac{\varphi_1(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}\,.\end{aligned}$$

Επειδή $g(z_0) = \varphi_2''(z_0)/2!$ και $g'(z_0) = \varphi_2'''(z_0)/3!$, τελικά έχουμε

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = 2\frac{\varphi_1'(z_0)}{\varphi_2''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{\varphi_1(z_0)\varphi_2'''(z_0)}{(\varphi_2''(z_0))^2}\,.$$

□

Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε τους πιο χρήσιμους τύπους για τον υπολογισμό των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Υπολογισμός Ολοκληρωτικών Υπολοίπων			
Συνάρτηση	Έλεγχος	Ταξινόμηση του ανώμαλου σημείου z_0	Ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0: $\mathrm{Res}(\mathbf{f}, \mathbf{z_0})$
1. f	Το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ υπάρχει ή $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$.	Το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f.	0
2. $f=\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$	Το z_0 είναι ρίζα τάξης n της φ_2 και ρίζα τάξης $m \geq n$ της φ_1.	Το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f.	0
3. f	Το $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ υπάρχει και είναι διάφορο του μηδενός.	Το z_0 είναι απλός πόλος της f.	$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$
4. $f=\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$	$\varphi_2(z_0)=0$, $\varphi_2'(z_0)\neq 0$ και $\varphi_1(z_0)\neq 0$.	Το z_0 είναι απλός πόλος της f.	$\dfrac{\varphi_1(z_0)}{\varphi_2'(z_0)}$
5. $f=\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$	Το z_0 είναι ρίζα τάξης k της φ_1 και ρίζα τάξης $k+1$ της φ_2.	Το z_0 είναι απλός πόλος της f.	$(k+1)\dfrac{\varphi_1^{(k)}(z_0)}{\varphi_2^{(k+1)}(z_0)}$
6. $f=\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$	$\varphi_1(z_0)\neq 0$ $\varphi_2(z_0)=\varphi_2'(z_0)=0$, $\varphi_2''(z_0)\neq 0$	Το z_0 είναι πόλος δεύτερης τάξης	$2\dfrac{\varphi_1'(z_0)}{\varphi_2''(z_0)}-\dfrac{2}{3}\dfrac{\varphi_1(z_0)\varphi_2'''(z_0)}{(\varphi_2''(z_0))^2}$
7. f	$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)=\lambda\neq 0$, $k\in\mathbb{N}$.	Το z_0 είναι πόλος τάξης k της f.	$\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\varphi^{(k-1)}(z)$ όπου $\varphi(z)=(z-z_0)^k f(z)$

Σημείωση: Το z_0 είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f. Οι συναρτήσεις φ_1 και φ_2 είναι αναλυτικές στο z_0.

5.4 Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων

Σ αυτή την παράγραφο θα αναφέρουμε το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων που είναι μια σημαντική γενίκευση του θεωρήματος Cauchy και του ολοκληρωτικού τύπου Cauchy. Είναι ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα της μιγαδικής ανάλυσης και έχει πάρα πολλές εφαρμογές.

Θεωρούμε ένα απλά συνεκτικό τόπο $G\subseteq\mathbb{C}$, μια κλειστή καμπύλη γ στο G και μια συνάρτηση $w=f(z)$ η οποία είναι αναλυτική πάνω στη γ και στο εσωτερικό της εκτός από τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία $z_1, z_2, \ldots, z_n$ κανένα από τα οποία δεν βρίσκεται πάνω στη γ. Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\oint_\gamma f(z)\,dz\,.$$

Θεώρημα 5.24 (Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων). *Έστω Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και έστω γ κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη στο Ω. Υποθέτουμε ότι το εσωτερικό της γ βρίσκεται ολόκληρο μέσα στο Ω και ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο Ω, εκτός από τα σημεία $z_1, z_2, \ldots, z_n$ που είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f και βρίσκονται μέσα στη γ. Δηλαδή η f είναι αναλυτική στο $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Τότε*

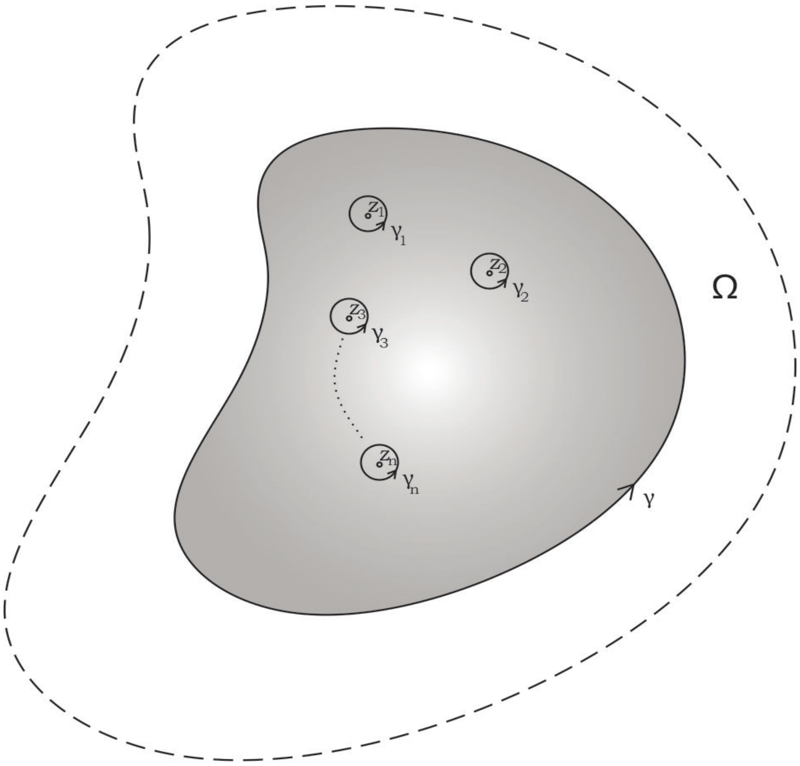
$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f, z_k)\, I(\gamma, z_k)\,, \tag{5.6}$$

όπου $\mathrm{Res}\,(f, z_k)$ είναι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_k και $I(\gamma, z_k)$ είναι ο δείκτης στροφής της γ ως προς το z_k.

Ειδικά, αν η καμπύλη γ στο Ω είναι **απλή**, *κλειστή, τμηματικά λεία και έχει* **θετική φορά**, *τότε*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f, z_k)\ . \tag{5.7}$$

Απόδειξη. (i) *Η καμπύλη γ είναι απλή, κλειστή, τμηματικά λεία και έχει θετική φορά.* Γύρω από κάθε z_k παίρνουμε πολύ μικρό κύκλο γ_k έτσι ώστε να βρίσκεται μέσα στη καμπύλη γ και να μη περιέχει κανένα άλλο z_m, $k \neq m$, $k, m = 1, 2, \ldots, n$.



Τότε, από το γενικευμένο Θεώρημα Cauchy 4.13 έχουμε

$$\oint_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)\, dz\,.$$

Όμως από τον Ορισμό 5.8 είναι $\oint_{\gamma_k} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k)$ και επομένως αποδεικνύεται η (5.7).

(ii) *Γενική περίπτωση.* Επειδή το z_k είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f, το ανάπτυγμα Laurent της f σε ένα διάτρητο δίσκο $D'(z_k, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_k| < \delta\}$ του z_k είναι

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_k)^j + \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j (z - z_k)^j\,,$$

όπου

$$g_k(z) = \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j (z - z_k)^j$$

είναι το κύριο μέρος του αναπτύγματος Laurent. Αν

$$F(z) := f(z) - \sum_{k=1}^{n} g_k(z)\,,$$

τότε το z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της F. Επειδή η F μπορεί να οριστεί στα σημεία z_k έτσι ώστε να είναι αναλυτική στο Ω, από το θεώρημα Cauchy είναι $\oint_\gamma F(z)\,dz = 0$ και επομένως

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_\gamma g_k(z)\,dz\,.$$

Επειδή η g_k συγκλίνει ομοιόμορφα εξωτερικά ενός μικρού δίσκου με κέντρο το z_k, η g_k θα συγκλίνει ομοιόμορφα στη καμπύλη γ και κατά συνέπεια

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma g_k(z)\,dz &= \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j \oint_\gamma (z-z_k)^j\,dz \\
&= a_{-1} \oint_\gamma \frac{1}{z-z_k}\,dz + \sum_{j=-\infty}^{-2} a_j \oint_\gamma (z-z_k)^j\,dz \\
&= a_{-1} \cdot 2\pi i \cdot I(\gamma, z_k) + \sum_{j=-\infty}^{-2} a_j \oint_\gamma \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-z_k)^{j+1}}{j+1}\right] dz \\
&= 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(f, z_k)\, I(\gamma, z_k)\,.
\end{aligned}$$

Ας σημειωθεί ότι επειδή η καμπύλη γ είναι κλειστή, από το θεμελιώδες θεώρημα ολοκλήρωσης, Θεώρημα 4.7, για $j \le -2$ είναι

$$\oint_\gamma \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-z_k)^{j+1}}{j+1}\right] dz = 0\,.$$

Άρα,

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f, z_k)\, I(\gamma, z_k)\,.$$

□

Παράδειγμα 5.25. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1/4} \frac{1}{\sin(1/z)}\,dz\,.$$

Λύση. Αν $\zeta = 1/z$, τότε

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=4} \frac{1}{\sin\zeta}\left(-\frac{d\zeta}{\zeta^2}\right) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=4} \frac{1}{\zeta^2 \sin\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=4} \frac{1}{\zeta^2 \sin\zeta}\,d\zeta\,.$$

Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(\zeta) := 1/\zeta^2 \sin\zeta$ που βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = 4$ είναι το 0 και τα $\pm\pi$. Τα $\pm\pi$ είναι απλοί πόλοι και το 0 είναι πόλος τάξης 3 της f. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4} \frac{1}{\zeta^2 \sin\zeta}\, d\zeta = \mathrm{Res}(f, -\pi) + \mathrm{Res}(f, 0) + \mathrm{Res}(f, \pi)\,.$$

Είναι

$$\mathrm{Res}(f, \pm\pi) = \left.\frac{1}{(\zeta^2 \sin\zeta)'}\right|_{\zeta=\pm\pi} = \frac{1}{2(\pm\pi)\sin(\pm\pi) + \pi^2\cos(\pm\pi)} = -\frac{1}{\pi^2}\,.$$

Για να υπολογίσουμε το $\mathrm{Res}(f, 0)$, θα βρούμε το ανάπτυγμα Laurent της f γύρω από το 0. Επειδή ως γνωστόν

$$\sin\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \zeta - \frac{\zeta^3}{3!} + \frac{\zeta^5}{5!} - \cdots\,, \qquad (\zeta \in \mathbb{C})$$

για κάθε $\zeta \neq 0$ είναι

$$f(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2 \sin\zeta} = \frac{1}{\zeta^2(\zeta - \zeta^3/3! + \zeta^5/5! - \cdots)} = \frac{1}{\zeta^3}\frac{1}{1 - (\zeta^2/3! - \zeta^4/5! + \cdots)}\,. \tag{5.8}$$

Αν

$$w = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{\zeta^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\zeta^2}{3!} - \frac{\zeta^4}{5!} + \frac{\zeta^6}{7!} - \cdots\,,$$

παίρνουμε το $|\zeta|$ αρκετά μικρό, $|\zeta| < \delta$, έτσι ώστε $|w| < 1$. Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n = 1 + w + w^2 + \cdots\,, \qquad (|w| < 1)$$

για $0 < |\zeta| < \delta$ από την (5.8) έχουμε

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{\zeta^3}\frac{1}{1 - (\zeta^2/3! - \zeta^4/5! + \cdots)} \\ &= \frac{1}{\zeta^3}\left[1 + \left(\frac{\zeta^2}{3!} - \frac{\zeta^4}{5!} + \cdots\right) + \left(\frac{\zeta^2}{3!} - \frac{\zeta^4}{5!} + \cdots\right)^2 + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{\zeta^3} + \frac{1}{3!\zeta} + \left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right)\zeta + \cdots\,. \end{aligned}$$

Επομένως $\mathrm{Res}(f, 0) = 1/3!$ και άρα

$$I = \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\,.$$

■

Παράδειγμα 5.26. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{1/z}}{1+z^2}\, dz\,.$$

Λύση. Τα 0, $\pm i$ είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z) = e^{1/z}/(1+z^2)$ και βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = 2$. Τα $\pm i$ είναι απλοί πόλοι της f με

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{1/z}}{1+z^2}, \pm i\right) = \left.\frac{e^{1/z}}{(1+z^2)'}\right|_{z=\pm i} = \pm\frac{e^{\pm 1/i}}{2i}\,.$$

Το 0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f. Επειδή

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\,, \quad \text{για κάθε } w \in \mathbb{C} \quad \text{και} \quad \frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n\,, \quad |w| < 1\,,$$

το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο $z_0 = 0$ στο διάτρητο δίσκο: $0 < |z| < 1$ είναι

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{1/z} \cdot \frac{1}{1+z^2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \frac{1}{5!z^5} + \cdots\right)(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots) \\ &= \cdots + \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots\right)\frac{1}{z} + \cdots\,. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{1/z}}{1+z^2}, 0\right) = a_{-1} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots = \sin 1\,.$$

Ας σημειωθεί ότι

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}\,.$$

Επομένως, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=2} \frac{e^{1/z}}{1+z^2}\, dz &= 2\pi i \left\{\operatorname{Res}\left(\frac{e^{1/z}}{1+z^2}, -i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{1/z}}{1+z^2}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{1/z}}{1+z^2}, i\right)\right\} \\ &= 2\pi i \left\{-\frac{e^{-1/i}}{2i} + \sin 1 + \frac{e^{1/i}}{2i}\right\} \\ &= 2\pi i \left\{\sin 1 - \frac{e^i - e^{-i}}{2i}\right\} = 2\pi i \{\sin 1 - \sin 1\} = 0\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 5.27. *Έστω* $\dfrac{1}{e^{2\pi iz}-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ *το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης* $f(z) = 1/(e^{2\pi iz}-1)$ *στο δακτύλιο*

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\} \quad \textit{με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, *για κάθε* $n \leq 0$.

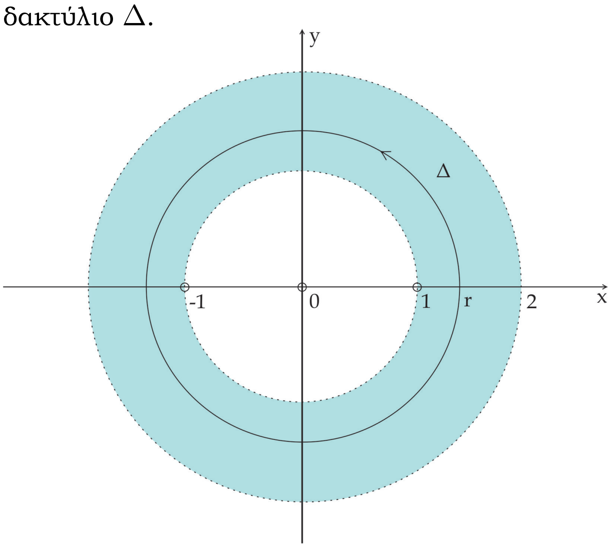
Λύση. Επειδή

$$e^{2\pi iz} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2\pi iz} = 1 \Leftrightarrow 2\pi iz = 2n\pi i \Leftrightarrow z = n\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

τα $z_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης $f(z) = 1/(e^{2\pi iz}-1)$. Από το θεώρημα Laurent οι συντελεστές a_n δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1/(e^{2\pi iz}-1)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1}{z^{n+1}(e^{2\pi iz}-1)}\,dz\,,$$

όπου ο κύκλος $|z| = r$ με κέντρο 0, ακτίνα r, $1 < r < 2$ και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο Δ.



(i) <u>$n = 0$:</u> Σ' αυτή την περίπτωση τα ανώμαλα σημεία -1, 0 και 1 της $g(z) = 1/z(e^{2\pi iz}-1)$ βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$. Τα ± 1 είναι απλοί πόλοι και το 0 είναι πόλος τάξης 2 της g. Είναι

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(e^{2\pi iz}-1)}, \pm 1\right) = \left.\frac{1}{[z(e^{2\pi iz}-1)]'}\right|_{z=\pm 1} = \frac{1}{e^{\pm 2\pi i} \pm 2\pi i e^{\pm 2\pi i} - 1} = \pm\frac{1}{2\pi i}$$

και

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(e^{2\pi iz}-1)},\,0\right) &= \lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{1}{z(e^{2\pi iz}-1)}\right)' \\
&= \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{e^{2\pi iz}-1}\right)' \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{e^{2\pi iz}-1-2\pi ize^{2\pi iz}}{(e^{2\pi iz}-1)^2} \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{4\pi^2 ze^{2\pi iz}}{4\pi ie^{2\pi iz}(e^{2\pi iz}-1)} && \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= \pi i\lim_{z\to 0}\frac{z}{1-e^{2\pi iz}} \\
&= \pi i\lim_{z\to 0}\frac{1}{-2\pi ie^{2\pi iz}} = -\frac{1}{2}\,. && \text{(κανόνας L'Hôpital)}
\end{aligned}$$

Επομένως, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{1}{z(e^{2\pi iz}-1)}\,dz \\
&= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(e^{2\pi iz}-1)},\,-1\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(e^{2\pi iz}-1)},\,0\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(e^{2\pi iz}-1)},\,1\right) = -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

(ii) <u>$n=-1$:</u> Σ' αυτή την περίπτωση τα ανώμαλα σημεία -1, 0 και 1 της $f(z)=1/(e^{2\pi iz}-1)$ βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z|=r$ και είναι απλοί πόλοι. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_{-1} &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\,dz \\
&= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^{2\pi iz}-1},\,-1\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^{2\pi iz}-1},\,0\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^{2\pi iz}-1},\,1\right) \\
&= \left.\frac{1}{(e^{2\pi iz}-1)'}\right|_{z=-1}+\left.\frac{1}{(e^{2\pi iz}-1)'}\right|_{z=0}+\left.\frac{1}{(e^{2\pi iz}-1)'}\right|_{z=1} \\
&= \frac{1}{2\pi ie^{-2\pi i}}+\frac{1}{2\pi i}+\frac{1}{2\pi ie^{2\pi i}} = \frac{3}{2\pi i} = -\frac{3}{2\pi}i\,.
\end{aligned}$$

(iii) <u>$n\le -2$:</u> Σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{1}{z^{n+1}(e^{2\pi iz}-1)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{z^{-n-1}}{e^{2\pi iz}-1}\,dz\,,$$

με $-n-1\ge 1$. Αν

$$h(z) = \frac{z^{-n-1}}{e^{2\pi iz}-1}\,,$$

τα ανώμαλα σημεία -1 και 1 της h βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = r$ και είναι απλοί πόλοι. Επειδή το 0 είναι ρίζα του αριθμητή της h τάξης ≥ 1 και απλή ρίζα του παρανομαστή της h, το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της h. Άρα, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{z^{-n-1}}{e^{2\pi i z}-1}\,dz &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n-1}}{e^{2\pi i z}-1},\,-1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-n-1}}{e^{2\pi i z}-1},\,1\right) \\
&= \left.\frac{z^{-n-1}}{(e^{2\pi i z}-1)'}\right|_{z=-1} + \left.\frac{z^{-n-1}}{(e^{2\pi i z}-1)'}\right|_{z=1} \\
&= \frac{(-1)^{-n-1}}{2\pi i e^{-2\pi i}} + \frac{1}{2\pi i e^{2\pi i}} \\
&= \frac{1}{2\pi i}((-1)^{-n-1}+1) = \begin{cases} 0 & \text{αν } -n = 2k \\ -i/\pi & \text{αν } -n = 2k+1\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

■

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι
$$\operatorname{Res}\left(e^{1/z}e^{2z},\,0\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!(n+1)!}\,.$$

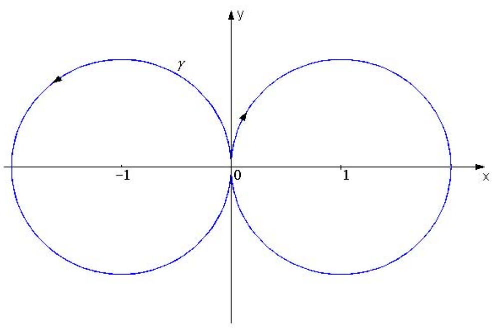
2. Υποθέτουμε ότι η ακέραια συνάρτηση f δεν έχει ρίζες στον πραγματικό άξονα. Αν $n \in \mathbb{Z}$, να αποδειχθεί ότι
$$\operatorname{Res}\left(\pi f(z)\cot \pi z,\,n\right) = f(n)\,.$$

3. (α΄) Να βρεθεί το είδος των μεμονωμένων ανώμαλων σημείων της συνάρτησης
$$f(z) = \left(\frac{3}{z^2} - \frac{\sin 3z}{z^3}\right)\exp\left(\frac{1}{z-2}\right)\,.$$
(β΄) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$$\oint_{|z|=1} f(z)\,dz\,.$$

4. Δείξτε ότι
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\left[(z+1)e^{1/(z+1)} + \frac{\cos \pi z + 1}{(z-1)^3}\right]dz = \frac{3}{2} - \pi^2\,,$$

όπου $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ η καμπύλη με εξίσωση

$$\gamma(t) = \begin{cases} -1 + e^{12i\pi t} & \text{αν } 0 \le t < 1/2, \\ 1 + e^{i\pi(1-8t)} & \text{αν } 1/2 \le t \le 1\,. \end{cases}$$



5. Αν $r > 1$, δείξτε ότι

$$\oint_{|z|=r} \frac{\Re z}{z(z-1)}\, dz = \pi i\,.$$

6. Δείξτε ότι $\tan z \neq i$, για κάθε $\mathbb{C}$. Στη συνέχεια να βρεθεί το είδος των μεμονωμένων ανώμαλων σημείων της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{\tan z - i}$$

και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{\tan z - i}\, dz\,.$$

7. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} \frac{e^{1/z}}{z-1}\, dz = \begin{cases} 1 - e & \text{αν } R < 1 \\ 1 & \text{αν } R > 1\,. \end{cases}$$

8. Αν $n \in \mathbb{N}^*$, να λυθεί η εξίσωση $3z^n + i = 0$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{z^{n-1}}{3z^n + i}\, dz\,.$$

9. Έστω $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $z_0 \in U$. Υποθέτουμε ότι $f'(z_0) = 0$ και $f''(z_0) \neq 0$.

(α') Αν $g(z) := f(z) - f(z_0)$, δείξτε ότι υπάρχει ανοικτός δίσκος $D(z_0, \delta) \subseteq U$ με κέντρο το z_0 και ακτίνα $\delta > 0$ με $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$.

(β') Αν $0 < r < \delta$, δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)}\, dz = \frac{2}{f''(z_0)}\,.$$

10. Έστω $f : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική και $1-1$ συνάρτηση στο τόπο $G \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $\overline{D}(z_0,\, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\} \subset G$. Έστω $w \in f\left(D(z_0,\, R)\right)$, όπου $D(z_0,\, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. Δείξτε ότι η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} δίνεται από τον τύπο

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}\, d\zeta\,,$$

<u>*Σημείωση*</u>. Αν η αναλυτική συνάρτηση f είναι $1-1$ στον τόπο G, τότε $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in G$.

11. Έστω $\cot \pi z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \cot \pi z$ στο δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Να υπολογιστούν οι συντελεστές a_{-1} και a_{-2}.

12. Έστω $\frac{z}{e^{2\pi z}-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{z}{e^{2\pi z}-1}$ στο δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \leq -1$.

13. Έστω $\frac{1}{\sin \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}$ στο δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \leq -1$.

14. Έστω $\frac{1}{e^z+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{e^z+1}$ στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \pi < |z| < 3\pi\} \ \text{ με κέντρο το } z_0 = 0\,.$$

Να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \leq 0$.

15. Έστω $\tan z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \tan z$ στο δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \pi/2 < |z| < 3\pi/2\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \leq -1$.

16. Έστω $\frac{\tan z}{z^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{\tan z}{z^2}$ στο δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \pi/2 < |z| < 3\pi/2\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, για κάθε $n \leq -1$.

17. Έστω $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ και $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n$ τα αναπτύγματα(οι σειρές) Laurent της $f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}$ στους δακτυλίους $\Delta_1 : 0 < |z| < 1$ και $\Delta_2 : 1 < |z| < 2$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, δείξτε ότι

$$d_n - c_n = -\frac{2}{\pi}, \quad \text{για κάθε περιττό αριθμό } n\,.$$

Κεφάλαιο 6

Υπολογισμός Πραγματικών Ολοκληρωμάτων με Μιγαδική Ολοκλήρωση

6.1 Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα

Ολοκληρώματα της μορφής: $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$

Υποθέτουμε ότι η $R = R(\cos\theta, \sin\theta)$ είναι μια ρητή συνάρτηση του $\cos\theta$ και $\sin\theta$ με πραγματικούς συντελεστές και της οποίας ο παρανομαστής δεν μηδενίζεται στο $[0, 2\pi]$. Θα μετασχηματίσουμε το ολοκλήρωμα σε ένα μιγαδικό ολοκλήρωμα πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Η παραμετρική εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ είναι $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Επειδή $1/z = e^{-i\theta}$, $\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$ και $\sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$, έχουμε

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Επίσης,

$$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz$$

και επομένως

$$d\theta = \frac{dz}{iz} = -i\frac{dz}{z}.$$

Άρα,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}\,.$$

Αν η R είναι συνάρτηση του $\cos n\theta$ και του $\sin n\theta$, $n \in \mathbb{N}$ τότε

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \quad \text{και} \quad \sin n\theta = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)\,.$$

Παράδειγμα 6.1. *Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1}{(a+\cos\theta)^2}\, d\theta\,, \quad a > 1\,.$$

Λύση. Έστω $R(\theta) = 1/(a+\cos\theta)^2$. Επειδή $R(2\pi-\theta) = R(\theta)$, είναι προφανές ότι

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+\cos\theta)^2}\, d\theta\,.$$

Η παραμετρική εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ και το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(a + \frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{z}{(z^2+2az+1)^2}\, dz = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\, dz\,, \end{aligned}$$

όπου $z_1 = -a + \sqrt{a^2-1}$ και $z_2 = -a - \sqrt{a^2-1}$. Παρατηρούμε ότι μόνο το z_1 βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου και είναι διπλός πόλος της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\,.$$

Επομένως, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων είναι

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{i} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}, z_1\right) \\ &= 4\pi \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz}\left((z-z_1)^2 \frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right) \\ &= 4\pi \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-z_2)^2}\right) \\ &= -4\pi \lim_{z\to z_1} \frac{z+z_2}{(z-z_2)^3} = \frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 6.2. *Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 8\cos^2\theta}\, d\theta\,.$$

Λύση. Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Επειδή $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$ και $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 8\cos^2\theta}\, d\theta &= \oint_{C^+(0,\,1)} \frac{1}{iz}\frac{1}{(1 + 2(z^2 + 2 + z^{-2}))}\, dz \\
&= \frac{1}{i}\oint_{C^+(0,\,1)} \frac{z}{2z^4 + 5z^2 + 2}\, dz \\
&= \frac{1}{i}\oint_{C^+(0,\,1)} \frac{z}{(2z^2 + 1)(z^2 + 2)}\, dz\,.
\end{aligned}$$

Τα σημεία $\pm i/\sqrt{2}$ και $\pm\sqrt{2}i$ είναι απλοί πόλοι της $f(z) = \frac{z}{(2z^2+1)(z^2+2)}$. Επειδή μόνο τα σημεία $\pm i/\sqrt{2}$ βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $C^+(0,\,1)$, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων είναι

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 8\cos^2\theta}\, d\theta &= \frac{1}{i}2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left(\frac{z}{2z^4 + 5z^2 + 2}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{z}{2z^4 + 5z^2 + 2}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right\} \\
&= 2\pi\left\{\left.\frac{z}{(2z^4 + 5z^2 + 2)'}\right|_{z=i/\sqrt{2}} + \left.\frac{z}{(2z^4 + 5z^2 + 2)'}\right|_{z=-i/\sqrt{2}}\right\} \\
&= 2\pi\left\{\left.\frac{z}{8z^3 + 10z}\right|_{z=i/\sqrt{2}} + \left.\frac{z}{8z^3 + 10z}\right|_{z=-i/\sqrt{2}}\right\} \\
&= \pi\left\{\frac{1}{4(i/\sqrt{2})^2 + 5} + \frac{1}{4(-i/\sqrt{2})^2 + 5}\right\} = \frac{2\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

■

6.2 Γενικευμένα Ολοκληρώματα

Ολοκληρώματα της μορφής: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx\,.$

Υποθέτουμε ότι η $w = f(z)$ είναι αναλυτική σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το κλειστό άνω ημιεπίπεδο $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z \ge 0\}$, εκτός από πεπερασμένο το πλήθος μεμονωμένα ανώμαλα σημεία κανένα από τα οποία δεν βρίσκεται στον πραγματικό άξονα. Από τη θεωρία των γενικευμένων ολοκληρωμάτων είναι γνωστό ότι αν $p > 1$ και

$$|f(x)| \le \frac{M}{|x|^p}\,, \quad \text{για κάθε } |x| \ge a > 0\,,$$

τότε το γενικευμένο ολκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει απόλυτα και επομένως θα συγκλίνει.

Θεώρημα 6.3. *(i) Έστω f αναλυτική συνάρτηση σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το κλειστό άνω ημιεπίπεδο $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\}$, εκτός από πεπερασμένο το πλήθος μεμονωμένα ανώμαλα σημεία $z_1, z_2, \ldots, z_n$ κανένα από τα οποία δεν βρίσκεται στον πραγματικό άξονα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$, $p > 1$ και $R_0 > 0$, τέτοια ώστε*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R_0 .$$

Τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k) . \tag{6.1}$$

(ii) Έστω f αναλυτική συνάρτηση σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το κλειστό κάτω ημιεπίπεδο $\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z \leq 0\}$, εκτός από πεπερασμένο το πλήθος μεμονωμένα ανώμαλα σημεία $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ κανένα από τα οποία δεν βρίσκεται στον πραγματικό άξονα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$, $p > 1$ και $R_0 > 0$, τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R_0 .$$

Τότε

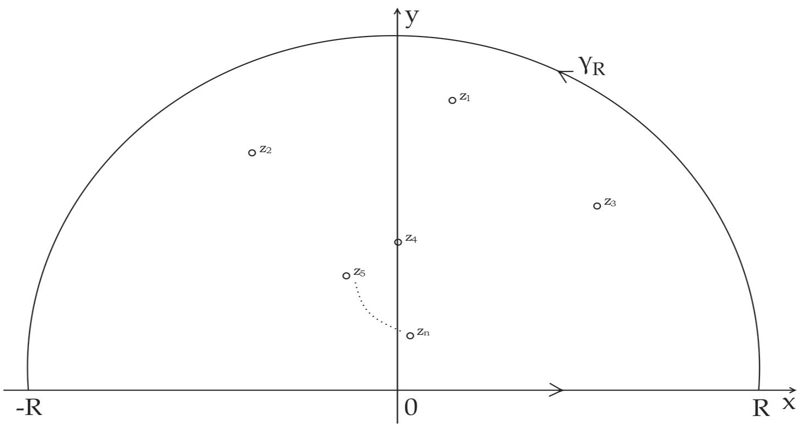
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f, \zeta_k) . \tag{6.2}$$

(iii) Οι δύο παραπάνω τύποι (6.1) και (6.2) ισχύουν στην περίπτωση που η $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, όπου P, Q είναι πολυώνυμα με

$$\text{βαθμός}\, Q(z) \geq \text{βαθμός}\, P(z) + 2$$

και το Q δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Απόδειξη. (i) Έστω γ η κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη η αποία αποτελείτα από το ημικύκλιο $\gamma_R : z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, όπου $R > \max\{|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|, R_0\}$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[-R, R]$.



Σύμφωνα με το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)\ .$$

Όμως από την υπόθεση για $|z| = R > R_0$ είναι

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| &\le \int_{\gamma_R} |f(z)|\,|dz| \\ &\le \int_{\gamma_R} \frac{M}{R^p}\,|dz| \\ &= \frac{M}{R^p}\pi R = \frac{M\pi}{R^{p-1}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

και επομένως

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0\,.$$

Παίρνοντας το $R \to +\infty$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)\ .$$

(ii) Έστω γ' η κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη η αποία αποτελείτα από το ημικύκλιο $\gamma'_R : z = Re^{i\theta}$, $-\pi \le \theta \le 0$, όπου $R > \max\{|\zeta_1|, |\zeta_2|, \ldots, |\zeta_m|, R_0\}$ και το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το R και πέρας το $-R$. Σύμφωνα με το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{R}^{-R} f(x)\,dx + \int_{\gamma'_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f, \zeta_k)\ .$$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση είναι $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma'_R} f(z)\,dz = 0$. Παίρνοντας το $R \to +\infty$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f, \zeta_k)\ .$$

(iii) Από το Λήμμα 4.6 υπάρχει $R_0 \geq 1$ και σταθερά $M > 0$, τέτοια ώστε

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{|z|^2}, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R_0 .$$

□

Παράδειγμα 6.4. *Το γενικευμένο ολοκλήρωμα*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + a^4}\, dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4a^3}, \quad a > 0 .$$

Λύση. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = 1/(x^4 + a^4)$ είναι άρτια, είναι

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + a^4}\, dx .$$

Η εξίσωση: $z^4 + a^4 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -a^4$ έχει 4 απλές ρίζες, τις $z_k = ae^{(2k\pi i + \pi i)/4}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Είναι

$$z_0 = ae^{\pi i/4}, \quad z_1 = ae^{3\pi i/4}, \quad z_2 = ae^{5\pi i/4}, \quad z_3 = ae^{7\pi i/4} .$$

Επομένως η συνάρτηση $f(z) = 1/(z^4 + a^4)$ έχει 4 απλούς πόλους. Μόνο οι απλοί πόλοι

$$z_0 = ae^{\pi i/4} = \frac{a}{\sqrt{2}}(1 + i) \quad \text{και} \quad z_1 = ae^{3\pi i/4} = \frac{a}{\sqrt{2}}(-1 + i)$$

βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο. Από το Λήμμα 4.6 υπάρχει σταθερά M και $R_0 \geq 1$, τέτοια ώστε

$$\left|\frac{1}{z^4 + a^4}\right| \leq \frac{M}{|z|^2}, \quad \text{για κάθε } |z| \geq R_0 ,$$

Επομένως, από το Θεώρημα 6.2 έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + a^4}\, dx &= 2\pi i\,(\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_1)) \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{4z_0^3} + \frac{1}{4z_1^3}\right) \\
&= \frac{2\pi i}{4a^3}\left(\frac{1}{e^{3\pi i/4}} + \frac{1}{e^{9\pi i/4}}\right) \\
&= \frac{2\pi i}{4a^3}\left(\frac{1}{e^{3\pi i/4}} + \frac{1}{e^{\pi i/4}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi i}{2a^3}\left(\frac{1}{-1 + i} + \frac{1}{1 + i}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2a^3} .
\end{aligned}$$

Άρα,

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + a^4}\, dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4a^3} .$$

■

6.3 Ολοκληρώματα Fourier

Ολοκληρώματα της μορφής: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\, dx\,, \quad \lambda > 0\,.$

Υποθέτουμε ότι η $w = f(z)$ είναι αναλυτική σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το κλειστό άνω ημιεπίπεδο $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\}$, εκτός από πεπερασμένο το πλήθος μεμονωμένα ανώμαλα σημεία κανένα από τα οποία δεν βρίσκεται στον πραγματικό άξονα. Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων Fourier οδηγεί στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx = \Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\, dx\right)$$

και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx = \Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\, dx\right)\,.$$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων Fourier χρειαζόμαστε το παρακάτω αποτέλεσμα που είναι γνωστό σαν λήμμα Jordan.

Λήμμα 6.5 (Λήμμα Jordan). *Έστω γ_R ημικύκλιο στο άνω ημιεπίπεδο με παραμετρική εξίσωση $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο γ_R με $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, τότε*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} e^{i\lambda z} f(z)\, dz = 0\,, \quad \lambda > 0\,.$$

Ειδικά, έστω $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ όπου P, Q είναι πολυώνυμα με

$$\textit{βαθμός}\, Q(z) \geq \textit{βαθμός}\, P(z) + 1\,.$$

Επειδή $\lim_{|z|\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = 0$, είναι

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}\, dz = 0\,, \quad \lambda > 0\,.$$

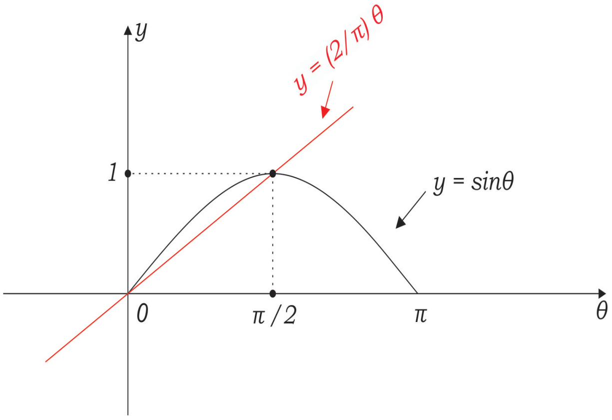
Απόδειξη. Επειδή $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $|z| > \delta$ είναι $|f(z)| < \varepsilon$. Επομένως,

$$\text{για } |z| = |Re^{i\theta}| = R > \delta \Rightarrow |f(z)| < \varepsilon\,.$$

Χρησιμοποιώντας την παραμετρική εξίσωση της γ_R και παίρνοντας το $R > \delta$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_R} e^{i\lambda z} f(z)\, dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} e^{i\lambda R(\cos\theta + i\sin\theta)} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta}\, d\theta \right| \\
&\leq \int_0^{\pi} \left| e^{i\lambda R\cos\theta} \right| \left| e^{-\lambda R\sin\theta} \right| |f(Re^{i\theta})| R\, d\theta \\
&\leq R\varepsilon \int_0^{\pi} e^{-\lambda R\sin\theta}\, d\theta \\
&= R\varepsilon \left(\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R\sin\theta}\, d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-\lambda R\sin\theta}\, d\theta \right) = 2R\varepsilon \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R\sin\theta}\, d\theta\,.
\end{aligned}$$

Επειδή η συνάρτηση $y = \sin\theta$ είναι κοίλη στο διάστημα $[0, \pi]$, το ευθύγραμμα τμήμα που ενώνει το σημείο $(0, 0)$ με το $(\pi/2, 1)$ βρίσκεται κάτω από το γράφημα της $y = \sin\theta$ και κατά συνέπεια $\sin\theta \geq (2/\pi)\theta$, για κάθε $\theta \in [0, \pi/2]$.



Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $R > \delta$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_R} e^{i\lambda z} f(z)\, dz \right| &\leq 2R\varepsilon \int_0^{\pi/2} e^{-(2\lambda R/\pi)\theta}\, d\theta \\
&= -\frac{\pi\varepsilon}{\lambda}\, e^{-(2\lambda R/\pi)\theta} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\
&= \frac{\pi\varepsilon}{\lambda}(1 - e^{-\lambda R}) < \frac{\pi\varepsilon}{\lambda}\,.
\end{aligned}$$

Άρα, $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}\, dz = 0$. □

Παρατήρηση 6.6. *Αν $\lambda < 0$, το λήμμα Jordan ισχύει και στην περίπτωση που το γ_R είναι ημικύκλιο στο κάτω ημιεπίπεδο με παραμετρική εξίσωση $z = Re^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq 0$. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο γ_R με $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, τότε παρόμοια αποδεικνύεται ότι*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} e^{i\lambda z} f(z)\, dz = 0\,, \quad \lambda < 0\,.$$

Θεώρημα 6.7. *(i) Έστω f αναλυτική συνάρτηση σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το κλειστό άνω ημιεπίπεδο $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\}$, εκτός από πεπερασμένο το πλήθος μεμονωμένα ανώμαλα σημεία $z_1, z_2, \ldots, z_n$ κανένα από τα οποία δεν βρίσκεται στον πραγματικό άξονα. Αν $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, τότε*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left(e^{i\lambda z} f(z), z_k\right), \quad \lambda > 0\,. \tag{6.3}$$

(ii) Έστω f αναλυτική συνάρτηση σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το κλειστό κάτω ημιεπίπεδο $\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z \leq 0\}$, εκτός από πεπερασμένο το πλήθος μεμονωμένα ανώμαλα σημεία $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ κανένα από τα οποία δεν βρίσκεται στον πραγματικό άξονα. Αν $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, τότε

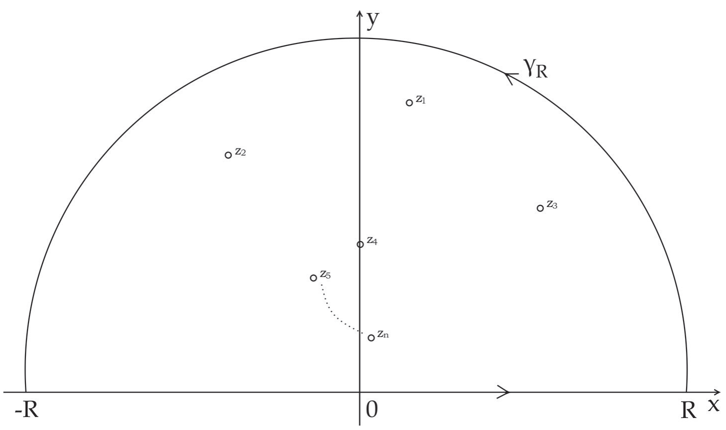
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\left(e^{i\lambda z} f(z), \zeta_k\right), \quad \lambda < 0\,. \tag{6.4}$$

(iii) Οι δύο παραπάνω τύποι (6.3) και (6.4) ισχύουν στην περίπτωση που η $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, όπου P, Q είναι πολυώνυμα με

$$\text{βαθμός}\, Q(z) \geq \text{βαθμός}\, P(z) + 1$$

και το Q δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Απόδειξη. (i) Έστω γ η κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη η αποία αποτελείτα από το ημικύκλιο $\gamma_R : z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, όπου $R > \max\{|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|\}$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[-R, R]$.



Σύμφωνα με το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{-R}^{R} e^{i\lambda x} f(x)\, dx + \int_{\gamma_R} e^{i\lambda z} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(e^{i\lambda z} f(z), z_k\right) .$$

Όμως από το λήμμα Jordan $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} e^{i\lambda z} f(z)\, dz = 0$, $\lambda > 0$. Παίρνοντας το $R \to +\infty$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(e^{i\lambda z} f(z), z_k\right) , \quad \lambda > 0 .$$

(ii) Έστω γ' η κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη η αποία αποτελείτα από το ημικύκλιο $\gamma'_R : z = Re^{i\theta}$, $-\pi \le \theta \le 0$, όπου $R > \max\{|\zeta_1|, |\zeta_2|, \ldots, |\zeta_m|\}$ και το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το R και πέρας το $-R$. Σύμφωνα με το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{R}^{-R} e^{i\lambda x} f(x)\, dx + \int_{\gamma'_R} e^{i\lambda z} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(e^{i\lambda z} f(z), \zeta_k\right) .$$

Όμως από το λήμμα Jordan $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma'_R} e^{i\lambda z} f(z)\, dz = 0$, $\lambda < 0$. Παίρνοντας το $R \to +\infty$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\, dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(e^{i\lambda z} f(z), \zeta_k\right) , \quad \lambda < 0 .$$

$\square$

Παράδειγμα 6.8. *Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα*

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{(1+x^2)^2}\, dx .$$

Λύση. Επειδή η συνάρτηση $y = x^3 \sin x/(1+x^2)^2$ είναι άρτια, έχουμε

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{1}{2}\Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\, dx\right) .$$

Αν

$$f(z) = \frac{z^3}{(1+z^2)^2} = \frac{z^3}{(z+i)^2(z-i)^2} ,$$

τα $\pm i$ είναι πόλοι τάξης 2 της f. Μόνο το i βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο. Επειδή βαθμός $(1+z^2)^2 =$ βαθμός $(z^3) + 1$, αν γ_R είναι ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με κέντρο την αρχή των αξόνων, από το λήμμα Jordan

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} e^{iz} f(z)\, dz = 0 .$$

Επομένως, από το Θεώρημα 6.7 έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix}\frac{z^3}{(1+z^2)^2}\,dx &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(e^{iz}f(z), i\right)\\ &= 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2\frac{e^{iz}z^3}{(z+i)^2(z-i)^2}\right)\\ &= 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}z^3}{(z+i)^2}\right)\\ &= 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{ie^{iz}z^2(z^2+3)}{(z+i)^3} = \frac{\pi i}{2e}\,.\end{aligned}$$

Άρα,

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix}\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,dx\right) = \frac{\pi}{4e}\,.$$

■

6.4 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι

$$(i)\ \int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{4} \qquad (ii)\ \int_0^{2\pi}\frac{1}{(1+2a\cos\theta+a^2)^2}\,d\theta = \frac{2\pi(1+a^2)}{(1-a^2)^3}\,,\ -1<a<1\,.$$

2. Αν $0<a<b$, δείξτε ότι

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{1}{a\cos^2\theta+b}\,d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{a+b}}\,.$$

3. Δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{(3\cos\theta+5)^2}\,d\theta = \Re\left(\int_0^{2\pi}\frac{e^{2i\theta}}{(3\cos\theta+5)^2}\,d\theta\right) = \frac{13\pi}{288}\,.$$

4. Αν $n\in\mathbb{N}^*$, δείξτε ότι

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta = \Re\left(\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\theta}}{5+4\cos\theta}\,d\theta\right) = (-1)^n\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}\,.$$

5. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta - i\sin\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{e^{1/z}}{z}\,dz = 1\,.$$

6. Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση, να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n}\theta\, d\theta = \frac{2\pi}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

7. Δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\, dx = \frac{3\pi}{16}.$$

8. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx = \frac{\pi}{ab(a+b)}, \quad a,b>0\,, a\neq b$$

και

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\, dx = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

9. Αν $n \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n\sin(\pi/2n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

10. Έστω η συνάρτηση

$$F(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-2i\pi xs}\, dx\,, \quad s\in\mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι η F είναι καλά ορισμένη και ότι

$$F(s) = 2\Re\left(\int_0^{\infty} e^{-x}e^{2i\pi xs}\, dx\right) = \frac{2}{1+4\pi^2 s^2}.$$

11. Να αποδειχθεί ότι

$$(i)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{\pi}{a}e^{-a}, \quad a>0 \quad (ii)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^2-2x+2}\, dx = -\pi e^{-\pi}.$$

12. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2-2x+2}\, dx = \Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x^2-2x+2}\, dx\right) = -\pi e^{-\pi}.$$

6.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα 6.9. *Υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$, τέτοια ώστε*

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)^2}{z^3} = 1;$$

Λύση. Από την υπόθεση το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της $g(z) := f(z)^2/z^3$ και επομένως η g έχει αναλυτική επέκταση στο $D(0,1)$, ορίζουμε $g(0) := 1$.

Έστω $\varepsilon = 1$. Υπάρχει r με $0 < r < 1$, έτσι ώστε για κάθε $|z| < r$ είναι $|g(z) - 1| < 1$. Ισοδύναμα,

$$\left|\frac{f(z)^2}{z^3} - 1\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{f(z)^2}{z^3}\right| < 2 \Leftrightarrow |f(z)| < \sqrt{2}|z|^{3/2} \quad \text{για κάθε } |z| < r$$

και κατά συνέπεια το 0 είναι ρίζα της f. Αν το 0 είναι ρίζα τάξης $k \geq 1$ της f, είναι

$$f(z) = z^k h(z)\,, \quad \text{όπου } h \text{ αναλυτική στο } D(0,1) \text{ με } h(0) \neq 0\,.$$

Τότε από την υπόθεση έχουμε

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)^2}{z^3} = \lim_{z\to 0} \frac{z^{2k}h(z)^2}{z^3} = \lim_{z\to 0} \frac{z^{2k}}{z^3}h(z)^2 = 1\,.$$

Όμως για να ισχύει το παραπάνω θα πρέπει να είναι $2k = 3 \Leftrightarrow k = 3/2$, άτοπο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει τέτοια αναλυτική συνάρτηση f. ■

Παράδειγμα 6.10. *Έστω η συνάρτηση*

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}\,.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f σε όλους τους δυνατούς δακτυλίους με κέντρο το $z_0 = -1$.

Λύση. Ως γνωστόν, $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$, $|w| < 1$ (γεωμετρική σειρά). Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά έχουμε

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1}\,, \quad |w| < 1\,.$$

<u>*1η περίπτωση*</u>: $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 1\}$. Τότε είναι

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)} &= \frac{1}{\left[1-(z+1)\right]^2(z+1)} \\ &= \frac{1}{z+1}\sum_{n=1}^{\infty} n(z+1)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(z+1)^{n-2} \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} (n+2)(z+1)^n\,. \end{aligned}$$

2η περίπτωση: $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| > 1\}$. Τότε $|1/(z+1)| < 1$ και επομένως

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)} &= \frac{1}{[1-1/(z+1)]^2\,(z+1)^3} \\
&= \frac{1}{(z+1)^3}\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{(z+1)^{n-1}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{(z+1)^{n+2}} \\
&= -\sum_{n=-\infty}^{-3} (n+2)(z+1)^n\,.
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 6.11. *Έστω η συνάρτηση*

$$f(z) = \frac{z^2+4z+4+4i}{(z^2+4)(z+i)}\,.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της f με κέντρο το $z_0 = 0$ σ' ένα δακτύλιο που περιέχει το $1-i$. Ποιός είναι ο μεγαλύτερος τέτοιος δακτύλιος στον οποίο το ανάπτυγμα Laurent της f ισχύει;

Λύση. Τα $-i, \pm 2i$ είναι τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f. Είναι

$$f(z) = \frac{z^2+4}{(z^2+4)(z+i)} + \frac{4z+4i}{(z^2+4)(z+i)} = \frac{1}{z+i} + \frac{4}{z^2+4}\,.$$

Ως γνωστόν, $1/(1-w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ και $1/(1+w) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n$, $|w| < 1$ (γεωμετρική σειρά). Αν $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$, το $1-i \in \Delta$ και το ανάπτυγμα Laurent της f στο δακτύλιο Δ είναι

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z+i} + \frac{4}{z^2+4} \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{1+i/z} + \frac{1}{1+(z/2)^2} \\
&= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{i}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{i^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} z^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{i^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} z^{2n}\,.
\end{aligned}$$

Σημείωση. Η f γράφεται και στη μορφή

$$f(z) = \frac{1}{z+i} + \frac{4}{z^2+4} = \frac{1}{z+i} + \frac{i}{z+2i} - \frac{i}{z-2i}\,.$$

■

Παράδειγμα 6.12. *Έστω γ_R, με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου με κέντρο 0 και ακτίνα $R > 0$. Να αποδειχθεί ότι*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\,dz = 0$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx\,.$$

Λύση. Για κάθε $z \in \gamma_R^*$ είναι

$$\left|\frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\right| = \frac{1}{|z^2+1|^2|z^2+4|} \le \frac{1}{(|z|^2-1)^2(|z|^2-4)} = \frac{1}{(R^2-1)^2(R^2-4)}\,.$$

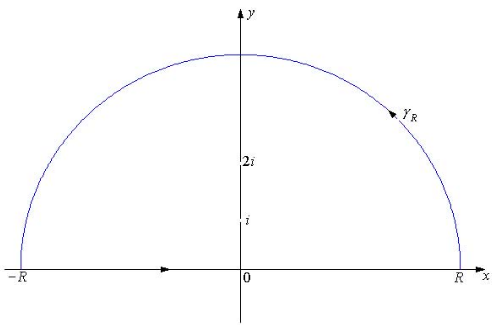
Το μήκος του ημικύκλιου γ_R^* είναι $R\pi$ και επομένως

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\,dz\right| \le \frac{R\pi}{(R^2-1)^2(R^2-4)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,.$$

Άρα,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\,dz = 0\,.$$

Τα $\pm i$ είναι πόλοι τάξης 2 και τα $\pm 2i$ είναι απλοί πόλοι της $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}$. Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση f πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη που αποτελείται από το ημικύκλιο του άνω ημιεπιπέδου γ_R, με εξίσωση $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ και το ευθύγραμμο τμήμα $[-R, R]$. Παίρνουμε το R αρκετά μεγάλο έτσι ώστε το ανώμαλα σημεία i και $2i$ της f να βρίσκονται στο



εσωτερικό του ημικύκλιου γ_R.

Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}\,(f,\,i) + \mathrm{Res}\,(f,\,2i)\right). \tag{6.5}$$

Είναι

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\,(f,\,i) &= \mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)},\, i\right)\\
&= \lim_{z\to i}\left((z-i)^2\frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\right)'\\
&= \lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^2(z^2+4)}\right)'\\
&= -\lim_{z\to i}\frac{2z(z+i)+2(z^2+4)}{(z+i)^3(z^2+4)^2}\\
&= -\frac{i}{36}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\,(f,\,2i) &= \mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)},\, 2i\right)\\
&= \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\\
&= \lim_{z\to 2i}\frac{1}{(z^2+1)^2(z+2i)}\\
&= -\frac{i}{36}\,.
\end{aligned}$$

Επομένως, από τη (6.5) προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{9}\,.$$

Άρα,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{18}\,.$$

■

Παράδειγμα 6.13. *Αν $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ είναι ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \infty$, δηλαδή $\lim_{|z|\to\infty}|f(z)| = \infty$, τότε η f είναι ένα πολυώνυμο.*

Απόδειξη. Είναι $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, για κάθε $z\in\mathbb{C}$. Έστω

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{z^k}\,, \quad \text{για κάθε } |z|>0\,.$$

Το ∞ είναι επουσιώδες, πόλος ή ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f, αν το 0 είναι αντίστοιχα επουσιώδες, πόλος ή ουσιώδες ανώμαλο σημείο της της $g(z) = f(1/z)$. Όμως το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g αν και μόνο αν το $\lim_{z\to 0} g(z)$ υπάρχει, είναι πόλος της g αν και μόνο αν το $\lim_{z\to 0}|g(z)| = \infty$ και είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της g αν και μόνο αν το $\lim_{z\to 0}|g(z)|$ δεν υπάρχει και δεν ισούται με το ∞. Επομένως το ∞ είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f αν και μόνο αν το $\lim_{z\to\infty} f(z)$ υπάρχει, είναι πόλος της f αν και μόνο αν το $\lim_{z\to\infty}|f(z)| = \infty$ και είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f αν και μόνο αν το $\lim_{z\to\infty}|f(z)|$ δεν υπάρχει και δεν ισούται με το ∞. Έχουμε λοιπόν τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

(i) Το 0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της g οπότε $a_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Επομένως $f(z) = a_0$, η f είναι σταθερή.

(ii) Το 0 είναι πόλος τάξης n της g. Τότε

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k}\,,\ a_n \neq 0 \ \text{ και επομένως } \ f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n\,,\ a_n \neq 0\,.$$

Σ' αυτή την περίπτωση είναι $\lim_{z\to\infty}|f(z)| = \infty$.

(iii) Αν το 0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της g, τότε

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}\,, \text{ για κάθε } |z| > 0\,, \text{ όπου } a_k \neq 0 \text{ για άπειρα το πλήθος } k\,.$$

Σ' αυτή την περίπτωση το $\lim_{z\to 0}|g(z)|$, όπως επίσης και το $\lim_{z\to\infty}|f(z)|$, δεν υπάρχει και δεν ισούται με το ∞.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν $\lim_{z\to\infty}|f(z)| = \infty$, τότε η f είναι ένα πολυώνυμο. □

Παράδειγμα 6.14. *Αν η ακέραια συνάρτηση $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι $1-1$, να αποδειχθεί ότι η g είναι της μορφής $g(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.*

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι ακέραιες συναρτήσεις της μορφής $g(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, είναι $1-1$ και επί. Θα αποδείξουμε ότι όλες οι ακέραιες συναρτήσεις που είναι $1-1$ και επί είναι της παραπάνω μορφής. Θα εξετάσουμε το είδος του ανώμαλου σημείου ∞ για όλες αυτές τις συναρτήσεις.

Αν το ∞ είναι επουσιώδης (εξουδετερώσιμη) ανωμαλία της g, το $\lim_{z\to\infty} g(z)$ υπάρχει, έστω $\lim_{|z|\to\infty}|g(z)| = c$. Τότε, για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|g(z)| < c+\varepsilon$, για κάθε $|z| > M$. Όμως υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε $|g(z)| < K$, για κάθε $|z| \leq M$. Δηλαδή η $|g|$ είναι φραγμένη

στο $\mathbb{C}$ και από το θεώρημα Liouville η g θα είναι σταθερή. Επομένως, το ∞ δεν είναι επουσιώδης (εξουδετερώσιμη) ανωμαλία της g.
Αν το ∞ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της g, το $\lim_{z\to\infty} g(z)$ δεν υπάρχει και δεν ισούται με το ∞. Επειδή η g είναι αναλυτική και δεν είναι σταθερή, από το "θεώρημα ανοικτής απεικόνισης" υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και $\delta > 0$ τέτοια ώστε

$$\text{για κάθε } w \in \mathbb{C} \text{ με } |w - g(0)| < \varepsilon\,, \text{ υπάρχει } z \in \mathbb{C}\,, \text{ με } |z| < \delta\,, \text{ τέτοιο ώστε } w = g(z)\,. \qquad (6.6)$$

Όμως το ∞ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της g και αν το U είναι περιοχή του ∞, από το θεώρημα Casorati–Weierstrass το $R = \{|g(z) : z \in U|\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$. Επομένως, υπάρχει $|z_1| > \delta$ τέτοιο ώστε $|g(z_1) - g(0)| < \varepsilon$. Τότε όμως από την (6.6) υπάρχει $|z_2| < \delta$ τέτοιο ώστε $g(z_2) = g(z_1)$. Άτοπο, επειδή η g είναι $1-1$.
Άρα, το ∞ είναι πόλος της g και κατά συνέπεια η g είναι ένα πολυώνυμο. Όμως τα πολυώνυμα βαθμού τουλάχιστον 2 έχουν περισσότερες από μία ρίζα και επομένως δεν μπορεί να είναι $1-1$.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι μια ακέραια συνάρτηση $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι $1-1$, αν και μόνο αν είναι της μορφής $g(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. □

Παράδειγμα 6.15. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη στον τόπο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και δεν είναι σταθερή. Έστω $a \in \Omega$ και $r > 0$, με $\overline{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\} \subset \Omega$. Αν η $|f|$ είναι σταθερή στο σύνορο του $\overline{D}(a, r)$, να αποδειχθεί ότι η f έχει ρίζα στον ανοικτό δίσκο $D(a, r)$.*
Σημείωση. Δηλαδή αν η συνάρτηση f είναι ολόμορφη στον τόπο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $|f(z)| = c$, αν $|z - a| = r$, όπου $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, τότε είτε η f έχει ρίζα στον ανοικτό δίσκο $D(a, r)$ ή η f είναι σταθερή στον τόπο Ω.

Απόδειξη. 1ος τρόπος. Επειδή η ολόμορφη συνάρτηση f δεν είναι σταθερή και $|f(z)| = c$, αν $|z - a| = r$, από την αρχή μεγίστου για κάθε $z_0 \in D(a, r)$ το $f(z_0) \in D(0, c)$. Για ένα τέτοιο z_0 έστω

$$g(z) := f(z) - f(z_0)\,.$$

Τότε,

$$|g(z) - f(z)| = |f(z_0)| < c = |f(z)|\,, \quad \text{για κάθε}\, z \in C(a, r)\,.$$

Επειδή η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $D(a, r)$, δηλαδή το z_0, από το θεώρημα του Rouché και η f θα έχει ρίζα στον ανοικτό δίσκο $D(a, r)$.

<u>*2ος τρόπος*</u>. Αν υποθέσουμε ότι η f δεν έχει ρίζα στον ανοικτό δίσκο $D(a, r)$, από την αρχή μεγίστου και την αρχή ελαχίστου η $|f|$ θα παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο του $D(a, r)$. Επειδή είναι $|f(z)| = c$ στο σύνορο του $D(a, r)$, θα είναι $|f(z)| = c$, για κάθε $z \in D(a, r)$. Τότε από την Πρόταση 3.20 η f θα είναι σταθερή στο δίσκο $D(a, r)$ και από το θεώρημα μοναδικότητας θα είναι σταθερή και στον τόπο Ω. $\square$

Παράδειγμα 6.16. *Έστω η $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ακέραια συνάρτηση και μη σταθερή. Αν $c > 0$, να αποδειχθεί ότι*
$$\overline{\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < c\}} = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c\}\ .$$

Απόδειξη. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής, το $G := \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < c\}$ είναι ανοικτό σύνολο και το $F := \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c\}$ είναι κλειστό. Επειδή $G \subseteq F$, θα είναι $\overline{G} \subseteq \overline{F} = F$. Πρέπει λοιπόν να αποδείξουμε ότι $F \subseteq \overline{G}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $z_0 \in F$ με $|f(z_0)| = c$, τότε $z_0 \in \overline{G}$. Ισοδύναμα,
$$D(z_0, \delta) \cap G \neq \emptyset\,, \quad \text{για κάθε } \delta > 0\,.$$
Αν η f έχει ρίζα σε κάποιο $\xi \in D(z_0, \delta)$, τότε προφανώς το $\xi \in G$. Υποθέτουμε τώρα ότι η f δεν έχει ρίζα στο $D(z_0, \delta)$. Έστω $0 < \varepsilon < \delta$. Επειδή η f δεν είναι σταθερή, από την αρχή ελαχίστου η f θα παίρνει την ελάχιστη τιμή της σε κάποιο σημείο του συνόρου του $D(z_0, \varepsilon)$, έστω στο $\zeta \in C(z_0, \varepsilon) \subset D(z_0, \delta)$. Τότε θα είναι $|f(\zeta)| < |f(z_0)| = c$ και επομένως $\zeta \in G$. Άρα, $D(z_0, \delta) \cap G \neq \emptyset$. $\square$

Παράδειγμα 6.17. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ φραγμένος τόπος και έστω $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ συναρτήσεις συνεχείς και αναλυτικές στο Ω. Να αποδειχθεί ότι*
$$|f(z)| + |g(z)| \leq \sup\{|f(w)| + |g(w)| : w \in \partial\Omega\}\ , \quad \textit{για κάθε } z \in \Omega\,.$$

Απόδειξη. Έστω $z_0 \in \Omega$. Αν $f(z_0) = |f(z_0)|e^{i\alpha}$ και $g(z_0) = |g(z_0)|e^{i\beta}$, ορίζουμε τη συνάρτηση
$$h(z) := f(z)e^{-i\alpha} + g(z)e^{-i\beta}\,, \quad z \in \Omega\,.$$
Η h είναι αναλυτική στο φραγμένο τόπο Ω και συνεχής στο $\overline{\Omega}$. Επομένως, από την αρχή μεγίστου
$$|h(z_0)| = |f(z_0)| + |g(z_0)| \leq \sup\{|h(w)| : w \in \partial\Omega\} \leq \sup\{|f(w)| + |g(w)| : w \in \partial\Omega\}\ .$$
$\square$

Παράδειγμα 6.18. *Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ είναι τέτοιο ώστε $|P(z)| = 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \leq 1$. Να αποδειχθεί ότι*

1. $|a_k| \leq 1$, $k = 0, 1, \ldots, n$,

2. $|P(z)| \leq |z|^n$, *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$ *με* $|z| \geq 1$.

Απόδειξη. 1. Από τις ανισότητες του Cauchy έχουμε

$$|a_k| = \left| \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq \frac{\max_{|z|=1} |P(z)|}{1^k} = 1\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

2. Αν $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq R\}$, $R > 1$, η συνάρτηση

$$f(z) := \frac{P(z)}{z^n}$$

είναι ολόμορφη στο D. Για $|z| = 1$ είναι $|f(z)| = |P(z)| = 1$, ενώ για $|z| = R$ είναι

$$|f(z)| = |a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}| \leq |a_n| + \frac{|a_{n-1}|}{R} + \cdots + \frac{|a_0|}{R^n} \leq 1 + \varepsilon(R)\,,$$

όπου $\varepsilon(R) = |a_{n-1}|/R + \cdots + |a_0|/R^n$. Επομένως, για $|z| = R$ είναι

$$|f(z)| \leq 1 + \varepsilon(R)\,, \quad \text{με} \lim_{R\to\infty} \varepsilon(R) = 0\,.$$

Άρα, από την αρχή μεγίστου στο D είναι

$$|f(z)| = \frac{|P(z)|}{|z|^n} \leq 1 \Leftrightarrow |P(z)| \leq |z|^n\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C} \text{ με } |z| \geq 1\,.$$

□

Παράδειγμα 6.19. *Υποθέτουμε ότι η ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι τέτοια ώστε $|f(z)| = 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$. Να αποδειχθεί ότι*

$$f(z) = cz^n\,, \quad \text{όπου } c \text{ σταθερά με } |c| = 1 \text{ και } n \in \mathbb{N}\,.$$

Ειδικά, αν το p είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n τέτοιο ώστε $|p(z)| = 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$, τότε $p(z) = cz^n$, όπου $c \in \mathbb{C}$ με $|c| = 1$.

Απόδειξη. <u>*1ος τρόπος*</u>. Έστω $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Αν

$$g(z) := \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \frac{1}{z^n}\,,$$

η g είναι αναλυτική στον τόπο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Για $|z|=1$, δηλαδή $z=e^{i\theta}$, από την υπόθεση είναι $f(e^{i\theta})\overline{f(e^{i\theta})}=1$. Επομένως,

$$g(z) := \overline{f(e^{i\theta})} = \frac{1}{f(e^{i\theta})} = \frac{1}{f(z)} \Leftrightarrow f(z)g(z)=1\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C} \text{ με } |z|=1\,.$$

Δηλαδή η συνάρτηση fg είναι αναλυτική στον τόπο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $f(z)g(z)=1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z|=1$. Τότε, από το θεώρημα μοναδικότητας θα είναι

$$f(z)g(z)=1\,, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

Είναι λοιπόν $f(z) \neq 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και κατά συνέπεια

$$f(z) = z^n h(z)\,, \quad \text{για κάποιο } n \in \mathbb{N}\,,$$

όπου h ακέραια συνάρτηση με $h(z) \neq 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επειδή $|h(z)|=1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z|=1$ και $h(z) \neq 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$, από το Παράδειγμα 6.15 προκύπτει ότι $h(z)=c$, με $|c|=1$. Άρα,

$$f(z) = cz^n\,, \quad \text{όπου } c \text{ σταθερά με } |c|=1 \text{ και } n \in \mathbb{N}\,.$$

<u>*2ος τρόπος*</u>. Η f δεν μπορεί να έχει άπειρο το πλήθος ρίζες στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1)$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $f(\alpha_n)=0$, όπου (α_n) ακολουθία σημείων του μοναδιαίου δίσκου διάφορων μεταξύ τους, τότε υπάρχει υπακολουθία (α_{k_n}) με $\lim_{n\to\infty} \alpha_{k_n} = \alpha \in D(0,\,1)$ και από την αρχή ταυτοτισμού θα είναι $f=0$.

Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ οι ρίζες της f στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1)$. Ορίζουμε την ακέραια συνάρτηση $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, με

$$g(z) := f(z) \Big/ \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z} \right).$$

Ως γνωστόν, οι μετασχηματισμοί Möbius

$$w_k = \frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}\,, \quad k=1,2,\ldots,n\,,$$

απεικονίζουν το μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1)$ στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1)$ και το μοναδιαίο κύκλο $C(0,\,1)$ στο μοναδιαίο κύκλο $C(0,\,1)$. Επομένως, για κάθε $|z|=1$ είναι $|g(z)|=|f(z)|=1$ και η

g δεν έχει ρίζες στο μοναδιαίο δίσκο $D(0, 1)$. Από την αρχή μεγίστου και την αρχή ελαχίστου η $|g|$ θα παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο του $D(0, 1)$, δηλαδή στο μοναδιαίο κύκλο $|z| = 1$. Όμως $|g(z)| = 1$, για κάθε $|z| = 1$, οπότε θα είναι $|g(z)| = 1$ για κάθε $z \in D(0, 1)$. Τότε ως γνωστόν η g θα είναι σταθερή στον τόπο $D(0, 1)$ και από την αρχή ταυτοτισμού θα είναι σταθερή και στο $\mathbb{C}$. Έστω $g(z) = c$, όπου $c \in \mathbb{C}$ με $|c| = 1$. Άρα,

$$f(z) = c\prod_{k=1}^{n} \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z} = c\frac{z - \alpha_1}{1 - \bar{\alpha}_1 z}\frac{z - \alpha_2}{1 - \bar{\alpha}_2 z} \cdots \frac{z - \alpha_n}{1 - \bar{\alpha}_n z}\,.$$

Επειδή η f είναι ακέραια συνάρτηση, θα πρέπει να είναι $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ και κατά συνέπεια

$$f(z) = cz^n\,, \quad \text{όπου } c \text{ σταθερά με } |c| = 1 \text{ και } n \in \mathbb{N}\,.$$

□

Παράδειγμα 6.20. *Χρησιμοποιώντας την αρχή του ορίσματος, να αποδειχθεί το "Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας".*

Απόδειξη. Έστω $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, με $a_n \neq 0$, πολυώνυμο βαθμού n και $q(z) = a_n z^n$. Παίρνουμε $R > 0$ αρκετά μεγάλο, έτσι ώστε

$$|a_n| > \frac{|a_{n-1}|}{R} + \cdots + \frac{|a_1|}{R^{n-1}} + \frac{|a_0|}{R^n}\,.$$

Τότε, για κάθε $|z| = R$ είναι

$$\begin{aligned} |p(z) - q(z)| &= |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\ &\leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| + |a_0| \\ &= |a_{n-1}|R^{n-1} + \cdots + |a_1|R + |a_0| \\ &< |a_n|R^n = |q(z)|\,. \end{aligned}$$

Δηλαδή $|p(z) - q(z)| < |q(z)|$, για κάθε $|z| = R$. Επειδή το $q(z) = z^n$ έχει n ρίζες (όλες ίσες με μηδέν) στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = R$, από το θεώρημα του Rouché και το πολυώνυμο p θα έχει n ρίζες. □

Παράδειγμα 6.21. *Να βρεθεί σύμμορφη απεικόνιση που να απεικονίζει το*

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \Im z > 0\}$$

στο μοναδιαίο δίσκο $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Λύση. Η $w = f_1(z) = i\frac{1-z}{1+z}$ απεικονίζει το D_1 στο $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0, \Im z > 0\}$ και η $w = f_2(z) = z^2$ απεικονίζει το D_2 στο $D_3 = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$. Τέλος, η $w = f_3(z) = \frac{z-i}{z+i}$ απεικονίζει το D_3 στο $D(0, 1)$. Άρα, η $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ θα απεικονίζει το D_1 στο μοναδιαίο δίσκο. Είναι

$$w = f(z) = f_3\left(f_2\left(f_1(z)\right)\right) = \frac{[i(1-z)/(1+z)]^2 - i}{[i(1-z)/(1+z)]^2 + i} = \frac{(1-z)^2 + i(1+z)^2}{(1-z)^2 - i(1+z)^2}\,.$$

■

Παράδειγμα 6.22. *Έστω $a, b \in D(0, 1)$ με $a \neq b$. Να βρεθεί αυτομορφισμός φ του $D(0, 1)$ τέτοιος ώστε $\varphi(a) = b$ και αποδείξτε ότι ο φ είναι ο μοναδικός αυτομορφισμός με αυτή την ιδιότητα.*

Λύση. Από την Πρόταση 4.87, όλοι οι αυτομορφισμοί $w = f(z)$ του $D(0, 1)$, με $f(a) = 0$, $|a| < 1$, είναι της μορφής

$$w = f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\,, \quad \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Επειδή,

$$w = f^{-1}(z) = \frac{z + e^{i\theta}a}{e^{i\theta} + \overline{a}z}\,, \quad \theta \in \mathbb{R}\,,$$

όλοι οι αυτομορφισμοί $w = g(z)$ του $D(0, 1)$, με $g(0) = b$, είναι της μορφής

$$w = g(z) = \frac{z + e^{i\theta}b}{e^{i\theta} + \overline{b}z}\,, \quad \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Άρα, ο

$$w = \varphi(z) := g\left(f(z)\right) = \frac{e^{i\theta}(z-a)/\left(1-\overline{a}z\right) + e^{i\theta}b}{e^{i\theta} + \overline{b}e^{i\theta}(z-a)/\left(1-\overline{a}z\right)} = \frac{\left(1-b\overline{a}\right)z + b - a}{\left(\overline{b}-\overline{a}\right)z + 1 - a\overline{b}}$$

είναι ένας αυτομορφισμός του $D(0, 1)$, τέτοιος ώστε $\varphi\left(a\right) = b$. ■

Παράδειγμα 6.23. *Δείξτε ότι ο μόνος αυτομορφισμός f του $D(0, 1)$ με $f(0) = 0$ και $f'(0) > 0$ είναι ο ταυτοτικός.*

Λύση. Από την Πρόταση 4.86, όλοι οι αυτομορφισμοί $w = f(z)$ του $D(0, 1)$, με $f(0) = 0$, είναι της μορφής

$$w = f(z) = e^{i\theta}z\,, \quad \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Επειδή $f'(0) = e^{i\theta} > 0$, θα πρέπει να είναι $\theta = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Άρα, $w = f(z) = z$. ■

Παράδειγμα 6.24. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, απλά συνεκτικό πεδίο και $z_0 \in \Omega$. Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μια σύμμορφη απεικόνιση f του Ω επί του $D(0, 1)$, τέτοια ώστε $f(z_0) = 0$ και $f'(z_0) > 0$.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα απεικόνισης του Riemann, υπάρχει σύμμορφη απεικόνιση f με τις παραπάνω ιδιότητες. Αν g είναι μια άλλη σύμμορφη απεικόνιση που ικανοποιεί τις ίδιες ιδιότητες, τότε η $h = f \circ g^{-1}$ είναι ένας αυτομορφισμός του $D\,(0,\,1)$ με $h\,(0) = 0$ και $h'\,(0) > 0$. Τότε όμως από την προηγούμενη άσκηση θα είναι $h\,(z) = z$ και επομένως $f = g$. $\square$

Παράδειγμα 6.25. *Έστω z_1, z_2, z_3, z_4 σημεία του $\mathbb{C}$ διαφορετικά μεταξύ τους. Να αποδειχθεί ότι ο διπλός λόγος (z_1, z_2, z_3, z_4) είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνο αν τα σημεία z_1, z_2, z_3, z_4 ανήκουν σ' ένα κύκλο ή σε μια ευθεία.*

Απόδειξη. Αν τόσο τα $z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ όσο και τα $w_2, w_3, w_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ είναι σημεία διαφορετικά μεταξύ τους, όπου $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, υπάρχει μοναδικός μετασχηματισμός Möbius $w = f\,(z)$, τέτοιος ώστε $w_i = f\,(z_i)$, $i = 2, 3, 4$. Αυτός ο μετασχηματισμός προκύπτει από την ισότητα των διπλών λόγων

$$(w, w_2, w_3, w_4) = (z, z_2, z_3, z_4) \Leftrightarrow \frac{(w - w_2)\,(w_3 - w_4)}{(w - w_4)\,(w_3 - w_2)} = \frac{(z - z_2)\,(z_3 - z_4)}{(z - z_4)\,(z_3 - z_2)}\,.$$

Ως γνωστόν, κάθε μετασχηματισμός Möbius απεικονίζει κύκλο ή ευθεία C_z σ' ένα κύκλο ή ευθεία C_w. Ειδικά, ο μετασχηματισμός Möbius

$$(w, 0, 1, \infty) = (z, z_2, z_3, z_4) \Leftrightarrow w = f\,(z) = \frac{(z - z_2)\,(z_3 - z_4)}{(z - z_4)\,(z_3 - z_2)}$$

απεικονίζει κύκλο ή ευθεία C_z στον πραγματικό άξονα (τα σημεία $0, 1, \infty$ ορίζουν την πραγματική ευθεία). Επομένως, $(z_1, z_2, z_3, z_4) = f(z_1) \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν τα σημεία z_1, z_2, z_3, z_4 ανήκουν σε κάποιο κύκλο ή ευθεία C_z. $\square$

Παράδειγμα 6.26. *Έστω η συνάρτηση f είναι ολόμορφη στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}\,(0,\,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ εκτός από το σημειο z_0, $|z_0| = 1$, του μοναδιαίου κύκλου που είναι απλός πόλος (πόλος τάξης 1) της f. Αν $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < 1$, να αποδειχθεί ότι*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0\,.$$

Απόδειξη. Επειδή το z_0 είναι απλός πόλος της f, για κάθε z στο διάτρητο δίσκο $0 < |z - z_0| < R$ είναι

$$f(z) = \frac{c}{z - z_0} + g(z)\,,$$

όπου $c = \operatorname{Res}\,(f, z_0)$ και η g είναι ολόμορφη στο δίσκο $D\,(z_0,\,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. Επομένως η g είναι ολόμορφη στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο, έστω $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Τότε για

$|z| < 1$ είναι

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c}{z - z_0} + g(z) \\ &= -\frac{c}{z_0}\frac{1}{1 - \frac{z}{z_0}} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \\ &= -\frac{c}{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_0}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{c}{z_0^{n+1}} + b_n\right) z^n \end{aligned}$$

και $a_n = -c/z_0^{n+1} + b_n \Leftrightarrow a_n z_0^n = -c/z_0 + b_n z_0^n$. Επειδή η $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ συγκλίνει για $z = z_0$, θα είναι $\lim_{n\to\infty} b_n z_0^n = 0$. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0 \lim_{n\to\infty}\frac{a_n z_0^n}{a_{n+1} z_0^{n+1}} = z_0 \lim_{n\to\infty}\frac{-c/z_0 + b_n z_0^n}{-c/z_0 + b_{n+1} z_0^{n+1}} = z_0\,.$$

□

Παράδειγμα 6.27. *Έστω η ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι τέτοια ώστε*

$$f(z+1) = f(z) \quad \textit{και} \quad f(z+i) = f(z)\,, \quad \textit{για κάθε}\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Δηλαδή η f είναι διπλά περιοδική με περιόδους 1 και i. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Απόδειξη. Η f είναι συνεχής στο τετράγωνο $S = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ που είναι ένα συμπαγές σύνολο. Επομένως υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $|f(z)| \le M$, για κάθε $z \in S$. Επίσης από την υπόθεση είναι

$$f(z+k) = f(z) \quad \text{και} \quad f(z+mi) = f(z)\,, \quad \text{για κάθε}\, k, m \in \mathbb{Z}\,.$$

Ως γνωστόν το ακέραιο μέρος του $t \in \mathbb{R}$, συμβολίζεται με $[t]$, είναι ο μοναδικός ακέραιος αριθμός τέτοιος ώστε $[t] \le t < [t] + 1$. Επομένως $0 \le t - [t] < 1$. Έστω $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Τότε,

$$f(z) = f(x+iy) = f(x - [x] + iy) = f\left(x - [x] + i(y - [y])\right) = f(w)\,,$$

όπου $w = x - [x] + i\,(y - [y]) \in S$. Άρα, $|f(z)| \le M$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και από το θεώρημα του Liouville η f είναι σταθερή. □

Παράδειγμα 6.28. *Να εξεταστεί αν ισχύουν τα παρακάτω (αν δεν ισχύουν δώστε κατάλληλο αντιπαράδειγμα):*

1. *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στον απλά συνεκτικό τόπο D, τότε υπάρχει συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο D με $F'(z) = f(z)$, για κάθε $z \in D$.*

2. *Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο $\{0 < |z| < 2\}$ και $f(1/n) = 0$, $n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, τότε η f είναι ταυτοτικά μηδέν.*

3. *Υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f στον ανοικτό δίσκο $D\,(0,\,2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, τέτοια ώστε*

$$|f(x+iy)|^2 = 4 - x^2 - y^2\,, \quad \text{για κάθε } z = x+iy \in D(0,\,2)\,.$$

Λύση.

1. Ισχύει στην περίπτωση που η f είναι αναλυτική συνάρτηση στον απλά συνεκτικό τόπο D. Αν όμως η f είναι συνεχής, χωρίς να είναι παραγωγίσιμη, τότε δεν ισχύει. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $f(z) = \bar{z}$ η οποία είναι συνεχής στον απλά συνεκτικό τόπο συνεκτικό $\mathbb{C}$ και πουθενά παραγωγίσιμη. Αν υπήρχε συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$ με $F'(z) = \bar{z}$, τότε ως γνωστόν και η $w = F'(z)$, δηλαδή η $w = \bar{z}$ θα ήταν παραγωγίσιμη στο $\mathbb{C}$, άτοπο.

2. Δεν ισχύει. Ο διάτρητος δίσκος $\{0 < |z| < 2\}$ είναι ένα τόπος, όχι όμως απλά συνεκτικός. Έστω $f(z) = \sin(\pi/z)$ η οποία είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο $\{0 < |z| < 2\}$ και δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Είναι $f(1/n) = \sin(\pi n) = 0$, $n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.
Σημειώνεται ότι αν η f ήταν αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $D(0,\,2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, οπότε $0 \in D(0,\,2)$, από την αρχή ταυτοτισμού η f θα ήταν ταυτοτικά μηδέν.

3. Αν υπήρχε τέτοια αναλυτική συνάρτηση f, τότε $|f(0)|^2 = 4 \Leftrightarrow |f(0)| = 2$, ενώ στο σύνορο του κλειστού και φραγμένου δίσκου $\overline{D}(0,\,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$, $0 < r < 2$, δηλαδή για $|z| = r$ θα είναι $|f(z)|^2 = 4 - r^2 < 4 \Leftrightarrow |f(z)| < 2$. Από την αρχή μεγίστου αυτό είναι άτοπο. Άρα, δεν υπάρχει τέτοια αναλυτική συνάρτηση f στον ανοικτό δίσκο $D(0,\,2)$.

■

Παράδειγμα 6.29. *Έστω γ απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη στο $\mathbb{C}$ με θετική φορά διαγραφής. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι ολόμορφη πάνω και στο εσωτερικό της γ και ότι τα $z_1, z_2, \ldots, z_n$ είναι σημεία στο εσωτερικό της γ διάφορα μεταξύ τους. Αν*

$$Q(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)\,,$$

να αποδειχθεί ότι το

$$P(z) := \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{Q(w)}\frac{Q(w)-Q(z)}{w-z}\,dw$$

είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $n-1$ *που έχει τις ίδιες τιμές με την* f *στα σημεία* $z_1, z_2, \ldots, z_n$*, δηλαδή* $P(z_k) = f(z_k)$*,* $k = 1, 2, \ldots, n$*.*

Λύση. Επειδή $Q(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy έχουμε

$$P(z_k) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{w - z_k}\,dw = f(z_k)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι το P είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Επειδή το $Q(w)-Q(z)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n ως προς z, υπάρχουν $a_k(w)$ τέτοια ώστε

$$Q(w) - Q(z) = (w-z)\sum_{k=0}^{n-1} a_k(w) z^k\,.$$

Άρα,

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{Q(w)} a_k(w)\right) z^k\,.$$

■

Παράδειγμα 6.30. *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση*

$$\sin z = z$$

εκτός από την πραγματική ρίζα $z = 0$ *έχει και άπειρο το πλήθος μιγαδικές ρίζες.*

Λύση. Η συνάρτηση

$$f(z) := \sin z - z$$

είναι ακέραια και δεν είναι σταθερή ούτε και πολυώνυμο. Επομένως το ∞ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f. Τότε από το "μεγάλο" θεώρημα του Picard για κάθε $w \in \mathbb{C}$, με την εξαίρεση ενός το πολύ σημείου, η $f(z) = w$ έχει άπειρο το πλήθος λύσεων σε κάθε περιοχή του ∞.

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $\sin z = z$ και ισοδύναμα η $f(z) = 0$ έχει πεπερασμένο το πλήθος λύσεις. Τότε από θεώρημα του Picard και για $w = 2\pi$ η $f(z) = 2\pi$ έχει άπειρο το πλήθος λύσεων. Έστω (w_n) ακολουθία με άπειρους όρους διαφορετικούς ανά δύο και τέτοια ώστε $f(w_n) = 2\pi \Leftrightarrow \sin w_n - w_n = 2\pi$. Τότε

$$f(2\pi + w_n) = \sin(2\pi + w_n) - (2\pi + w_n) = \sin w_n - 2\pi - w_n = 0\,.$$

Άτοπο, επειδή υποθέσαμε ότι η εξίσωση $f(z) = 0$ έχει πεπερασμένο το πλήθος λύσεις. Άρα η εξίσωση $\sin z = z$ έχει άπειρο το πλήθος μιγαδικές ρίζες. ■

Παράδειγμα 6.31. *Έστω $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραιες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $|f(z)| \leq |g(z)|$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Να αποδειχθεί ότι $f(z) = cg(z)$, για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{C}$.*
Ειδικά, αν $|f(z)| \leq |\sin^2 z|$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$, τότε $f(z) = c \sin^2 z$, για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι προφανής στην περίπτωση που η g είναι ταυτοτικά μηδέν. Υποθέτουμε ότι η g δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Τότε οι ρίζες της g είναι μεμονωμένα σημεία και κατά συνέπεια τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης f/g είναι επουσιώδη. Τότε η f/g μπορεί να επεκταθεί σε μια ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(z)/g(z)| \leq 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Από το θεώρημα Liouville η f/g είναι σταθερή. □

Παράδειγμα 6.32. *Έστω η ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, τέτοια ώστε $|f(z)| = |\sin z|$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Να αποδειχθεί ότι $f(z) = c \sin z$, για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$.*

Απόδειξη. *1ος τρόπος*. Προκύπτει από την προηγούμενη άσκηση.
2ος τρόπος. Αν

$$g(z) := \frac{f(z)}{\sin z}\,, \text{ η συνάρτηση } g \text{ είναι αναλυτική στο πεδίο } \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}\,.$$

Επειδή $|g(z)| = 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$, από την Πρόταση 3.20 η g θα είναι σταθερή στον τόπο $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Έστω $g(z) = c$, $|c| = 1$. Δηλαδή $f(z) = c \sin z$ με $|c| = 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Επειδή οι συναρτήσεις f και $w = \sin z$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{C}$, έπεται ότι $f(z) = c \sin z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, όπου c σταθερά με $|c| = 1$. □

Παράδειγμα 6.33. *Έστω $R > 0$. Για μεγάλα $n \in \mathbb{N}$ να αποδειχθεί ότι όλες οι ρίζες της*

$$f_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n}$$

βρίσκονται στον ανοικτό δίσκο $D\,(0,\, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

Απόδειξη. Έστω

$$g_n(z) = f_n(1/z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}\,.$$

Επειδή $g_n(0) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η g_n έχει ρίζες για $|z| \leq 1/R$ αν και μόνο αν η f_n έχει ρίζες για $|z| \geq R$. Παρατηρούμε ότι g_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k! = e^z$, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$. Αν

$$m = \min_{|z|=1/R} |e^z| \,,$$

υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$

$$|g_n(z) - e^z| < m \leq |e^z| \,, \quad \text{για κάθε}\, |z| = 1/R \,.$$

Επειδή η $w = e^z$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{C}$, από το θεώρημα του Rouché και η g_n δεν θα έχει ρίζες για $|z| \leq 1/R$. Ισοδύναμα, η f_n δεν έχει ρίζες για $|z| \geq R$. □

6.6 Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

   (α΄)
   $$\oint_{|z|=1/2} \frac{\cos z}{1+z+z^2+z^3+z^4}\, dz \,.$$

   (β΄)
   $$\oint_{|z-i|=1} \frac{e^{-2z}}{(z-i)^4}\, dz \,.$$

2. Υποθέτουμε ότι η ακέραια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι τέτοια ώστε $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \lambda$, $\lambda \geq 0$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή.

3. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο G και συνεχής στο $\overline{G}$, όπου

   $$G = \{z \in \mathbb{C} : |\Re z| < 1 \,,\ |\Im z| < 1\} \,.$$

   Αν $f(z) = 0$, όταν $\Re z = 1$, θεωρώντας τη συνάρτηση

   $$g(z) := f(z)f(iz)f(-z)f(-iz) \,,$$

   να αποδειχθεί ότι η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο $\overline{G}$.

4. Υποθέτουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ είναι R, με $0 < R < \infty$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση
$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$$
είναι ακέραια, δηλαδή αναλυτική σ' όλο το $\mathbb{C}$.

5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

   (α΄)
$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z(z^2+1)}\, dz\,.$$

   (β΄)
$$\oint_{|z|=1} z^n e^{1/z}\, dz\,,$$
   όπου $n \in \mathbb{N}$.

   (γ΄)
$$\oint_{|z|=5} \frac{\cot z}{z^4+z^2}\, dz\,.$$

   (δ΄)
$$\oint_{|z|=2} \frac{z^4 e^{1/z}}{1-z^4}\, dz\,.$$

6. Δείξτε ότι
$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 \sin z}\, dz = \frac{\pi i}{3}\,.$$

7. Δείξτε ότι
$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^4+1}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1},\ e^{5\pi i/4}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}(-1+i)\,,$$
όπου γ είναι η έλλειψη με εξίσωση: $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$ και θετική φορά διαγραφής.

8. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι αναλυτικές στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0,\,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$, ότι η g δεν έχει ρίζες στο $\overline{D}(0,\,1)$ και ότι η f έχει το πολύ $n-1$ το πλήθος ρίζες στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,\,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$
$$\max_{|z|\le 1} \left| z^n - \frac{f(z)}{g(z)} \right| \ge 1\,.$$

9. Έστω οι συναρτήσεις f, g είναι αναλυτικές στον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ και υποθέτουμε ότι $f(z) \neq 0$ για κάθε z στον κύκλο $C(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε οι συναρτήσεις f και $f + \epsilon g$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στο εσωτερικό του κύκλου $C(0, R)$. Δηλαδή, μπορούμε να πούμε ότι η f και μια μικρή μεταβολή της f έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στο εσωτερικό του κύκλου $C(0, R)$.

10. Ως γνωστόν οι τρεις ρίζες της εξίσωσης $z^3 = 1$ είναι οι: 1, $\omega = e^{2\pi i/3}$ και ω^2. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ εκτός από τα σημεία 1, ω και ω^2 που είναι απλοί πόλοι της f με

$$\mathrm{Res}(f, 1) = 1, \quad \mathrm{Res}(f, \omega) = a \neq 0 \quad \text{και} \quad \mathrm{Res}\left(f, \omega^2\right) = a^{-1}.$$

Επίσης υποθέτουμε ότι για κάποιο $R_0 > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|z^2 f(z)| \leq M, \quad \text{για κάθε } |z| > R_0.$$

(α΄) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, δείξτε ότι

$$1 + a + a^{-1} = 0 \Leftrightarrow a^2 + a + 1 = 0.$$

Επομένως είτε $a = \omega$ ή $a = \omega^2$.

(β΄) Αν

$$g(z) := f(z) - \frac{1}{z-1} - \frac{a}{z-\omega} - \frac{a^{-1}}{z-\omega^2},$$

δείξτε ότι η g είναι ταυτοτικά μηδέν στο $\mathbb{C}$.

(γ΄) Να συμπεράνετε ότι

$$f(z) = 3(z^3 - 1)^{-1} \quad \text{ή} \quad f(z) = 3z(z^3 - 1)^{-1}.$$

11. Έστω

$$\exp\left(az + bz^{-1}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad a, b \in \mathbb{C},$$

το ανάπτυγμα Laurent της αναλυτικής συνάρτησης $f(z) = \exp\left(az + bz^{-1}\right)$ στο διάτρητο δίσκο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$ με κέντρο το $z_0 = 0$. Δείξτε ότι

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a+b)\cos\theta} \cos\left[(a-b)\sin\theta - n\theta\right] d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}$$

και

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\exp\left(az+bz^{-1}\right)\,,\,0\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(a+b)\cos\theta}\cos\left[(a-b)\sin\theta+\theta\right]\,d\theta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k b^{k+1}}{k!(k+1)!}\,.\end{aligned}$$

12. Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ με

$$f_n(z) := 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}\,.$$

(α΄) Αν $C^+(0,\,r)$ είναι ο κύκλος με κέντρο 0 ακτίνα $r>0$ και θετική φορά διαγραφής, δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,r)}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,dz$$

υπολογίζει τον αριθμό των ριζών της f_n στο δακτύλιο $\Delta=\{z\in\mathbb{C}:|z|>r\}$. (Υποθέτουμε ότι η f_n δεν έχει ρίζες πάνω στον κύκλο $C(0,\,r)$.)

(β΄) Ποιά είναι η τιμή του ολοκληρώματος

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^+(0,\,r)}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,dz$$

για μεγάλα n και σταθερό $r>0$;

(γ΄) Για μεγάλα n και σταθερό $r>0$ να αποδειχθεί ότι όλες οι ρίζες της f_n βρίσκονται στον ανοικτό δίσκο $D(0,\,r)=\{z\in\mathbb{C}:|z|<r\}$.

Υπόδειξη. Θεωρείστε την ακολουθία συναρτήσεων (F_n) στο $\mathbb{C}$ με

$$F_n(z) := f_n(1/z) = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\,.$$

13. Δείξτε ότι αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}(0,\,1)=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 1\}$ και παίρνει πραγματικές τιμές στο μοναδιαίο κύκλο $C(0,\,1)=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$, τότε η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Αν $a=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}$, με $\beta\neq 0$, αρκεί να αποδειχθεί ότι $f(z)\neq a$ για κάθε $|z|<1$. Χρησιμοποιείστε την « αρχή ορίσματος » για τη συνάρτηση $f(z)-a$.

14. Έστω $\alpha>0$ και $\sqrt{\sin^2 x+i\alpha}=\exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\sin^2 x+i\alpha\right)\right)$, όπου $w=\operatorname{Log} z$ είναι ο αναλυτικός κλάδος λογαρίθμου που ορίζεται στο $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. Αν $x\in[0,\pi/2]$, δείξτε ότι

$$|1-\cos x|\le\sin^2 x\le\left|\sqrt{\sin^2 x+i\alpha}\right|\,.$$

(α΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x + i\alpha}}\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x + i\alpha}}\, dx$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + i\alpha}}\, dx + 2\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + i\alpha}}\, dx\,.$$

(β΄) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{\alpha\to 0^+} 2\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + i\alpha}}\, dx = 2\ln 2\,.$$

(γ΄) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$2\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + i\alpha}}\, dx$$

και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\ln\alpha + \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x + i\alpha}}\, dx\right) = 4\ln 2 - \frac{\pi}{2} i\,.$$

15. Υποθέτουμε ότι η (f_n) είναι ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων, τέτοια ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα ενός τόπου $D \subseteq \mathbb{C}$. Αν η f_n είναι $1-1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι είτε η f είναι σταθερή ή η f είναι $1-1$ στο D.

Παράρτημα Α΄

Οι συναρτήσεις Γάμμα και Ζήτα

Α΄.1 Μερικά βασικά αποτελέσματα της Μιγαδικής Ανάλυσης

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη το παρακάτω βασικό θεώρημα σχετικό με τη σύγκλιση αναλυτικών συναρτήσεων. Το θεώρημα διατυπώθηκε από τον Karl Weierstrass το 1860. Η απόδειξη του θεωρήματος, παραπέμπουμε στο [19, Theorem 3.1.8] ή [32, 10.28 Theorem], είναι συνέπεια του θεωρήματος Morera και των ανισοτήτων Cauchy.

Θεώρημα Α΄.1 (Θεώρημα αναλυτικής σύγκλισης). 1. *Υποθέτουμε ότι (f_n) είναι ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων σε ένα ανοικτό συνεκτικό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, τέτοια ώστε $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του Ω. Τότε, η f είναι αναλυτική στο Ω και $f_n^{(k)} \longrightarrow f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του Ω.*

2. *Αν (g_n) είναι μία ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων ορισμένων σε ένα ανοικτό συνεκτικό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και η $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του Ω, τότε η g είναι αναλυτική στο Ω και $g^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(k)}(z)$, $k \in \mathbb{N}$, ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του Ω.*

Α΄.1.1 Αναλυτική επέκταση (ή συνέχιση)

Μία μιγαδική συνάρτηση f αναλυτική σε ένα ανοικτό συνεκτικό σύνολο $D \subseteq \mathbb{C}$ θα συμβολίζεται με το διατεταγμένο ζεύγος (f, D). Αν (f_1, D_1), (f_2, D_2) είναι δύο τέτοια διατεταγμένα ζεύγη, τότε $(f_1, D_1) = (f_2, D_2)$ αν και μόνο αν $D_1 = D_2$ και $f_1 = f_2$. Θα λέμε ότι το (f_2, D_2) είναι μία

αναλυτική επέκταση ή συνέχιση του (f_1, D_1) αν

$$D_1 \cap D_2 \neq \emptyset \text{ και } f_1(z) = f_2(z)\,, \text{για κάθε } z \in D_1 \cap D_2\,.$$

Είναι προφανές ότι κάθε ζεύγος (f, D) έχει αναλυτική επέκταση. Αν πάρουμε το $D_1 \subset D$ και την $f_1 = f|_{D_1}$, δηλαδή η f_1 είναι ο περιορισμός της f στο D_1, τότε το (f_1, D_1) είναι αναλυτική επέκταση του (f, D). Θα λέμε ότι οι αναλυτικές επεκτάσεις αυτού του είδους είναι *τετριμμένες*. Όλες οι άλλες αναλυτικές επεκτάσεις λέγονται *γνήσιες*. Δίνουμε ένα απλό παράδειγμα. Έστω το ζεύγος (f, D) με $D = D\,(0, 1)$ και

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,, \qquad z \in D(0, 1)\,.$$

Η f είναι αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο $D(0, 1)$. Αν $D_1 = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ και

$$f_1(z) = \frac{1}{1 - z}\,, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}\,,$$

τότε το ζεύγος (f_1, D_1) είναι γνήσια αναλυτική επέκταση του (f, D).

Πρόταση Α΄.2. *Αν (f_1, D_1), (f_2, D_2) είναι δύο αναλυτικές επεκτάσεις του (f, D), τότε $f_1 = f_2$.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό της αναλυτικής επέκτασης το ανοικτό σύνολο $D \cap D_1 \neq \emptyset$ και

$$f_1(z) = f(z) = f_2(z)\,, \qquad \text{για κάθε } z \in D \cap D_1\,.$$

Τότε, από το θεώρημα μοναδικότητας έπεται ότι $f_1 = f_2$. □

Αν (f, D) είναι ένα ζεύγος, έχει η f *γνήσια* αναλυτική επέκταση; Το παρακάτω παράδειγμα μας λέει ότι γενικά η απάντηση είναι αρνητική.

Παράδειγμα Α΄.3. *Έστω*

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots\,, \qquad z \in D(0, 1)\,.$$

Το $(f, D\,(0, 1))$ δεν έχει γνήσια αναλυτική επέκταση.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το $(f, D(0, 1))$ έχει γνήσια αναλυτική επέκταση. Τότε η f θα έχει συνεχή επέκταση σε κάποιο τόξο γ του μοναδιαίου κύκλου $C(0, 1)$ που είναι το σύνορο του μοναδιαίου δίσκου $D\,(0, 1)$. Όμως κάθε τέτοιο τόξο γ περιέχει σημείο της μορφής

$$e^{i\theta}\,, \;\; \text{όπου } \theta = \frac{2m\pi}{2^n} \text{ και τα } m, n \in \mathbb{N}\,.$$

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι για αυτό το θ είναι

$$\lim_{r\to 1^-}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| = +\infty\,.$$

Αυτό μας οδηγεί σε άτοπο (υποθέσαμε ότι η επέκταση της f θα είναι συνεχής στο τόξο γ) και κατά συνέπεια το $(f, D(0,1))$ δεν μπορεί να έχει γνήσια αναλυτική επέκταση.
Αν $z = re^{i\theta}$, τότε

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} z^{2^k} + \sum_{k=n}^{\infty} r^{2^k} \exp\left(2^{k-n+1} m\pi i\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} z^{2^k} + \sum_{k=n}^{\infty} r^{2^k} && \left(\exp\left(2^{k-n+1} m\pi i\right) = 1\right) \\ &= g(z) + h(r)\ , \end{aligned}$$

όπου η $g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2^k}$ είναι φραγμένη στο μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ και

$$h(r) := \sum_{k=n}^{\infty} r^{2^k}\,. \qquad (0 < r < 1)$$

Υποθέτουμε ότι $\lim_{r\to 1^-} h(r) = a$. Τότε, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=n}^{n+N} r^{2^k} \leq a \qquad (0 < r < 1)$$

και επομένως

$$N + 1 = \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=n}^{n+N} r^{2^k} \leq a\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα, $\lim_{r\to 1^-} h(r) = +\infty$ και κατά συνέπεια

$$\lim_{r\to 1^-}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| = +\infty\,.$$

□

Α΄.2 Η συνάρτηση Γ του Euler

Είναι γνωστό από την "Πραγματική Ανάλυση" ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $x > 0$. Η **συνάρτηση Γάμμα** $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt\,.$$

Αποδεικνύεται (παραπέμπουμε στο [42, Section 5.3]) ότι η συνάρτηση Γ παίρνει θετικές τιμές, είναι συνεχής και κυρτή με $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = \infty$ και $\lim_{x\to\infty} \Gamma(x) = \infty$. Μάλιστα η Γ είναι log-κυρτή, δηλαδή για κάθε $x, y > 0$ και για κάθε $\lambda, \mu \geq 0$ με $\lambda + \mu = 1$ είναι

$$\Gamma\left(\lambda x + \mu y\right) \leq \Gamma^{\lambda}\left(x\right) + \Gamma^{\mu}\left(y\right)\,.$$

Επίσης η Γ έχει τις παρακάτω ιδιότητες

$$\Gamma\left(x+1\right) = x\Gamma\left(x\right) \text{ για } x > 0,\ \ \Gamma\left(1\right) = 1 \text{ και }\ \Gamma\left(n+1\right) = n!\,.$$

Θα ορίσουμε στη συνέχεια τη συνάρτηση Γ στο μιγαδικό επίπεδο και συγκεκριμένα στο δεξιό ημιεπίπεδο $D = \{z \in \mathbb{C} :\ \Re z > 0\}$. Υπενθυμίζουμε ότι για $t > 0$

$$t^{z-1} = \exp\left\{(z-1)\ln t\right\} \ \text{ και }\ \left|t^{z-1}\right| = t^{x-1}\,, \text{ όπου } x = \Re z > 0\,.$$

Επειδή

$$\int_0^\infty \left|e^{-t} t^{z-1}\right|\, dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt = \Gamma\left(x\right)\,, \qquad z \in D\,,$$

το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$ συγκλίνει απόλυτα και επομένως μπορούμε να ορίσουμε τη Γ στο D με

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt\,, \qquad z \in D\,.$$

Για να δείξουμε ότι η Γ είναι αναλυτική στο D θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\partial R} \Gamma\left(z\right)\, dz = \int_{\partial R} \left(\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt\right) dz$$

όπου ∂R είναι το σύνορο κάποιου κλειστού ορθογώνιου στο D. Επειδή το

$$\int_{\partial R} \left(\int_0^\infty \left|e^{-t} t^{z-1}\right|\, dt\right) dz = \int_{\partial R} \Gamma\left(x\right)\, dz$$

συγκλίνει, μπορούμε να κάνουμε αλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης. Επομένως, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $e^{-t} t^{z-1}$ είναι αναλυτική σαν συνάρτηση του z, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R} \Gamma\left(z\right)\, dz &= \int_0^\infty \int_{\partial R} e^{-t} t^{z-1}\, dz\, dt \\
&= \int_0^\infty 0\, dt && \text{(θεώρημα Cauchy)} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Άρα, από το θεώρημα του Morera έπεται ότι η συνάρτηση Γ είναι αναλυτική στο D.

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \,. \qquad (\Re z > 0)$$

Προκειμένου να επεκτείνουμε τη Γ σε όλο το $\mathbb{C}$, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της αναλυτικής επέκτασης. Ορίζουμε τη Γ_1 για $\Re z > -1$ με

$$\Gamma_1(z) := \frac{\Gamma(z+1)}{z} \,. \qquad (\Re z > -1)$$

Η Γ_1 είναι παραγωγίσιμη στο ημιεπίπεδο $\Re z > -1$ εκτός από το σημείο 0. Επειδή $\Gamma(1) = 1 \neq 0$, το 0 είναι απλός πόλος της Γ_1. Είναι $\Gamma_1 = \Gamma$ στο $D = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$. Αν

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > -1\} \setminus \{0\} \,,$$

το (Γ_1, D_1) είναι αναλυτική επέκταση του (Γ, D). Επίσης έχουμε

$$\Gamma(z+2) = (z+1)\Gamma(z+1) = z(z+1)\Gamma(z) \,. \qquad (\Re z > 0)$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τη Γ_2 για $\Re z > -2$ με

$$\Gamma_2(z) := \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \,. \qquad (\Re z > -2)$$

Όπως και προηγουμένως παίρνουμε αναλυτική επέκταση (Γ_2, D_2) της (Γ, D), όπου

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > -2\} \setminus \{0, -1\} \,.$$

Προφανώς είναι $\Gamma_1 = \Gamma_2$ για $\Re z > -1$. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία επεκτείνουμε τη συνάρτηση Γ σε όλο το $\mathbb{C}$. Αυτή η επεκταμένη συνάρτηση είναι **μερόμορφη**, δηλαδή είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$ εκτός από τα σημεία $-n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ που είναι απλοί πόλοι της Γ και λέγεται **συνάρτηση γάμμα του Euler**. Γενικά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)\cdots(z+n-1)\Gamma(z) \,. \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Από την εξίσωση

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}$$

παρατηρούμε ότι τα μοναδικά ανώμαλα σημεία της Γ είναι απλοί πόλοι στα σημεία $-n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ με

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(\Gamma, -n) &= \lim_{z\to -n} (z+n)\,\Gamma(z) \\
&= \lim_{z\to -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \\
&= \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-n+n-1)} \\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\,.
\end{aligned}$$

Έχουμε αποδείξει το εξής θεώρημα.

Θεώρημα Α΄.4. *Η συνάρτηση Γ είναι μερόμορφη στο $\mathbb{C}$ και ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\,. \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Η Γ έχει πόλους στα σημεία $-n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, οι πόλοι είναι απλοί με

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}\,.$$

Η συνάρτηση Γ έχει και άλλες σημαντικές ιδιότητες. Αναφέρουμε μία από αυτές τις ιδιότητες στο παρακάτω θεώρημα (για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [4, σελίδες 267, 268]).

Θεώρημα Α΄.5. *Είναι*

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}\,. \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Από το παραπάνω θεώρημα έπεται ότι η συνάρτηση Γ δεν έχει ρίζες.

Α΄.3 Η συνάρτηση ζ του Riemann

Η συνάρτηση ζ του Riemann είναι συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής και παίζει κύριο ρόλο στην αναλυτική θεωρία αριθμών, στη θεωρία αριθμών και έχει εφαρμογές στη φυσική, στη θεωρία πιθανοτήτων και στην εφαρμοσμένη στατιστική.

Παράδειγμα Α΄.6 (Η συνάρτηση ζ του Riemann)**.** *Η συνάρτηση ζ του Riemann που ορίζεται από τη σειρά του Dirichlet*

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $A = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 1\}$. *Επομένως η συνάρτηση* ζ *είναι αναλυτική στο* A.

Απόδειξη. Έστω K συμπαγές υποσύνολο του A(χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να πάρουμε $K = \overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\} \subset A$) και έστω $\delta > 0$ η απόσταση του K από τη γραμμή $\Re z = 1$. Επειδή το K είναι συμπαγές και η γραμμή $\Re z = 1$ είναι κλειστό σύνολο, η απόστασή των δ θα είναι θετική. Τότε, για κάθε $x = \Re z \ge 1 + \delta$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n^z}\right| &= \left|e^{-z\ln n}\right| \\ &= e^{-x\ln n} \\ &= n^{-x} \le n^{-(1+\delta)} . \end{aligned}$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\delta)}$ συγκλίνει, από το M-κριτήριο του Weierstrass η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K και επομένως από το θεώρημα αναλυτικής σύγκλισης η $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^z)$ είναι αναλυτική στο A. Επίσης για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\zeta^{(k)}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\ln n)^k}{n^z} .$$

□

Η σύνδεση της συνάρτησης ζ με τους πρώτους αριθμούς ανακαλύφθηκε από τον Leonhard Euler ο οποίος απέδειξε τη ταυτότητα

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - p^{-z}\right)^{-1} , \qquad \Re z > 1 , \tag{Α΄.1}$$

όπου $\mathcal{P} = \{p : \ p \text{ είναι πρώτος αριθμός}\}$. Ο τύπος (Α΄.1) λέγεται και **τύπος γινομένου του Euler**.

Πρόταση Α΄.7 (Τύπος γινομένου του Euler). *Για* $\Re z > 1$ *το απειρογινόμενο* $\prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-z})^{-1}$ *συγκλίνει και*

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - p^{-z}\right)^{-1} ,$$

όπου $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\} = \{p_1, p_2, \ldots\}$ *είναι το σύνολο των θετικών πρώτων αριθμών.*

Απόδειξη. Έστω z σταθερό με $\Re z > 1$. Επειδή η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

συγκλίνει απόλυτα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^z} \right| < \varepsilon \,.$$

Είναι

$$\zeta\,(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots \,,$$

οπότε

$$\frac{1}{2^z}\zeta\,(z) = \frac{1}{2^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{6^z} + \cdots \,,$$

και επομένως

$$\left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\zeta\,(z) = 1 + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \cdots \,.$$

Παρόμοια,

$$\left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\left(1 - \frac{1}{3^z}\right)\zeta\,(z) = 1 + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{11^z} + \cdots \,.$$

Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία που είναι γνωστή και σαν "*κόσκινο του Ερατοσθένη*" παίρνουμε

$$\left(1 - \frac{1}{(p_N)^z}\right)\left(1 - \frac{1}{(p_{N-1})^z}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\zeta(z) = 1 + \frac{1}{(p_{N+1})^z} + \cdots \,.$$

Από την επιλογή του N, για κάθε $n \geq N$ είναι

$$\left| \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(p_k)^z}\right)\zeta(z) - 1 \right| < \varepsilon$$

και αυτό αποδεικνύει τον τύπο γινομένου του Euler. □

<u>*Σημείωση*</u>. Ο τύπος γινομένου του Euler γράφεται και στη μορφή

$$\zeta\,(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_j^{-z}} \right) \,, \qquad \Re z > 1 \,,$$

όπου (p_j) είναι η αύξουσα ακολουθία των πρώτων αριθμών.

Από τον τύπο του Euler προκύπτει ότι η συνάρτηση ζ δεν έχει ρίζες για $\Re z > 1$. Για την απόδειξη του θεωρήματος των πρώτων αριθμών(ΘΠΑ) χρειάζονται μερικές ακόμη ιδιότητες της συνάρτησης ζ. Το πρώτο αποτέλεσμα είναι σχετικό με την επέκταση της ζ σε μία περιοχή μεγαλύτερη του $\Re z > 1$.

Θεώρημα Α΄.8. *Η συνάρτηση*

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1}$$

έχει μία αναλυτική επέκταση στο ημιεπίπεδο $\Re z > 0$. Επομένως η ζ έχει αναλυτική επέκταση στο $D = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\} \setminus \{1\}$ και έχει απλό πόλο στο $z = 1$ με ολοκληρωτικό υπόλοιπο ίσο με 1.

Απόδειξη. Για $\Re z > 1$ εύκολα διαπιστώνεται ότι ισχύει ο παρακάτω τύπος (το αριστερό μέλος είναι ένα *τηλεσκοπικό άθροισμα*)

$$\sum_{n=1}^{N-1} n \left[\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z} \right] = \frac{1}{N^{z-1}} - 1 - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^z} \,.$$

Επομένως,

$$1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^z} = \frac{1}{N^{z-1}} - \sum_{n=1}^{N-1} n \left[\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z} \right] . \tag{Α΄.2}$$

Όμως,

$$n \left[\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z} \right] = -nz \int_n^{n+1} t^{-z-1}\, dt = -z \int_n^{n+1} [t] t^{-z-1}\, dt \,, \tag{Α΄.3}$$

όπου $[t]$ είναι το ακέραιο μέρος του t(δηλαδή $[t]$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος $\leq t$). Τότε,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^z} &= 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^z} \\ &= \frac{1}{N^{z-1}} + z \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} [t] t^{-z-1}\, dt && \text{(λόγω των (Α΄.2) και (Α΄.3))} \\ &= \frac{1}{N^{z-1}} + z \int_1^{N} [t] t^{-z-1}\, dt \,. \end{aligned}$$

Τέλος, για $N \to \infty$ παίρνουμε τον παρακάτω τύπο για τη συνάρτηση ζ

$$\zeta(z) = z \int_1^{\infty} [t] t^{-z-1}\, dt \,, \qquad \Re z > 1 \,. \tag{Α΄.4}$$

Επειδή

$$z \int_1^{\infty} t t^{-z-1}\, dt = z \int_1^{\infty} t^{-z}\, dt = \frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1} \,,$$

χρησιμοποιώντας την (Α΄.4) έχουμε

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1} = 1 + z \int_1^{\infty} ([t] - t)\, t^{-z-1}\, dt \,, \qquad \Re z > 1 \,. \tag{Α΄.5}$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση

$$f(z) := 1 + z \int_1^{\infty} ([t] - t)\, t^{-z-1}\, dt$$

είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο $\Re z > 0$. Πράγματι, επειδή

$$\int_1^\infty \left|([t]-t)\,t^{-z-1}\right|\,dt \le \int_1^\infty t^{-1-\Re z}\,dt = \frac{1}{\Re z}$$

το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty ([t]-t)\,t^{-z-1}\,dt$ συγκλίνει απόλυτα για $\Re z > 0$. Αν εργαστούμε όπως και στην απόδειξη της αναλυτικότητας της συνάρτησης Γ, καταλήγουμε στο ότι η συνάρτηση $g\,(z) := \int_1^\infty ([t]-t)\,t^{-z-1}\,dt$ είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο $\Re z > 0$. Τότε και η συνάρτηση $f\,(z) = 1 + z\int_1^\infty ([t]-t)\,t^{-z-1}\,dt$ θα είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο $\Re z > 0$. Όμως από την (Α΄.5) έχουμε ότι

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1} = f(z)\,, \qquad \Re z > 1\,.$$

Άρα, η ζ επεκτείνεται αναλυτικά στο ημιεπίπεδο $\Re z > 0$ και αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι η συνάρτηση ζ δεν έχει ρίζες πάνω στην ευθεία $\Re z = 1$. Το γεγονός αυτό παίζει σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος των πρώτων αριθμών(ΘΠΑ).

Θεώρημα Α΄.9. *Η συνάρτηση ζ δεν έχει ρίζες πάνω στην ευθεία $\Re z = 1$. Επομένως, η συνάρτηση $f\,(z) := (z-1)\,\zeta\,(z)$ είναι αναλυτική και δεν έχει ρίζες σε μία περιοχή του $\Re z \ge 1$.*

Απόδειξη. Για σταθερό $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση

$$h\,(x) := \zeta^3(x)\zeta^4(x+iy)\zeta(x+i2y)\,, \qquad x > 1\,.$$

Επειδή ως γνωστόν

$$\operatorname{Log}\,(1-w) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{w^n}{n}\,, \qquad |w| < 1\,,$$

από τον τύπο του Euler για $\Re z > 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\ln|\zeta\,(z)| &= -\sum_{j=1}^\infty \ln\left|1-p_j^{-z}\right| \\
&= -\Re\sum_{j=1}^\infty \operatorname{Log}\left(1-p_j^{-z}\right) \\
&= \Re\sum_{j=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}p_j^{-nz}\,.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\ln|h(x)| &= 3\ln|\zeta(x)| + 4\ln|\zeta(x+iy)| + \ln|\zeta(x+i2y)| \\
&= 3\Re\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}p_j^{-nx} + 4\Re\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}p_j^{-nx-iny} + \Re\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}p_j^{-nx-i2ny} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}p_j^{-nx}\Re\left(3+4p_j^{-iny}+p_j^{-i2ny}\right).
\end{aligned}$$

Επειδή $p_j^{-iny} = \exp(-iny\ln p_j)$ και $p_j^{-i2ny} = \exp(-i2ny\ln p_j)$, το $\Re\left(3+4p_j^{-iny}+p_j^{-i2ny}\right)$ παίρνει τη μορφή

$$3+4\cos\theta+\cos 2\theta = 3+4\cos\theta+2\cos^2\theta-1 = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0\,.$$

Τότε,

$$\ln|h(x)| = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}p_j^{-nx}\Re\left(3+4p_j^{-iny}+p_j^{-i2ny}\right) \geq 0$$

και κατά συνέπεια

$$|h(x)| := \left|\zeta^3(x)\right|\left|\zeta^4(x+iy)\right||\zeta(x+i2y)| \geq 1\,.$$

Επομένως, για $x>1$ έχουμε

$$\frac{|h(x)|}{x-1} = |(x-1)\,\zeta(x)|^3\left|\frac{\zeta(x+iy)}{x-1}\right|^4|\zeta(x+i2y)| \geq \frac{1}{x-1}\,. \tag{Α΄.6}$$

Υποθέτουμε ότι $\zeta(1+iy)=0$. Τότε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^+}\frac{|h(x)|}{x-1} &= \lim_{x\to1^+}|(x-1)\,\zeta(x)|^3\left|\frac{\zeta(x+iy)}{x-1}\right|^4|\zeta(x+i2y)| \\
&= \lim_{x\to1^+}\left|\frac{\zeta(x+iy)}{x-1}\right|^4|\zeta(x+i2y)| && (\mathrm{Res}\,(\zeta,1)=1) \\
&= \left|\zeta'(1+iy)\right|^4|\zeta(1+i2y)|\,, && (\text{κανόνας L'Hôpital})
\end{aligned}$$

ενώ το δεξιό μέλος της ανισότητας (Α΄.6) τείνει στο $+\infty$ καθώς το $x\to1^+$. Άτοπο. Άρα, $\zeta(1+iy)\neq 0$. Επειδή το y είναι ένας αυθαίρετος πραγματικός αριθμός, $y\neq0$, η συνάρτηση ζ δεν έχει ρίζες πάνω στην ευθεία $\Re z=1$. □

Παρατήρηση Α΄.10. *Η έξυπνη ιδέα της εισαγωγής της βοηθητικής συνάρτησης h οφείλεται στο γερμανό μαθηματικό Franz Mertens(1898). Έχουμε αποδείξει ότι όλες οι ρίζες της συνάρτησης*

ζ στο ημιεπίπεδο $\Re z > 0$ βρίσκονται μέσα στη λωρίδα $0 < \Re z < 1$. Πολλοί μαθηματικοί έχουν ασχοληθεί με τον εντοπισμό των ριζών της συνάρτησης ζ. Ο Riemann σε μια εργασία του το 1859 ανέφερε ότι είναι "πολύ πιθανό" ότι όλες οι ρίζες της ζ στη λωρίδα $0 < \Re z < 1$ βρίσκονται πάνω στη γραμμή $\Re z = 1/2$. Αυτή είναι η περίφημη **υπόθεση του Riemann**, *ένα από τα μεγαλύτερα ανοικτά μαθηματικά προβλήματα. Ας σημειωθεί ότι το 1915 ο G. H. Hardy, βλέπε [14], απέδειξε ότι η συνάρτηση ζ έχει άπειρο το πλήθος ρίζες πάνω στη γραμμή $\Re z = 1/2$. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με αυτό το θέμα παραπέμπουμε στο [9], καθώς επίσης και στο*

http://mathworld.wolfram.com/RiemannHypothesis.html.

Βιβλιογραφία

[1] L. Ahlfors, *Complex Analysis* (3rd ed.), McGraw-Hill Science, 1979.

[2] R. P. Agarwal, K. Perera and S. Pinelas, *An Introduction to Complex Analysis*, Springer, 2011.

[3] R. B. Ash and W. P. Novinger, *Complex Variables: Second Edition*, Dover Publications, Inc., New York, 2007.

[4] J. Bak, D. J. Newman, *Complex Analysis* (3rd ed.), Springer–Verlag, 2010.

[5] R. P. Boas, H. P. Boas, *Invitation to Complex Analysis (2nd revised edition)*, Mathematical Association of America, 2010.

[6] J. W. Brown, R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications (9 edition)*, McGraw-Hill, 2013.

[7] C. Carathéodory, *Theory of Functions of a Complex Variable, Volume 1: Second Edition*, Amer. Math. Soc., 2001.

[8] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Springer–Verlag, 1978.

[9] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Dover Publications, 2001.

[10] E. Freitag, R. Busam, *Complex Analysis (Second Edition)*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.

[11] Ε. Γ. Γαλανής, *Μιγαδικές Συναρτήσεις και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1994.

[12] J. D. Gray and S. A. Morris, *When is a function that satisfies the Cauchy-Riemann equations analytic?* , Amer. Math. Monthly **85** (1978), no. 4, 246–256.

[13] R. E. Greene, S. G. Krantz, *Function Theory of One Complex Variable: Third Edition*, Amer. Math. Soc., 2006.

[14] G. H. Hardy, J. E. Littlewood *Contributions to the theory of the riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes*, Acta Math. **41** (1916), no. 1, 119–196.

[15] Howie, *Complex Analysis*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2003.

[16] T. W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1989.

[17] Δ. Χ. Κραββαρίτης, *Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 2006.

[18] A. I. Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable; Revised edition*, Amer. Math. Soc., 2005.

[19] J. E. Marsden, M. J. Hoffman, *Basic Complex Analysis (3rd Edition)*, W.H. Freeman, New York, 1999.

[20] J. E. Marsden, H. Tromba, *Vector Calculus (6th Edition)*, W.H. Freeman, New York, 2011.

[21] J. H. Mathews, R. W. Howell, *Complex Analysis for Mathematics and Engineering (6th edition)*, Jones & Bartlett, 2010.

[22] Σ. Κ. Μερκουράκης και Τ. Ε. Χατζηαφράτης, *Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2005.

[23] E. H. Moore, *A simple proof of the fundamental Cauchy-Goursat theorem*, Trans. Am. Math. Soc. **1** (1990), no. 4, 499–506.

[24] Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1993.

[25] R. Nevanlinna, V. Paatero, *Introduction to Complex Analysis: Second Edition*, Amer. Math. Soc., 2007.

[26] J. Noguchi, *Introduction to Complex Analysis*, Amer. Math. Soc., 1998.

[27] B. P. Palka, *An Introduction to Complex Function Theory*, Springer, 1991.

[28] E. Pap, *Complex Analysis through Examples and Exercises*, Springer–Verlag, New York, 1999.

[29] G. Pólya, G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis I (Reprint of the 1978 Edition)*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1998.

[30] G. Pólya, G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis II (Reprint of the 1976 Edition)*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1998.

[31] H. A. Priestley, *Introduction to Complex Analysis (2nd. ed.)*, Oxford University Press, 2003.

[32] W. Rudin, *Real and Complex Analysis (3rd. ed.)*, McGraw-Hill, 1986.

[33] W. Rudin, *Functional Analysis (2nd. ed.)*, McGraw-Hill, 1991.

[34] E.B. Saff, A.D. Snider, *Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering, Science, and Mathematics (3rd Edition)*, Prentice Hall, 2003.

[35] Γ. Σαραντόπουλος, *Μια Εισαγωγή στην Αρμονική Ανάλυση*, Ε.Μ. Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2012.

[36] B. Simon, *Basic Complex Analysis: A Comprehensive Course in Analysis, Part 2A*, Amer. Math. Soc., 2015.

[37] P. N. de Souza, J.-N. Silva, *Berkeley problems in mathematics* (3rd. ed.), Springer–Verlag, New York, 2004.

[38] E.M. Stein & R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.

[39] K. R. Stromberg, *An introduction to classical Real Analysis*, Chapman & Hall, 1981.

[40] J. L. Taylor, *Complex Variables*, Amer. Math. Soc., 2011.

[41] W. Tutschke, and H. L. Vasudeva, *An Introduction to Complex Analysis: Classical and Modern Approaches*, Chapman & Hall/CRC, 2005.

[42] R. Webster, *Convexity*, Oxford University Press Inc., New York, 1994.

[43] I. F. Wilde, *Lecture Notes in Complex Analysis*, Imperial College Press, 2006.