ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

(Μια εισαγωγή με παραδείγματα και ασκήσεις)

Γιάννης Σαραντόπουλος

Αθήνα

27 Φεβρουαρίου 2018

Περιεχόμενα

Συμβολισμός και Ορολογία

- $\mathbb{R}$- το σύνολο των πραγματικών αριθμών
- $\mathbb{R}_+$- το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών
- $\overline{\mathbb{R}}$—**το επεκταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών**. Είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ στο οποίο έχουμε προσθέσει δύο στοιχεία, το ∞ (ή $+\infty$) και το $-\infty$. Δηλαδή $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, ή , όπως συνήθως γράφεται, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.
- $\mathbb{Z}$- το σύνολο των ακεραίων
- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$-το σύνολο των φυσικών αριθμών
- $\mathbb{N}^*$- το σύνολο των θετικών ακεραίων
- $\mathbb{Q}$- το σύνολο των ρητών
- (a, b)- ανοικτό και φραγμένο διάστημα
- $[a, b]$- κλειστό και φραγμένο διάστημα
- $[a, b)$- ημιανοικτό διάστημα (κλειστό από αριστερά και ανοικτό από δεξιά)
- $(a, b]$- ημιανοικτό διάστημα (ανοικτό από αριστερά και κλειστό από δεξιά)
- Αν $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$,

  $$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)(2n) \quad \text{και} \quad (2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)\,.$$

  Είναι $0! := 1$.

- Αν το σύνολο $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, είναι άνω φραγμένο, τότε με $\sup A$ συμβολίζουμε το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Αν όμως το A δεν είναι άνω φραγμένο, τότε $\sup A = +\infty$.

- Αν το σύνολο $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, είναι κάτω φραγμένο, τότε με $\inf A$ συμβολίζουμε το μέγιστο κάτω φράγμα του A. Αν όμως το A δεν είναι κάτω φραγμένο, τότε $\inf A = -\infty$.

- Η ακολουθία (a_n) πραγματικών αριθμών λέγεται **αύξουσα** (**φθίνουσα**) αν $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ($a_{n+1} \leq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

- Αν (a_n) είναι μία ακολουθία και $k_1 < k_2 < \cdots < k_n \cdots$ είναι μία γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, τότε η ακολουθία (a_{k_n}) λέγεται **υπακολουθία** της ακολουθίας (a_n).

- Το $c \in \mathbb{R}$ είναι ένα **οριακό σημείο** της ακολουθίας (a_n) αν υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = c$.

- Έστω S είναι το σύνολο των οριακών σημείων της ακολουθίας (a_n). Το **κατώτερο όριο**, $\underline{\lim}\, a_n$ και το **ανώτερο όριο**, $\overline{\lim}\, a_n$, της ακολουθίας (a_n) ορίζονται ως εξής

$$\underline{\lim}\, a_n = \begin{cases} -\infty & \text{αν η } (a_n) \text{ δεν είναι κάτω φραγμένη },\\ +\infty & \text{αν η } (a_n) \text{ είναι κάτω φραγμένη και } S = \emptyset \text{ },\\ \inf S & \text{αν η } (a_n) \text{ είναι κάτω φραγμένη και } S \neq \emptyset \text{ }, \end{cases}$$

$$\overline{\lim}\, a_n = \begin{cases} +\infty & \text{αν η } (a_n) \text{ δεν είναι άνω φραγμένη },\\ -\infty & \text{αν η } (a_n) \text{ είναι άνω φραγμένη και } S = \emptyset \text{ },\\ \sup S & \text{αν η } (a_n) \text{ είναι άνω φραγμένη και } S \neq \emptyset \text{ }. \end{cases}$$

- Το **ακέραιο μέρος** του $x \in \mathbb{R}$, συμβολίζεται με $[x]$, είναι ο μοναδικός ακέραιος $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $k \leq x < k+1$.

- Το ανοικτό διάστημα $V_x(\varepsilon) := (x-\varepsilon,\, x+\varepsilon)$, όπου $\varepsilon > 0$, λέγεται **περιοχή** με κέντρο το $x \in \mathbb{R}$ και ακτίνα ε. Κάθε διάστημα της μορφής $(\varepsilon, +\infty)$ (αντίστοιχα $(-\infty, -\varepsilon)$) είναι μια περιοχή του $+\infty$ (αντίστοιχα του $-\infty$).

Αν το A είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε

- το $x \in A$ είναι **εσωτερικό σημείο** του A, αν υπάρχει περιοχή V_x του x τέτοια ώστε $V_x \subseteq \mathbb{R}$,

- το $x \in A$ λέγεται **οριακό σημείο ή σημείο συσσώρευσης (**$\sigma.\sigma$**)** του A, αν για κάθε περιοχή V_x του x υπάρχει στοιχείο $a \in A$, $a \neq x$, τέτοιο ώστε $a \in V_x$,

- το $x \in A$ είναι **μεμονωμένο σημείο** του A αν δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A.

- Η συνάρτηση f ορισμένη στο $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, είναι **άνω φραγμένη** (αντίστοιχα **κάτω φραγμένη**), αν το σύνολο $f\left(A\right)$ είναι άνω φραγμένο (αντίστοιχα κάτω φραγμένο). Η f είναι **φραγμένη** στο A αν το σύνολο $f\left(A\right)$ είναι φραγμένο.

- Η συνάρτηση f ορισμένη στο $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, είναι **άρτια** (αντίστοιχα **περιττή**), όταν για κάθε $x \in A$ το $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$ (αντίστοιχα $f(-x) = -f(x)$).

- Η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα I είναι **αύξουσα** (αντίστοιχα **φθίνουσα**), αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$, με $x_1 < x_2$, είναι $f(x_1) \leq f(x_2)$ (αντίστοιχα $f(x_1) \geq f(x_2)$. Η συνάρτηση f είναι **γνήσια αύξουσα** (αντίστοιχα **γνήσια φθίνουσα**) στο διάστημα I , αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$, με $x_1 < x_2$, είναι $f(x_1) < f(x_2)$ (αντίστοιχα $f(x_1) > f(x_2)$.

- $f^{(n)}$-η n-οστή παράγωγος μιας συνάρτησης f.

Οι πραγματικές συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες σε μια περιοχή του $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Αν $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός
$$f(x) = o\left(g(x)\right) \quad (x \to x_0)\ .$$

- Αν το πηλίκο $f(x)/g(x)$ είναι φραγμένο σε μια περιοχή του $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός
$$f(x) = O\left(g(x)\right) \quad (x \to x_0)\ .$$

- Αν $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός
$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0)\ .$$

Αν το A είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και κάθε σημείο του A είναι σημείο συσσώρευσης, τότε

- $C\left(A\right)$–είναι το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων στο A,
- $C^{n}\left(A\right)$–είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι n-φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο A,
- $C^{\infty}\left(A\right)$–είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες στο A.

Κεφάλαιο 1

Όρια πραγματικών συναρτήσεων

1.1 Το όριο συνάρτησης

Ορισμός 1.1. *Έστω E ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

1. *Το $x \in E$ είναι* **εσωτερικό σημείο** *του E αν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $(x-\delta, x+\delta) \subseteq E$.*

2. *Το $x \in E$ είναι* **μεμονωμένο σημείο** *του E αν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε*

$$(x-\delta, x+\delta) \cap E = \{x\} .$$

3. *Το $x \in \mathbb{R}$ είναι* **σημείο συσσώρευσης***(σ.σ) του E, αν για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $(x-\delta, x+\delta) \cap E$ περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του E διαφορετικό από το x. Ισοδύναμα, για κάθε περιοχή $(x-\delta, x+\delta)$, $\delta > 0$, του x*

$$(x-\delta, x+\delta) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset .$$

4. *Το σύνολο E είναι* **ανοικτό** *αν όλα τα σημεία του είναι εσωτερικά σημεία.*

5. *Το σύνολο E είναι* **κλειστό** *αν το συμπλήρωμά του $\mathbb{R} \setminus E$ είναι ανοικτό.*

Παραδείγματα 1.2. *(i) Έστω $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακέραιων αριθμών. Το $\mathbb{Z}$ είναι κλειστό σύνολο και κάθε ακέραιος αριθμός είναι μεμονωμένο σημείο του $\mathbb{Z}$. Το $\mathbb{Z}$ δεν έχει σημεία συσσώρευσης.*

(ii) Έστω $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών. Επειδή το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, κάθε πραγματικός αριθμός είναι σ.σ του $\mathbb{Q}$. Πράγματι, σε κάθε περιοχή $(x-\delta, x+\delta)$, $\delta > 0$ του $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ρητός αριθμός $\rho \neq x$. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ δεν έχει εσωτερικά σημεία.

(iii) *Έστω το σύνολο $E := \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$. Τα σημεία του E είναι μεμονωμένα. Το μοναδικό σ.σ του E είναι το 0. Πράγματι, έστω $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, περιοχή του μηδενός. Τότε, για αρκετά μεγάλο $n \in \mathbb{N}^*$ είναι $1/n < \delta$. Επομένως το $1/n \in ((-\delta, \delta) \setminus \{0\}) \cap E$.*

Πρόταση 1.3. *Ένα σύνολο $F \subseteq \mathbb{R}$ είναι κλειστό αν και μόνο αν τα σημεία συσσώρευσης του F ανήκουν στο F.*

Απόδειξη. Έστω το F είναι κλειστό. Τότε το $\mathbb{R} \setminus F$ είναι ανοικτό σύνολο. Αν $x \in \mathbb{R} \setminus F$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$(x - \varepsilon,\, x + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus F \ \text{ οπότε } \ (x - \varepsilon,\, x + \varepsilon) \cap F = \emptyset\,.$$

Επομένως το x δεν είναι σημείο συσσώρευσης του F και κατά συνέπεια όλα τα σημεία συσσώρευσης του F ανήκουν στο F.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι όλα τα σημεία συσσώρευσης του F ανήκουν στο F. Αν $x \in \mathbb{R} \setminus F$, τότε το x δεν είναι *σ.σ* του F και $x \notin F$. Επομένως υπάρχει $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε

$$(x - \varepsilon,\, x + \varepsilon) \cap F = \emptyset\,, \text{ δηλαδή } \ (x - \varepsilon,\, x + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus F\,.$$

Άρα το $\mathbb{R} \setminus F$ είναι ανοικτό σύνολο και αυτό συνεπάγεται ότι το F θα είναι κλειστό σύνολο. □

Πρόταση 1.4. *Έστω E υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(α΄) *το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του E,*

(β΄) *το σύνολο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$ είναι άπειρο για κάθε $\delta > 0$, και*

(γ΄) *υπάρχει ακολουθία (x_n) σημείων του E και μάλιστα με όρους διάφορους ανά δύο με $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τέτοια ώστε*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0\,.$$

Απόδειξη. (α΄) ⇒ (β΄). Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\delta > 0$ η περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ του x_0 περιέχει πεπερασμένο το πλήθος σημεία του E. Τότε και το σύνολο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E \setminus \{x_0\}$

είναι πεπερασμένο. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ τα στοιχεία του $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E \setminus \{x_0\}$. Αν

$$r := \min\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|, \dots, |x_n - x_0|\} ,$$

τότε $0 < r < \delta$ και η περιοχή $(x_0 - r, x_0 + r)$ του x_0 δεν περιέχει κανένα στοιχείο του E διάφορο του x_0. Άτοπο, επειδή από την υπόθεση το x_0 είναι $\sigma.\sigma$ του E. Άρα κάθε περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, του x_0 περιέχει άπειρα το πλήθος σημεία του E.

(β′) ⇒ (γ′). Από τη (β′) το σύνολο $(x_0 - 1, x_0 + 1) \cap E$ είναι άπειρο και άρα υπάρχει $x_1 \in E$ με $x_1 \neq x_0$ και $|x_1 - x_0| < 1$. Υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί $x_1, x_2, \dots, x_n \in E \setminus \{x_0\}$

$$\text{ώστε } x_i \neq x_j \text{ για } i, j = 1, 2, \dots, n \,,\ i \neq j \ \text{ και } |x_i - x_0| < \frac{1}{i} \ \text{ για } i = 1, 2, \dots, n \,.$$

Από τη (β′) το σύνολο $\left(x_0 - \frac{1}{n+1},\ x_0 + \frac{1}{n+1}\right) \cap E$ είναι άπειρο και άρα υπάρχει $x_{n+1} \in E$ ώστε $|x_{n+1} - x_0| < \frac{1}{n+1}$ με $x_{n+1} \neq x_0$ και $x_{n+1} \neq x_i$ για $i = 1, 2, \dots, n$.

Επαγωγικά ορίζουμε μ' αυτό τον τρόπο μια ακολουθία (x_n) στοιχείων του E με όρους διάφορους ανά δύο ώστε

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \,, \quad \text{για } n = 1, 2, \dots .$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

(γ′) ⇒ (α′). Έστω $\delta > 0$. Από τη (γ′) υπάρχει ακολουθία στοιχίων του E με $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ ώστε $0 < |x_n - x_0| < \delta$ για κάθε $n \geq N$. Άρα $x_N \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E \setminus \{x_0\}$.

□

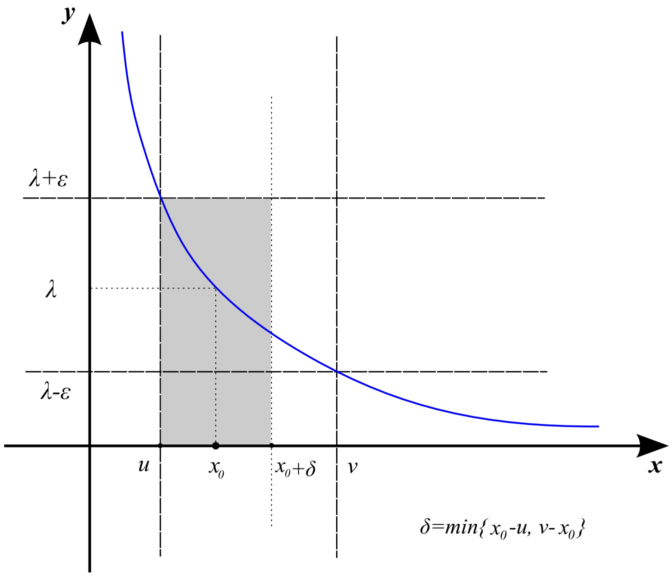
Η ιδέα στην οποία βασίζεται η έννοια του ορίου μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 είναι να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα σημεία που είναι πολύ κοντά στο x_0, αλλά είναι διάφορα του x_0.

Ορισμός 1.5. *Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω x_0 σ.σ του D. Θα λέμε ότι* **η συνάρτηση f έχει όριο το λ (ή ότι η f τείνει στο λ) καθώς το x τείνει στο** x_0*, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει*

$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon \,.$$

Γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \quad \text{ή} \ \ f(x) \to \lambda \ \text{ καθώς το } x \to x_0 \,.$$



Σχήμα 1.1: Η $V_\lambda(\varepsilon) = (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ είναι μια περιοχή του λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, με $\lambda + \varepsilon = f(u)$ και $\lambda - \varepsilon = f(v)$. Αν $\delta = \min\{x_0 - u, v - x_0\} = x_0 - u$, τότε $V_{x_0}(\delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = (u, x_0 + \delta) \subset (u, v)$. Όπως φαίνεται στο σχήμα, για κάθε $x \in V_{x_0}(\delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ το $y = f(x) \in V_\lambda(\varepsilon) = (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$. Επομένως $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$.

Ισοδύναμα, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$ αν για κάθε περιοχή $V_\lambda(\varepsilon) = (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ του λ υπάρχει περιοχή $V_{x_0}(\delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ του x_0, τέτοια ώστε

$$\text{για κάθε } x \in V_{x_0}(\delta) \cap D \setminus \{x_0\} \Rightarrow \; f(x) \in V_\lambda(\varepsilon)\,.$$

Παρατηρήσεις 1.6.

1. *Στον ορισμό του ορίου, για κάθε $\varepsilon > 0$ το δ μπορεί να εξαρτάται όχι μόνο από το ε και τη συνάρτηση, αλλά και από το σημείο x_0.*

2. *Αν το x_0 δεν είναι σ.σ του D, τότε για δ αρκετά μικρό δεν υπάρχει $x \in D$ έτσι ώστε $0 < |x - x_0| < \delta$. Επομένως αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του D, ο ορισμός του ορίου της συνάρτησης στο x_0 δεν έχει έννοια.*

3. *Στον ορισμό του ορίου δεν απαιτείται το x_0 να ανήκει στο D, αρκεί το x_0 να είναι σ.σ του D. Ακόμη και αν το $x_0 \in D$ και η f έχει όριο στο x_0, είναι δυνατόν να έχουμε*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)\,.$$

Αυτό συμβαίνει στο παράδειγμα 1.7(α΄) που θα αναφέρουμε παρακάτω.

4. *Έστω* $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ *και έστω* x_0 *σ.σ του* D. *Για να δείξουμε ότι* **η συνάρτηση** $f : D \to \mathbb{R}$ **δεν έχει όριο στο** x_0, *πρέπει να δείξουμε ότι:*

   για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ **υπάρχει** $\varepsilon > 0$**, τέτοιο ώστε για κάθε** $\delta > 0$ **υπάρχει** $x \in D$ **με** $0 < |x - x_0| < \delta$**, για το οποίο ισχύει**

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\,.$$

Παραδείγματα 1.7. *(α')* *Έστω η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{αν } x \neq 2 \\ 2 & \text{αν } x = 2\,. \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$. *Για* $x \neq 2$,

$$|f(x) - 4| = \left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| = \left|\frac{x^2-4x+4}{x-2}\right| = |x-2|\,.$$

Για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ *επιλέγουμε το* $\delta = \varepsilon$. *Τότε για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *με* $0 < |x-2| < \delta$ *έχουμε* $|f(x) - 4| < \varepsilon$ *και επομένως* $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \neq f(2)$.

(β') *Έστω* $D = (-1, 0) \cup (0, \infty)$. *Ορίζουμε τη συνάρτηση* $g : D \to \mathbb{R}$ *με*

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}\,.$$

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 0} g(x) = 1/2$. *Παρατηρούμε ότι το* 0 *είναι σ.σ του* D. *Για* $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \left|g(x) - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} - \frac{1}{2}\right| \\ &= \frac{|2\sqrt{x+1} - (2+x)|}{2|x|} \\ &= \frac{|(2\sqrt{x+1})^2 - (2+x)^2|}{2|x||2\sqrt{x+1} + (2+x)|} \\ &= \frac{x^2}{2|x|(2\sqrt{x+1} + 2 + x)} \\ &< \frac{|x|}{2}\,. \qquad (x > -1 \Rightarrow 2\sqrt{x+1} + 2 + x > 1) \end{aligned}$$

Για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ *επιλέγουμε το* $\delta = \varepsilon$. *Τότε, για κάθε* $x \in D$ *με* $0 < |x| < \delta$,

$$\left|g(x) - \frac{1}{2}\right| < \frac{|x|}{2} < \frac{\delta}{2} < \varepsilon$$

και επομένως $\lim_{x\to 0} g(x) = 1/2$.

(γ') *Έστω* $D = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$. *Ορίζουμε τη συνάρτηση* $h : D \to \mathbb{R}$ *με*

$$h(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2}\,.$$

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 1} h(x) = -3$. *Για κάθε* $x \in D$,

$$\begin{aligned} |h(x)+3| &= \left|\frac{x^2+2x}{x^2-2} + 3\right| \\ &= \frac{|4x^2+2x-6|}{|x^2-2|} \\ &= 2\frac{|2x+3|}{|x^2-2|}|x-1|\,. \end{aligned}$$

Παίρνουμε $|x-1| < 1/4 \Leftrightarrow 3/4 < x < 5/4$. *Για* x *σ' αυτό το διάστημα έχουμε*

$$|2x+3| < 2\cdot\frac{5}{4} + 3 = \frac{11}{2} \quad \textit{και} \quad |x^2-2| = 2 - x^2 > 2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}\,.$$

Επομένως,

$$|h(x)+3| < 2\frac{\frac{11}{2}}{\frac{7}{16}}|x-1| = \tfrac{176}{7}|x-1|\,.$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ *επιλέγουμε*

$$\delta(\varepsilon) := \min\left\{\tfrac{1}{4},\ \tfrac{7}{176}\varepsilon\right\}\,.$$

Τότε,

$$\textit{για κάθε } x \in D \textit{ με } 0 < |x-1| < \delta(\varepsilon) \textit{ είναι } |h(x)+3| < \tfrac{176}{7}|x-1| < \varepsilon$$

και κατά συνέπεια $\lim_{x\to 1} h(x) = -3$.

(δ) *Θεωρούμε τη συνάρτηση Dirichlet* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{αν } x \textit{ ρητός} \\ 0 & \textit{αν } x \textit{ άρρητος.} \end{cases}$$

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *δεν υπάρχει για κάθε* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Έστω* $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 *σταθερό. Υποθέτουμε ότι το όριο* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda$ *υπάρχει. Τότε, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *με* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, *είναι*

$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon\,.$$

– *Αν το* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, *είναι* **ρητός** *αριθμός, από τον ορισμό της συνάρτησης* f *έχουμε ότι*

$$|1 - \lambda| < \varepsilon .$$

– *Αν το* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, *είναι* **άρρητος** *αριθμός, από τον ορισμό της συνάρτησης* f *έπεται ότι*

$$|\lambda| < \varepsilon .$$

Επομένως

$$1 = |(1 - \lambda) + \lambda| \leq |1 - \lambda| + |\lambda| < 2\varepsilon$$

και καταλήγουμε σε άτοπο στην περίπτωση που είναι $0 < \varepsilon < 1/2$. *Άρα το όριο* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *δεν υπάρχει για κανένα* $x_0 \in \mathbb{R}$.

1.2 Ιδιότητες των ορίων

Ορισμός 1.8. *Έστω η συνάρτηση* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ *και έστω* $x_0 \in \mathbb{R}$ *σ.σ του* D. *Λέμε ότι η συνάρτηση* f **είναι φραγμένη σε μια περιοχή του** x_0, *αν υπάρχει περιοχή* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, *του* x_0 *και* $M > 0$ *τέτοια ώστε* $|f(x)| \leq M$ *για κάθε* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$.

Πρόταση 1.9. *Έστω η συνάρτηση* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ *και έστω* $x_0 \in \mathbb{R}$ *σ.σ του* D. *Αν* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, *τότε η* f *είναι φραγμένη σε μια περιοχή του* x_0.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon = 1$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $0 < |x - x_0| < \delta$ και $x \in D$ έχουμε $|f(x) - \lambda| < 1$. Επειδή $|f(x)| - |\lambda| \leq |f(x) - \lambda| < 1$ είναι $|f(x)| < |\lambda| + 1$. Επομένως

$$\text{αν } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ και } x \in D, \text{ τότε } |f(x)| < |\lambda| + 1 .$$

Αν $x_0 \notin D$, παίρνουμε

$$M = |\lambda| + 1 ,$$

ενώ αν $x_0 \in D$, παίρνουμε

$$M = \max\{|f(x_0)|, |\lambda| + 1\} .$$

Σε κάθε περίπτωση, αν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$, τότε $|f(x)| < M$. Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι φραγμένη στην περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ του x_0. $\square$

Πρόταση 1.10. *Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ σ.σ του D. Αν*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda > 0 \quad \left(\text{αντίστοιχα, } \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda < 0\right),$$

τότε υπάρχει περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, του x_0 τέτοια ώστε $f(x) > 0$(αντίστοιχα, $f(x) < 0$) για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$, $x \neq x_0$.

Απόδειξη. (i) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda > 0$, παίρνουμε $\varepsilon = \frac{\lambda}{2} > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $0 < |x - x_0| < \delta$ και $x \in D$ έχουμε $|f(x) - \lambda| < \frac{\lambda}{2}$. Επειδή $\lambda - f(x) \leq |f(x) - \lambda| < \frac{\lambda}{2}$ είναι $f(x) > \frac{\lambda}{2}$. Επομένως

$$\text{αν } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D,\ x \neq x_0, \text{ τότε } f(x) > \frac{\lambda}{2} > 0\,.$$

(ii) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda < 0$, τότε $\lim_{x \to x_0}(-f(x)) = -\lambda > 0$ και από την προηγούμενη περίπτωση

$$\text{αν } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D,\ x \neq x_0, \text{ τότε } -f(x) > -\frac{\lambda}{2} > 0 \Leftrightarrow f(x) < \frac{\lambda}{2} < 0\,.$$

$\square$

Όρια συναρτήσεων και ακολουθίες - Θεώρημα μεταφοράς

Υπάρχει μία σημαντική σχέση που συνδέει τα όρια συναρτήσεων και τα όρια ακολουθιών. Αυτό το αποτέλεσμα είναι χρήσιμο σε πολλές περιπτώσεις επειδή συχνά είναι πιο εύκολο να εργαστούμε με ακολουθίες παρά με συναρτήσεις. Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, με x_0 *σ.σ* του D. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο το λ στο x_0. Έστω η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x_0 με $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή η f έχει όριο το λ στο x_0, καθώς οι όροι της ακολουθίας πλησιάζουν το x_0, οι αντίστοιχες τιμές της f πρέπει να πλησιάζουν το λ. Πράγματι, η ακολουθία $f(x_n)$ συγκλίνει στο λ. Το αντίστροφο επίσης ισχύει.

Θεώρημα 1.11 (Θεώρημα μεταφοράς). *Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω x_0 σ.σ του D. Τότε*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lambda$$

για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του D, με $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Παρατήρηση. Επειδή το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του D, από την Πρόταση 1.4 υπάρχει ακολουθία (x_n) σημείων του D με $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $x_n \to x_0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$. Έστω (x_n) ακολουθία σημείων του D με $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $x_n \to x_0$. Παίρνουμε $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ με } x \in D\,, \ \text{ τότε } |f(x) - \lambda)| < \varepsilon\,. \tag{1.1}$$

Επειδή $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, για το παραπάνω $\delta > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε

$$0 < |x_n - x_0| < \delta \quad \text{για κάθε } n \geq N\,.$$

Επομένως για κάθε $n \geq N$ από την (1.1) έπεται ότι $|f(x_n) - f(\lambda)| < \varepsilon$. Άρα $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lambda$.
Αντίστροφα, έστω $f(x_n) \to \lambda$ για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του D με $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $x_n \to x_0$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \lambda$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$

$$\text{υπάρχει } x \in D \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \ \text{ και } \ |f(x) - \lambda)| \geq \varepsilon\,.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, παίρνουμε το $\delta = 1/n$. Τότε για κάθε n

$$\text{υπάρχει } x_n \in D \text{ με } 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \ \text{ και } \ |f(x_n) - \lambda)| \geq \varepsilon\,.$$

Επομένως $x_n \to x_0$, ενώ η ακολουθία $(f(x_n))$ δεν συγκλίνει στο λ που είναι άτοπο. Άρα $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$. □

Κριτήρια απόκλισης

Πολλές φορές χρειάζεται να αποδείξουμε ότι ένας πραγματικός αριθμός δεν είναι το όριο κάποιας συνάρτησης σ' ένα σημείο ή ότι η συνάρτηση δεν έχει όριο σ' ένα σημείο. Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι συνέπεια του θεωρήματος μεταφοράς.

Κριτήρια απόκλισης 1.12. *Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω x_0 σ.σ του D.*

(α') *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε η f δεν έχει όριο το λ στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) σημείων του D με $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ τέτοια ώστε $x_n \to x_0$ ενώ η ακολουθία $(f(x_n))$ δεν συγκλίνει στο λ.*

(β') *Η f δεν έχει όριο στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) σημείων του D με $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ τέτοια ώστε $x_n \to x_0$ ενώ η ακολουθία $(f(x_n))$ δεν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.*

(γ') *Αν υπάρχουν ακολουθίες (x_n), (y_n) σημείων του D με $x_n \neq x_0$ και $y_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τέτοιες ώστε $x_n, y_n \to x_0$ ενώ*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)\,,$$

τότε η f δεν έχει όριο στο x_0.

Παράδειγμα 1.13. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$;*

Λύση. Θεωρούμε τις ακολουθίες (x_n) και (y_n) με

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \;\text{ και }\; y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Τότε $x_n, y_n \to 0$ καθώς το $n \to \infty$. Επειδή $f(x_n) = \cos(2n\pi) = 1$ και $f(y_n) = \cos(2n\pi+\pi) = -1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_n) \to 1$ και $f(y_n) \to -1$ καθώς το $n \to \infty$. Επομένως από το προηγούμενο κριτήριο το $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχει. ∎

Θεώρημα 1.14 (Κριτήριο Cauchy για την ύπαρξη ορίου). *Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω x_0 σ.σ του D. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η f έχει όριο στο x_0.*

(ii) *Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\text{για } 0 < |x - x_0| < \delta,\ 0 < |y - x_0| < \delta \text{ και } x, y \in D \text{ να ισχύει } |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

Απόδειξη. $\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$: Έστω $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - \lambda)| < \varepsilon/2$. Επομένως, για κάθε $x, y \in D$ με $0 < |x - x_0| < \delta$, $0 < |y - x_0| < \delta$, έχουμε

$$|f(x) - f(y)| = |(f(x) - \lambda) - (f(y) - \lambda)| \leq |f(x) - \lambda| + |f(y) - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

$\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$: Από την υπόθεση, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{για } 0 < |x - x_0| < \delta,\ 0 < |y - x_0| < \delta \text{ και } x, y \in D \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

Έστω (x_n) ακολουθία σημείων του D με $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to x_0$ καθώς το $n \to \infty$ (επειδή το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του D, η ύπαρξη τέτοιας ακολουθίας προκύπτει από την Πρόταση 1.4). Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ είναι $|x_n - x_0| < \delta$. Επομένως,

$$\text{για κάθε } n, m \geq N \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon\,.$$

Δηλαδή η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy και κατά συνέπεια συγκλίνει, έστω $f(x_n) \to \lambda \in \mathbb{R}$ καθώς το $n \to \infty$. Άρα, από το Θεώρημα 1.11 έπεται ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda$. □

Στη συνέχεια θα δώσουμε τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων συναρτήσεων. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f + g : D \to \mathbb{R}$ με $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ για κάθε $x \in D$. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, ορίζουμε τη συνάρτηση $\alpha f : D \to \mathbb{R}$ με $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. Παρόμοια, ορίζουμε $fg : D \to \mathbb{R}$ με $(fg)(x) = f(x) + g(x)$. Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in D$, ορίζουμε τη συνάρτηση πηλίκο

$$\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R} \quad \text{με } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.11 μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες για τα όρια συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ιδιότητες για τα όρια ακολουθιών.

Θεώρημα 1.15. *Έστω οι συναρτήσεις $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω x_0 σ.σ του D. Αν* *υπάρχουν τα όρια* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \mu$ *και είναι πεπερασμένα, τότε:*

$$(i) \quad \lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lambda + \mu \,.$$

$$(ii) \quad \lim_{x\to x_0} (\alpha f(x)) = \alpha\lambda \,, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R} \,.$$

$$(iii) \quad \lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \lambda\mu \,.$$

$$(iv) \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lambda}{\mu} \,, \quad \text{αν } \mu \neq 0 \,.$$

$$(v) \quad \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\lambda| \,.$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο την (iv), η απόδειξη των υπόλοιπων ιδιοτήτων είναι παρόμοια. Έστω (x_n) ακολουθία σημείων του D, με $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και η οποία συγκλίνει στο x_0. Από το Θεώρημα 1.11 η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο λ ενώ η ακολουθία $(g(x_n))$ συγκλίνει στο μ. Επειδή $\mu \neq 0$, από γνωστή ιδιότητα των ακολουθιών η ακολουθία $(f(x_n)/g(x_n))$ θα συγκλίνει στο λ/μ. Επομένως και πάλι από το Θεώρημα 1.11 η συνάρτηση $f/g \to \lambda/\mu$ καθώς το $x \to x_0$. □

Με τη χρήση του θεωρήματος μεταφοράς μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε και τις παρακάτω ιδιότητες για τα όρια συναρτήσεων. Θεωρούμε γνωστές τις αντίστοιχες ιδιότητες για τα όρια ακολουθιών.

Θεώρημα 1.16. *Έστω οι συναρτήσεις* $f, g, h : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ *και έστω* x_0 *σ.σ του* D.

(α΄) Αν $|g(x)| \leq M$ *για κάθε* $x \in D$ *και* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, *τότε*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0 \,.$$

(β΄) Υποθέτουμε ότι $f(x) \leq g(x)$ *για κάθε* $x \in D$. *Αν τα όρια* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *και* $\lim_{x\to x_0} g(x)$ *υπάρχουν, τότε*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x) \,.$$

(γ́) Αν $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in D$ και $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \lambda$, τότε το όριο της h υπάρχει καθώς το $x \to x_0$ και είναι

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lambda\,.$$

Πλευρικά όρια

Ορισμός 1.17. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$.*

1. *Το $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι από* **δεξιά σημείο συσσώρευσης (***σ.σ***)** *του E, αν για κάθε $\delta > 0$*

$$(x_0, x_0 + \delta) \cap E \neq \emptyset\,.$$

2. *Το $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι από* **αριστερά σημείο συσσώρευσης (***σ.σ***)** *του E, αν για κάθε $\delta > 0$*

$$(x_0 - \delta, x_0) \cap E \neq \emptyset\,.$$

Δηλαδή στην περίπτωση που το x_0 είναι από δεξιά (αντ. από αριστερά) σ.σ του E, τότε υπάρχει $x \in E$ τέτοιο ώστε

$$x_0 < x < x_0 + \delta \text{ (αντ. } x_0 - \delta < x < x_0\text{)}\,.$$

Αν το x_0 είναι από δεξιά και από αριστερά $\sigma.\sigma$ του E, τότε το x_0 είναι $\sigma.\sigma$ του E.

Ορισμός 1.18. *Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$.*

(i) Υποθέτουμε ότι το $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι από δεξιά σ.σ του D. Θα λέμε ότι **η συνάρτηση f έχει όριο από δεξιά το $\lambda \in \mathbb{R}$ καθώς το x τείνει στο x_0**, *αν*

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in D$ με $x_0 < x < x_0 + \delta$ να ισχύει

$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon\,.$$

Γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lambda \quad \text{ή} \;\; f(x) \to \lambda \text{ καθώς το } x \to x_0^+\,.$$

Το λ συμβολίζεται με $f(x_0+)$ ή $f(x_0 + 0)$.

(ii) *Υποθέτουμε ότι το* $x_0 \in \mathbb{R}$ *είναι από αριστερά σ.σ του* D. *Θα λέμε ότι* **η συνάρτηση** f **έχει όριο από αριστερά το** $\lambda \in \mathbb{R}$ **καθώς το** x **τείνει στο** x_0, *αν*

για κάθε $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x \in D$ *με* $x_0 - \delta < x < x_0$ *να ισχύει*

$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon\,.$$

Γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lambda \quad \text{ή} \quad f(x) \to \lambda \ \text{καθώς το}\ x \to x_0^-\,.$$

Το λ *συμβολίζεται με* $f(x_0-)$ *ή* $f(x_0 - 0)$.

Θεώρημα 1.19. *Έστω η συνάρτηση* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ *και έστω* $x_0 \in \mathbb{R}$ *από αριστερά και από δεξιά σ.σ του* D. *Τότε* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ *αν και μόνο αν*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lambda = \lim_{x \to x_0^+} f(x)\,.$$

Απόδειξη. Επειδή το x_0 είναι από δεξιά και από αριστερά σ.σ του D, το x_0 είναι σ.σ του D. Έστω $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in D$ με $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, ισχύει

$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon\,.$$

Ειδικά για κάθε $x \in D$ με $x_0 - \delta < x < x_0$ είναι $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$ και για κάθε $x \in D$ με $x_0 < x < x_0 + \delta$ έχουμε $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$. Άρα,

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lambda = \lim_{x \to x_0^+} f(x)\,.$$

Αντίστροφα, έστω $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lambda = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ τέτοια ώστε

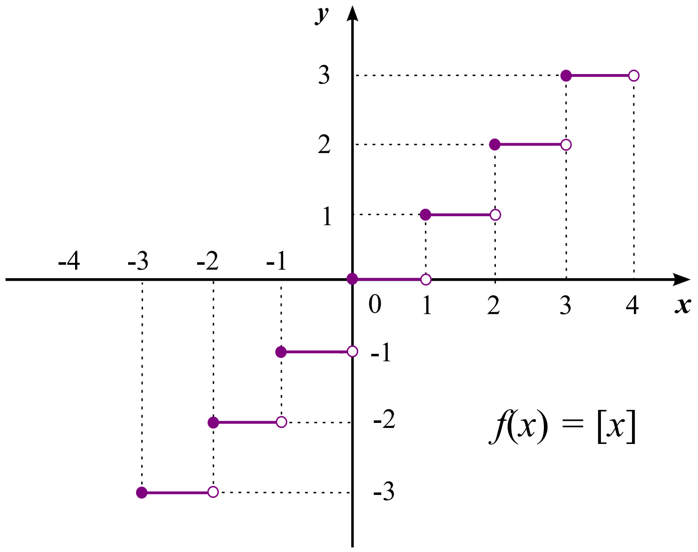
$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon \qquad \text{αν } x \in D \text{ με } x_0 - \delta_1 < x < x_0\,,$$
$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon \qquad \text{αν } x \in D \text{ με } x_0 < x < x_0 + \delta_2\,.$$

Έστω $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Τότε $\delta > 0$ και

$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon \qquad \text{αν } x \in D \text{ με } x_0 - \delta < x < x_0\,,$$
$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon \qquad \text{αν } x \in D \text{ με } x_0 < x < x_0 + \delta\,.$$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in D$ με $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, ισχύει $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$. Άρα $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$. □

Παραδείγματα 1.20. *1. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = [x]$, όπου $[x]$ το ακέραιο μέρος του x.*



Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = n - 1 \quad \textit{και} \quad \lim_{x \to n^+} f(x) = n\,.$$

Αν το x_0 δεν είναι ακέραιος αριθμός, τότε

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)\,.$$

2. Έστω η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = x \left[\frac{1}{x}\right]\,.$$

Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε

$$\left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1\,.$$

Επομένως,

$$1 - x < x \left[\frac{1}{x}\right] \leq 1\,, \quad \textit{αν } x > 0$$

και

$$1 \le x \left[\frac{1}{x}\right] < 1 - x\,, \quad \text{αν } x < 0\,.$$

Άρα, από το Θεώρημα 1.16 (γ΄) έπεται ότι

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1\,.$$

Παραλείπουμε την απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος που είναι ανάλογο του Θεωρήματος 1.11.

Θεώρημα 1.21 (Θεώρημα μεταφοράς). *Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$.*

(α΄) Αν το x_0 είναι από δεξιά σ.σ του D, τότε

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lambda \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda$$

για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του D, με $x_n > x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

(β΄) Αν το x_0 είναι από αριστερά σ.σ του D, τότε

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lambda \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda$$

για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του D, με $x_n < x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Παράδειγμα 1.22. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(ax)}{x} = 0\,, \quad 0 < a < 1\,.$$

Τότε $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(ax)}{x} = 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left|\frac{f(x) - f(ax)}{x}\right| < (1-a)\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow |f(x) - f(ax)| < (1-a)\frac{\varepsilon}{2}x\,, \quad \text{για κάθε } x \in (0,\delta)\,.$$

Αν $x \in (0,\delta)$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ το $a^n x \in (0,\delta)$ και κατά συνέπεια

$$|f(a^{n-1}x) - f(a^n x)| < (1-a)\frac{\varepsilon}{2}a^{n-1}x\,, \quad \text{για κάθε } x \in (0,\delta)\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}|f(x)-f(a^nx)| &= |(f(x)-f(ax))+(f(ax)-f(a^2x))+\cdots+(f(a^{n-1}x)-f(a^nx))|\\ &\le |f(x)-f(ax)|+|f(ax)-f(a^2x)|+\cdots+|f(a^{n-1}x)-f(a^nx)|\\ &< (1-a)\frac{\varepsilon}{2}x(1+a+\cdots+a^{n-1})\\ &= (1-a)\frac{\varepsilon}{2}x\frac{1-a^n}{1-a} < \frac{\varepsilon}{2}x\,, \quad \text{για κάθε } x\in(0,\delta)\,.\end{aligned}$$

Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

$$|f(x)-f(a^nx)| < \frac{\varepsilon}{2}x\,, \quad \text{για κάθε } x\in(0,\delta)\,.$$

Για κάθε $x \in (0,\delta)$, η (a^nx), $0 < a < 1$, είναι ακολουθία σημείων του διαστήματος $(0,\delta)$ με $\lim_{n\to\infty} a^nx = 0$. Επειδή $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, το Θεώρημα 1.21 (α') συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to\infty} f(a^nx) = 0$ για κάθε $x \in (0,\delta)$. Τότε

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty}|f(x)-f(a^nx)| \le \frac{\varepsilon}{2}x\,, \quad \text{για κάθε } x\in(0,\delta)\,.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,, \quad \text{για κάθε } x\in(0,\delta)$$

και άρα $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = 0$. □

Άπειρα όρια

Ορισμός 1.23. *Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ σ.σ του D.*

(i) **Η συνάρτηση f έχει όριο το ∞ καθώς το $x \to x_0$**, *αν*

για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\delta = \delta(\alpha) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ είναι

$$f(x) > \alpha\,.$$

Γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \quad \text{ή} \;\; f(x)\to\infty \;\; \text{καθώς το } x\to\infty\,.$$

(ii) **Η συνάρτηση f έχει όριο το $-\infty$ καθώς το $x \to x_0$**, *αν*

για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\delta = \delta(\beta) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ είναι

$$f(x) < \beta\,.$$

Γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad \text{ή} \;\; f(x) \to -\infty \;\; \text{καθώς το } x \to \infty\,.$$

Η απόδειξη του επόμενου θεωρήματος, θεώρημα μεταφοράς, είναι ανάλογη της απόδειξης του Θεωρήματος 1.11.

Θεώρημα 1.24 (Θεώρημα μεταφοράς). *Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ σ.σ του D.*

(α΄) Είναι

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$$

για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του D, με $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

(β΄) Είναι

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty$$

για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του D, με $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Όρια στο άπειρο

Ορισμός 1.25. *Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$.*

(i) Αν $(a, \infty) \subseteq D$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$, θα λέμε ότι **η συνάρτηση f έχει όριο το $\lambda \in \mathbb{R}$ καθώς το $x \to \infty$**, *αν*

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\varepsilon) > a$ τέτοιο ώστε για κάθε $x > M$ να ισχύει

$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon\,.$$

Γράφουμε

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lambda \quad \text{ή} \;\; f(x) \to \lambda \;\; \text{καθώς το } x \to \infty\,.$$

(ii) *Αν $(-\infty, a) \subseteq D$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$, θα λέμε ότι* **η συνάρτηση** f **έχει όριο το** $\lambda \in \mathbb{R}$ **καθώς το** $x \to -\infty$, *αν*

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\varepsilon) < a$ τέτοιο ώστε για κάθε $x < N$ να ισχύει

$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon\,.$$

Γράφουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lambda \quad \text{ή} \;\; f(x) \to \lambda \;\; \text{καθώς το } x \to -\infty\,.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ανάλογο του Θεωρήματος 1.11.

Θεώρημα 1.26 (Θεώρημα μεταφοράς). *Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$.*

(α') *Αν $(a, \infty) \subseteq D$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda$$

για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του (a, ∞) με $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

(β') *Αν $(-\infty, a) \subseteq D$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lambda \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda$$

για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του $(-\infty, a)$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Αφήνουμε την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος σαν άσκηση. Ως γνωστόν $x_n \to \infty$ (αντ. $x_n \to -\infty$), αν και μόνο αν για κάθε πραγματικό αριθμό M υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $x_n > M$ (αντ. $x_n < M$).

Ορισμός 1.27. *Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$. Υποθέτουμε ότι $(a, \infty) \subseteq D$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι* **η συνάρτηση** f **τείνει στο** ∞**(αντ.** $-\infty$**) καθώς το** $x \to \infty$ *και γράφουμε*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \;\; (\text{αντίστοιχα, } \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty)$$

αν για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει $M = M(\alpha) > a$ τέτοιο ώστε για κάθε $x > M$ να ισχύει

$$f(x) > \alpha \;\; (\text{αντίστοιχα, } f(x) < \alpha)\,.$$

Όπως και προηγουμένως υπάρχει ένα θεώρημα μεταφοράς για το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$(αντίστοιχα, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$).

Θεώρημα 1.28 (Θεώρημα μεταφοράς). *Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω $(a, \infty) \subseteq D$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Τότε*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \ (\textit{αντίστοιχα, } \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty)\,,$$

αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του (a, ∞) με $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ είναι

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty \ (\textit{αντίστοιχα, } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty)\,.$$

Παράδειγμα 1.29. *Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε*

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = 0\,.$$

Τότε $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Έστω $T_1 > 0$ η περίοδος της f και $T_2 > 0$ η περίοδος της g. Αν $n \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$f(x + nT_1) = f(x) \ \text{ και } \ g(x + nT_2) = g(x), \ \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

Έστω $h := f - g$. Από την υπόθεση είναι $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} (x + nT_1) = \lim_{n\to\infty} (x + nT_2) = \lim_{n\to\infty} (x + nT_1 + nT_2) = \infty\,,$$

το Θεώρημα 1.26 (α') συνεπάγεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} h(x + nT_1) = \lim_{n\to\infty} h(x + nT_2) = \lim_{n\to\infty} h(x + nT_1 + nT_2) = 0\,.$$

Όμως για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
& h(x + nT_1) + h(x + nT_2) - h(x + nT_1 + nT_2) \\
= \ & [f(x + nT_1) - g(x + nT_1)] + [f(x + nT_2) - g(x + nT_2)] \\
& -[f(x + nT_1 + nT_2) - g(x + nT_1 + nT_2)] \\
= \ & [f(x) - g(x + nT_1)] + [f(x + nT_2) - g(x)] - [f(x + nT_2) - g(x + nT_1)] = h(x)
\end{aligned}$$

και επομένως

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} [h(x+nT_1) + h(x+nT_2) - h(x+nT_1+nT_2)] = 0\,,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ■

Παράδειγμα 1.30. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μονότονη συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$. Τότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$, για κάθε $a > 0$.*

Λύση. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα συνάρτηση(αν η f είναι φθίνουσα, τότε θεωρούμε τη $-f$ που είναι αύξουσα). Επομένως θα είναι είτε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή θα υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq x_0$.

(i) Έστω $a \geq 1$. Αν $k \in \mathbb{N}^*$, επειδή $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$ και $\lim_{x\to+\infty} 2^{k-1}x = +\infty$, θα είναι και $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(2^k x)}{f(2^{k-1}x)} = 1$(βλέπε άσκηση 26 (α')). Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(2^n x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(2^n x)}{f(2^{n-1}x)} \cdot \frac{f(2^{n-1}x)}{f(2^{n-2}x)} \cdots \frac{f(2x)}{f(x)} \right) = 1\,.$$

Επειδή $a \geq 1$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $2^{n-1} \leq a < 2^n$. Επειδή η f είναι αύξουσα, έπεται ότι $f(2^{n-1}x) \leq f(ax) \leq f(2^n x)$, για κάθε $x > 0$.

– Αν $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, τότε

$$\frac{f(2^{n-1}x)}{f(x)} > \frac{f(ax)}{f(x)} > \frac{f(2^n x)}{f(x)}\,, \quad \text{για κάθε } x > 0\,.$$

– Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq x_0 > 0$, τότε

$$\frac{f(2^{n-1}x)}{f(x)} < \frac{f(ax)}{f(x)} < \frac{f(2^n x)}{f(x)}\,, \quad \text{για κάθε } x \geq x_0 > 0\,.$$

Όμως

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(2^{n-1}x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(2^n x)}{f(x)} = 1\,,$$

οπότε και

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1\,.$$

(ii) Έστω $0 < a < 1$. Τότε $\frac{1}{a} > 1$ και από την περίπτωση (i) έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f\left(\frac{1}{a}x\right)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{a}x\right)} = 1\,.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{f\left(\frac{1}{a}t\right)}=1\,.$$

■

Το όριο σύνθετης συνάρτησης

Πρόταση 1.31. *Έστω οι συναρτήσεις $f : A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$ και $g : f(A)\to\mathbb{R}$ και έστω x_0 σημείο συσσώρευσης (σ.σ) του A. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim_{y\to\lambda} g(y)=\mu\in\mathbb{R}$, όπου λ είναι σ.σ του $f(A)$. Αν $f(x)\neq\lambda$ για κάθε $x\neq x_0$ σε μία περιοχή $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ του x_0, τότε*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=\mu\,.$$

Απόδειξη. Έστω (x_n), $x_n\neq x_0$, μία οποιαδήποτε ακολουθία σημείων του A με $x_n\longrightarrow x_0$. Από το θεώρημα μεταφοράς έχουμε $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lambda\in\mathbb{R}$. Θέτουμε $y_n=f(x_n)$. Επειδή από την υπόθεση $f(x)\neq\lambda$ για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $f(x_n)\neq\lambda$ για κάθε $n\geq n_0$ (γιατί;). Τότε, από το θεώρημα μεταφοράς $\lim_{n\to\infty} g(y_n)=\mu$ και ισοδύναμα $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n))=\mu$. Δηλαδή $\lim_{n\to\infty}(g\circ f)(x_n)=\mu$. Άρα, από το θεώρημα μεταφοράς το όριο $\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)$ υπάρχει και είναι

$$\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to x_0} g\left(f(x)\right)=\mu\,.$$

□

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μεταφοράς, παρόμοια αποδεικνύεται η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.32. *Έστω η συνάρτηση $f : A\to\mathbb{R}$ με $(a,\infty)\subseteq A$ για κάποιο $a\in\mathbb{R}$ και έστω η συνάρτηση $g : f(A)\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim_{y\to\lambda} g(y)=\mu\in\mathbb{R}$, όπου λ είναι σ.σ του $f(A)$. Αν υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $f(x)\neq\lambda$ για κάθε $x>M$, τότε*

$$\lim_{x\to\infty} g(f(x))=\mu\,.$$

Παρατήρηση 1.33. *Αν στην Πρόταση 1.31 η υπόθεση "$f(x) \neq \lambda$ για κάθε $x \neq x_0$ σε μία περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ του x_0" δεν ισχύει, τότε δεν είναι κατανάγκη $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \mu$. Το όριο $\lim_{x \to x_0} g(f(x))$ μπορεί να είναι διάφορο του μ ή να μην υπάρχει.*

Παράδειγμα 1.34. *Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{αν } x = 0\,. \end{cases}$$

Τότε $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$. Όμως

$$g(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

και κατά συνέπεια $\lim_{x \to 0} g(f(x)) = 1$.
Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει περιοχή $(-\delta, \delta)$ του 0, τέτοια ώστε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$ με $|x| < \delta$ και επομένως δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 1.31.

Παράδειγμα 1.35. *Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ και $g(y) = |\operatorname{sgn}(y)|$, όπου*

$$\operatorname{sgn}(y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } y > 0\,, \\ 0 & \text{αν } y = 0\,, \\ -1 & \text{αν } y < 0\,. \end{cases}$$

Είναι

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \ \ \text{και} \ \ \lim_{y \to 0} g(y) = \lim_{y \to 0} |\operatorname{sgn}(y)| = 1\,.$$

Όμως η συνάρτηση

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left| \operatorname{sgn}\left(x \sin \frac{1}{x} \right) \right|, \quad x \neq 0\,,$$

δεν έχει όριο καθώς το $x \to 0$. Πράγματι, θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = \frac{1}{n\pi}$ και $y_n = \frac{1}{n\pi + \pi/2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Είναι $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = 0$. Επειδή

$$g(f(x_n)) = |\operatorname{sgn}(0)| = 0 \ \ \text{και} \ \ g(f(y_n)) = \left| \operatorname{sgn}\left(\frac{(-1)^n}{n\pi + \pi/2} \right) \right| = 1\,,$$

$g(f(x_n)) \longrightarrow 0$ και $g(f(y_n)) \longrightarrow 1$. Επομένως από το θεώρημα μεταφοράς το όριο $\lim_{x \to 0} g(f(x))$ δεν υπάρχει.

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει περιοχή $(-\delta, \delta)$ *του* 0*, τέτοια ώστε* $f(x) = x\sin\frac{1}{x} \neq 0$ *για κάθε* $x \neq 0$ *με* $|x| < \delta$*. Πράγματι, έστω* $x_n = \frac{1}{n\pi}$*. Τότε* $|x_n| < \delta$ *για μεγάλα* $n \in \mathbb{N}^*$ *και* $f(x_n) = \frac{\sin n\pi}{n\pi} = 0$*. Επομένως δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 1.31.*

Παράδειγμα 1.36. *Έστω το πολυώνυμο* $p(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *με* $a_k > 0$*. Τότε*

$$\lim_{x\to\infty} p(x)^{1/x} = 1\,.$$

Εφαρμογή. Αν $a_k > 0$*, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0} = 1\,.$$

Ειδικά αν $a > 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$*. Επίσης,*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n-1} = 1,\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - n^2 + 3n} = 1, \quad \text{κ.λ.π.}$$

Λύση. Επειδή

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} x^k \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_0}{x^k}\right) = \infty\,,$$

υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x > \delta$ είναι $p(x) > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) := \ln(p(x))^{1/x} = \frac{\ln(p(x))}{x}\,, \quad \text{για κάθε } x > \delta\,.$$

Είναι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(p(x))}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0)}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{k a_k x^{k-1} + (k-1)a_{k-1}x^{k-2} + \cdots + a_1}{a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0} \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{k a_k/x + (k-1)a_{k-1}/x^2 + \cdots + a_1/x^k}{a_k + a_{k-1}/x + \cdots + a_1/x^{k-1} + a_0/x^k} = 0\,.
\end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1$, από την Πρόταση 1.32 έχουμε

$$\lim_{x\to\infty} p(x)^{1/x} = \lim_{x\to\infty} \exp(\ln(p(x))/x) = 1\,.$$

Εφαρμογή. Αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα μεταφοράς, Θεώρημα 1.26 (α'), τότε

$$\lim_{n\to\infty} p(n)^{1/n} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0} = 1\,.$$

■

1.3 Ασκήσεις

1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τα παρακάτω όρια:

$$(i)\ \lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ \ (ii)\ \lim_{x\to 0}\tan x\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\ \ (iii)\ \lim_{x\to 0}x\cos\left(\frac{x+1}{x^2}\right)\ \ (iv)\ \lim_{x\to 0}\tan\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\quad \text{και}\quad \lim_{h\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right).$$

3. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ -x & \text{αν } x\in\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Να δείξετε ότι $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ και ότι το όριο $\lim_{x\to x_0}f(x)$ δεν υπάρχει αν $x_0\neq 0$.

4. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\langle 1/x\rangle^*$, $x\neq 0$, όπου $\langle y\rangle^*$ είναι η απόσταση από το y στον ακέραιο αριθμό που είναι πλησιέστερα στο y. Εξετάστε αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to 0^-}f(x)$ και $\lim_{x\to 0^+}f(x)$.

   Υπόδειξη. Θεωρείστε τις ακολουθίες (x_n), (y_n) και $(-x_n)$, $(-y_n)$, όπου

$$x_n=\frac{1}{n}\quad \text{και}\quad y_n=\frac{2}{2n+1}\,,\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

5. Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$(i)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right],\ a,b>0\quad \text{και}\quad (ii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{[x]}{x}.$$

6. Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$(i)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-(x+1)\right)\quad \text{και}\quad (ii)\quad \lim_{x\to+\infty}x^{3/4}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right).$$

7. Να βρεθεί η τιμή του $a\in\mathbb{R}$ για την οποία το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax\right)$ υπάρχει και στη συνέχεια να υπολογιστεί το όριο.

8. Αν $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, δείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{1/x} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $t = \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x - n}{n}$, τότε

$$\ln\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{1/x} = \frac{t}{x}\ln(1+t)^{1/t}\,.$$

9. Αν P είναι ένα πολυώνυμο με **θετικούς συντελεστές**, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[P(x)]}{P([x])}\,,$$

όπου το $[\cdot]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Για κάθε $x > 1$ είναι

$$\frac{P(x)-1}{P(x)} \leq \frac{[P(x)]}{P([x])} \leq \frac{P(x)}{P(x-1)}\,.$$

10. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω $x_0 \in D$ $\sigma.\sigma$ του D. Αν η f είναι φραγμένη σε μια περιοχή του x_0 και $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

11. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένη στο διάστημα I. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) σημείων του I τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty}|f(x_n)| = \infty$.

12. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x \in [a,b]$ το όριο $\lim_{t\to x} f(t)$ υπάρχει, δηλαδή είναι πραγματικός αριθμός ή ισούται με $-\infty$, $+\infty$. Να δείξετε ότι η f είναι φραγμένη, αν και μόνο αν για κάθε $x \in [a,b]$ το όριο $\lim_{t\to x} f(t)$ είναι πεπερασμένο.

13. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T > 0$, δηλαδή $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός ή ισούται με $-\infty$, $+\infty$, να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή. Ισοδύναμα, αν η περιοδική συνάρτηση f δεν είναι σταθερή τότε το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$ δεν υπάρχει.

    <u>*Εφαρμογή*</u>. Τα όρια $\lim_{x\to\infty}\sin x$ και $\lim_{x\to\infty}\cos x$ δεν υπάρχουν.

14. Έστω η συνάρτηση $f : (-a,a) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $a > 0$. Αν $\lim_{x\to 0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε και $\lim_{x\to 0} f(|x|) = \lambda$. Ισχύει το αντίστροφο;

15. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to-\infty} f(-x) = \lambda$.

16. Έστω η συνάρτηση $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to 0^-} f(1/x) = \lambda$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lambda$.

17. Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε $\lim_{x\to\infty} xf(x) = \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

18. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 + x\cos^2 x$ και $g(x) = 1 + x\sin^2 x$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty$. Υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to+\infty} g(x)$;

19. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και τέτοια ώστε
$$f(ax) = bf(x)\,, \quad \text{για } 0 \leq x \leq \frac{1}{a} \quad \text{και } a, b > 1\,.$$
   (αʹ) Πρώτα δείξτε ότι
   $$f(a^n x) = b^n f(x)\,, \quad \text{για } 0 \leq x \leq \frac{1}{a^n},\, n \in \mathbb{N}^*$$
   και στη συνέχεια ότι
   $$|f(x)| \leq M\frac{1}{b^n}\,, \quad \text{για } 0 \leq x \leq \frac{1}{a^n},\, n \in \mathbb{N}^*\,.$$
   (βʹ) Δείξτε ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

20. Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω $a \in \mathbb{R}$ από αριστερά και από δεξιά $\sigma.\sigma$ του D. Αν $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lambda_1$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lambda_2$ με $\lambda_1 < \lambda_2$, να δείξετε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in D$ με $a - \delta < x < a < y < a + \delta$ είναι $f(x) < f(y)$.

21. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : (-a, a) \setminus \{0\} \to (0, \infty)$ είναι τέτοια ώστε
$$\lim_{x\to 0}\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = 2\,.$$
Αποδείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει και ισούται με 1.

22. Έστω $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $a > 0$, αύξουσα συνάρτηση με $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ είναι αύξουσα, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

23. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x)e^{f(x)} = x\,, \quad \text{για κάθε } x \geq 0\,.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$(i) \text{ η } f \text{ είναι αύξουσα}\,, \quad (ii) \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ και } (iii) \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = 1\,.$$

24. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) := \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m}\right)$. Να δείξετε ότι $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, όπου $\chi_{\mathbb{Q}}$ είναι η *χαρακτηριστική συνάρτηση* του συνόλου των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$. Δηλαδή

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

25. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = \frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\,, \\ \sin x & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0\,, \\ \frac{\sin x}{x} & \text{διαφορετικά}\,. \end{cases}$$

Είναι $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$. Να βρεθεί η συνάρτηση $y = g\,(f(x))$. Υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0} g\,(f(x))$;

26. (α΄) Αν $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ και $\lim_{y\to\infty} f(y) = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = \lambda\,.$$

(β΄) Αν $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ και $\lim_{y\to\infty} f(y) = \infty$, τότε

$$\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = \infty\,.$$

Κεφάλαιο 2

Συνεχείς συναρτήσεις

2.1 Συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός 2.1. *Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω $x_0 \in D$. Η συνάρτηση f είναι* **συνεχής στο** *x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in D$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, θα λέμε ότι η f είναι **ασυνεχής στο** *x_0.*

Χρησιμοποιώντας την έννοια της περιοχής, ο ορισμός της συνέχειας διατυπώνεται και ως εξής: Η συνάρτηση f ορισμένη στο $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, είναι συνεχής στο $x_0 \in D$ αν για κάθε περιοχή $V_{f(x_0)}(\varepsilon) = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ του $f(x_0)$ υπάρχει περιοχή $V_{x_0}(\delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ του x_0, τέτοια ώστε

$$\text{για κάθε } x \in V_{x_0}(\delta) \cap D \Rightarrow \; f(x) \in V_{f(x_0)}(\varepsilon)\,,$$

ή, πιο σύντομα,

$$f\left(V_{x_0}(\delta) \cap D\right) \subseteq V_{f(x_0)}(\varepsilon)\,.$$

Ο ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο x_0 είναι παρόμοιος με τον ορισμό του ορίου της συνάρτησης στο x_0, όμως υπάρχουν δύο σημαντικές διαφορές:

- Η ανισότητα $0 < |x - x_0| < \delta$ αντικαθίσταται από την $|x - x_0| < \delta$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f επιτρέπεται να παίρνει τη τιμή της και στο σημείο x_0.

- Το όριο λ στον ορισμό του ορίου, Ορισμός 1.5, αντικαθίσταται από το $f(x_0)$ που είναι η τιμή της συνάρτησης f στο x_0.

Παρατήρηση 2.2. *Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω $x_0 \in D$. Το σημείο x_0 δεν είναι κατανάγκη σ.σ του D. Αν το $x_0 \in D$ είναι μεμονωμένο σημείο του D, υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε*

$$(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap D = \{x_0\}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ αν $x \in D$ με $|x - x_0| < \delta_1$, τότε $x = x_0$ και κατά συνέπεια

$$|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon.$$

Δηλαδή η f **είναι συνεχής στα μεμονωμένα σημεία του** *D.*
Επομένως, η μόνη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν το σημείο $x_0 \in D$ είναι σ.σ του D.

Θεώρημα 2.3. *Έστω η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ και έστω $x_0 \in D$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(α΄) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0.

(β΄) Η συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 με $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

*(γ΄) (**Θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις**) Για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του D που συγκλίνει στο x_0, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_0)$.*

Απόδειξη. *(α΄) ⇒ (β΄)*: Αν η f είναι συνεχής στο x_0, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in D$ με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Τότε προφανώς για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Επομένως

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

(β΄) ⇒ (α΄): Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in D$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Όμως αν $|x - x_0| = 0 \Leftrightarrow x = x_0$, τότε

$$|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon.$$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in D$ με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Άρα η f είναι συνεχής στο x_0.

(β') ⇔ (γ'): Είναι ουσιαστικά το θεώρημα μεταφοράς για το όριο συνάρτησης, Θεώρημα 1.11. $\square$

Παράδειγμα 2.4. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ x & \text{αν } x \text{ άρρητος} . \end{cases}$$

Να βρεθούν όλα τα σημεία του $\mathbb{R}$ στα οποία η f είναι συνεχής.

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$, x σταθερό. Αν (ρ_n) είναι ακολουθία ρητών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \rho_n = x$, τότε $\lim_{n\to\infty} f(\rho_n) = \lim_{n\to\infty} \rho_n^2 = x^2$. Αν (α_n) είναι ακολουθία άρρητων αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = x$, τότε $\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = x$.

Είναι $\lim_{n\to\infty} f(\rho_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n)$ αν και μόνο αν $x^2 \neq x \Leftrightarrow x \neq 0, 1$. Επομένως το θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις συνεπάγεται ότι η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημεία 0 και 1.

(i) Είναι $f(0) = 0$. Για κάθε $|x| < 1$ έχουμε

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq \max\{x^2, |x|\} = |x|$$

και επομένως $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο 0.

(ii) Είναι $f(1) = 1^2 = 1$. Παίρνουμε $|x - 1| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$, οπότε $|x^2 - 1| = |x - 1||x + 1| > |x - 1|$. Επομένως

$$|f(x) - f(1)| = |f(x) - 1| \leq \max\{|x^2 - 1|, |x - 1|\} = |x^2 - 1| , \quad \text{για } |x - 1| < 1 .$$

Από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ και κατά συνέπεια η f είναι συνεχής στο 1.

Σημείωση. Η συνέχεια της f στο 1 προκύπτει και από την παρακάτω ανισότητα

$$|f(x) - f(1)| = |f(x) - 1| \leq \max\{|x^2 - 1|, |x - 1|\} = \frac{|x^2 - 1| + |x - 1| + \big||x^2 - 1| - |x - 1|\big|}{2} .$$

■

Παράδειγμα 2.5. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε η f είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) = ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $h \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x+h) = f(x) + f(h)\,.$$

Είναι $f(0+0) = f(0) + f(0)$, οπότε $f(0) = 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, $\lim_{h\to 0} f(h) = f(0) = 0$ και επομένως

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)\,.$$

Δηλαδή η f είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από την υπόθεση για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) + \cdots + f(x_n)\,.$$

Ειδικά, για κάθε ακέραιο αριθμό n είναι

$$f(nx) = f\left(x + \cdots + x\right) = f(x) + \cdots + f(x) = nf(x)\,.$$

Επειδή $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, είναι $f(-x) = -f(x)$. Τότε, για κάθε αρνητικό ακέραιο q

$$f(qx) = f\left((-q)(-x)\right) = -qf(-x) = qf(x)\,.$$

Επομένως,

$$f(kx) = kf(x)\,, \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Έστω $r \in \mathbb{Q}$ με $r = p/q$, όπου $p \in \mathbb{Z}$ και $q \in \mathbb{N}^*$. Τότε,

$$f(qrx) = f(px) = pf(x) \quad \text{και} \quad f(qrx) = qf(rx)\,.$$

Άρα,

$$f(rx) = rf(x)\,, \quad \text{για κάθε } r \in \mathbb{Q}\,.$$

Ως γνωστόν υπάρχει ακολουθία (r_n) ρητών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις έχουμε

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n f(1) = ax\,. \qquad (a = f(1))$$

■

Παράδειγμα 2.6. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε*

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Τότε είτε $f = 0$ ή υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) = e^{ax}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)f(x/2) = f^2(x/2) \geq 0\,.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Τότε,

$$f(x) = f((x - x_0) + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

Επομένως $f = 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $g(x) := \ln(f(x))$, είναι

$$g(x+y) = \ln(f(x+y)) = \ln(f(x)f(y)) = \ln(f(x)) + \ln(f(y)) = g(x) + g(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Δηλαδή η g ικανοποιεί την υπόθεση του προηγούμενου παραδείγματος και κατά συνέπεια $g(x) = ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$f(x) = \exp(\ln(f(x))) = \exp(g(x)) = \exp(ax) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

■

Σημεία ασυνέχειας

Ορισμός 2.7. *Έστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα I.*

1. *Η f έχει* **απλή** *ασυνέχεια ή ασυνέχεια* **πρώτου είδους** *στο εσωτερικό σημείο a του I αν τα πλευρικά όρια $f(a+) = \lim_{x\to a^+} f(x)$ και $f(a-) = \lim_{x\to a^-} f(x)$ υπάρχουν ενώ η f δεν είναι συνεχής στο a. Αν το $a \in I$ είναι το αριστερό(αντίστοιχα, δεξιό) άκρο του I, τότε η f έχει ασυνέχεια πρώτου είδους στο σημείο a αν το $f(a+)$(αντίστοιχα, το $f(a-)$) υπάρχει και η f είναι ασυνεχής στο a.*

2. *Αν η f είναι ασυνεχής στο a και η ασυνέχεια δεν είναι πρώτου είδους, τότε η ασυνέχεια είναι* **δεύτερου είδους**.

Αν το $f(a-)$ και το $f(a+)$ υπάρχει, ενώ η f είναι ασυνεχής στο a, τότε είτε

(α') $f(a-) \neq f(a+)$,

ή

(β') $f(a-) = f(a+) \neq f(a)$.

Στην περίπτωση (α') η f παρουσιάζει **πήδημα** με πλάτος $|f(a+) - f(a-)|$, ενώ στη (β') η ασυνέχεια της f είναι **μη ουσιώδης** ή **διορθώσιμη**. Όλες οι ασυνέχειες για τις οποίες το $f(a-)$ ή το $f(a+)$ δεν υπάρχει είναι ασυνέχειες δεύτερου είδους.

Παράδειγμα 2.8.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{αν } x \neq 2 \\ 2 & \text{αν } x = 2\,. \end{cases}$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4 \neq f(2)\,,$$

η f έχει ασυνέχεια πρώτου είδους στο σημείο 2. Μάλιστα η ασυνέχεια της f είναι μη ουσιώδης (διορθώσιμη). Αν ορίσουμε την f στο 2 έτσι ώστε $f(2) = 4$, τότε η συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο 2.

Παράδειγμα 2.9. *Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$. Ως γνωστόν*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Αν ορίσουμε τη συνάρτηση g με

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0\,, \end{cases}$$

τότε η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 0. Λέμε ότι η g είναι η **συνεχής επέκταση της f στο** 0.

Παράδειγμα 2.10.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x^2 & \text{αν } x > 1 \, . \end{cases}$$

Είναι

$$f(1-) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1 = f(1)$$

και

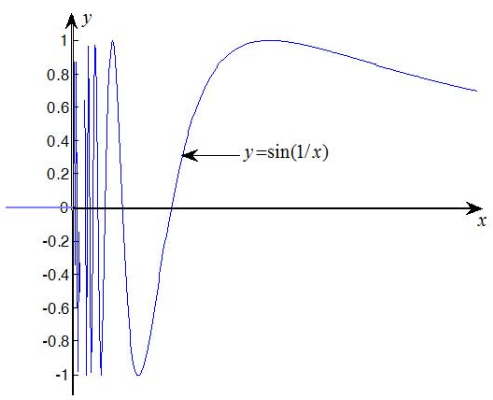
$$f(1+) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3 - x^2) = 2 \, .$$

Επομένως $f(1-) = f(1) = 1$ και $f(1+) = 2$. Η f είναι συνεχής από αριστερά στο 1, δεν είναι όμως συνεχής στο 1. Επειδή $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$, η f έχει ασυνέχεια πρώτου είδους στο 1 και παρουσιάζει πήδημα πλάτους $|f(1+) - f(1-)| = 1$.

Παράδειγμα 2.11. *Θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x} & \text{αν } x > 0, \end{cases}$$

η γραφική παράσταση της οποίας φαίνεται παρακάτω:



Προφανώς το $f(0-) = 0$. Το $f(0+)$ δεν υπάρχει. Πράγματι, έστω

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \text{ και } y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}\,, \quad n \in \mathbb{N}^* \, .$$

Τότε $x_n, y_n \to 0$ καθώς το $n \to \infty$, ενώ $f(x_n) = \sin n\pi = 0$ και $f(y_n) = \sin(2n\pi + \pi/2) = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = 1$ και επομένως το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ δεν υπάρχει. Άρα η ασυνέχεια της f στο 0 είναι δεύτερου είδους.

2.2 Συνεχείς συναρτήσεις σε διαστήματα

Ορισμός 2.12. *Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι* **φραγμένη** *στο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$.*

Δηλαδή μια συνάρτηση είναι φραγμένη αν το πεδίο τιμών της είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 2.13. *Έστω η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $I = [a, b]$, $a < b$. Τότε η f είναι φραγμένη, δηλαδη το σύνολο $f(I)$ είναι φραγμένο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι φραγμένη. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $x_n \in [a, b]$ με

$$|f(x_n)| > n\,.$$

Η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη και επομένως από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) με $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0$. Είναι $a \leq x_{k_n} \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και κατά συνέπεια το $x_0 \in [a, b]$. Επειδή η f είναι συνεχής, από το θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0)$ και κατά συνέπεια η ακολουθία $(f(x_{k_n}))$ είναι φραγμένη. Όμως αυτό είναι άτοπο επειδή

$$|f(x_{k_n}| > k_n \geq n\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι η f δεν είναι φραγμένη. Άρα η συνάρτηση f είναι φραγμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $I = [a, b]$. □

Θεώρημα 2.14. *Έστω η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $I = [a, b]$, $a < b$. Η f έχει μέγιστο και ελάχιστο στο $[a, b]$, δηλαδή υπάρχουν $x_0, y_0 \in [a, b]$ τέτοια ώστε*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0) \quad \textit{για κάθε } x \in [a, b] \,.$$

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα το σύνολο $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Έστω $M = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $y_0 \in [a, b]$ με $f(y_0) = M$.

1ος τρόπος. Επειδή $M = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $x_n \in [a, b]$ με

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M \,. \tag{2.1}$$

Η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη και επομένως από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) με $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = y_0$. Είναι $a \leq x_{k_n} \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και κατά συνέπεια το $y_0 \in [a, b]$. Επειδή η f είναι συνεχής, από το θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις έχουμε $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(y_0)$. Επόμένως απο τη (2.1) έπεται ότι

$$M - \frac{1}{k_n} < f(x_{k_n}) \leq M \,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

και κατά συνέπεια $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = M$. Άρα,

$$f(y_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = M = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\} \,.$$

2ος τρόπος. Η απόδειξη θα γίνει με την εις άτοπο απαγωγή.

Υποθέτουμε ότι $f(x) < M$ για κάθε $x \in [a, b]$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) := \frac{1}{M - f(x)} \,.$$

Η g είναι συνεχής και από το προηγούμενο θεώρημα θα είναι φραγμένη. Επομένως υπάρχει $N > 0$, τέτοιο ώστε $g(x) \leq N$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε,

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq N \Leftrightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{N} \quad \text{για κάθε } x \in [a, b] \,.$$

Δηλαδή το $M - \frac{1}{N}$ είναι ένα άνω φράγμα του συνόλου $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$. Όμως το $M - \frac{1}{N}$ είναι μικρότερο από το $M = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$, άτοπο. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί

υποθέσαμε ότι $f(x) < M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα υπάρχει $y_0 \in [a, b]$, τέτοιο ώστε $f(y_0) = M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$.
Παρόμοια αποδεικνύεται ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$. $\square$

Το Θεώρημα 2.14 έχει τρεις υποθέσεις: η f είναι συνεχής, το διάστημα είναι κλειστό και το διάστημα είναι φραγμένο. Αν μία από αυτές τις υποθέσεις δεν ικανοποιείται, τότε το συμπέρασμα μπορεί να μην ισχύει. Στα παρακάτω τρία παραδείγματα μόνο δύο από τις υποθέσεις ικανοποιούνται.

- Η συνάρτηση f με $f(x) = 1/x$ για $x \neq 0$ και $f(0) = 0$ δεν έχει μέγιστη τιμή στο διάστημα $[0, 1]$.
- Η συνάρτηση g με $g(x) = x^2$ δεν έχει μέγιστη τιμή στο διάστημα $[-2, 3)$.
- Η συνάρτηση h με $h(x) = x^3$ δεν έχει ελάχιστη τιμή στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και μέγιστη τιμή στο διάστημα $[0, \infty)$.

Εντοπισμός των ριζών συνεχούς συνάρτησης - Θεώρημα Bolzano ή ενδιάμεσης τιμής

Το παρακάτω θεώρημα χρησιμοποιείται για τον εντοπισμό των ριζών μιας συνεχούς συνάρτησης. Η απόδειξη μας δίνει ένα αλγόριθμο, ονομάζεται "**μέθοδος διχοτόμησης**", για τον υπολογισμό των ριζών με την ακρίβεια που επιθυμούμε.

Θεώρημα 2.15 (Εντοπισμός των ριζών). *Έστω η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα $I = [a, b]$, $a < b$. Αν $f(a) < 0 < f(b)$ ή $f(b) < 0 < f(a)$, τότε υπάρχει $c \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(c) = 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $f(a) < 0 < f(b)$. Θα κατασκευάσουμε ακολουθία διαστημάτων με διαδοχικές διχοτομήσεις του διαστήματος I.
Έστω $I_1 := [a_1, b_1]$, όπου $a_1 := a$, $b_1 := b$. Συμβολίζουμε με x_1 το μέσο του I_1, δηλαδή $x_1 := \frac{a+b}{2}$. Αν $f(x_1) = 0$, παίρνουμε $c := x_1$ και το θεώρημα αποδείχτηκε. Αν $f(x_1) \neq 0$, τότε είτε $f(x_1) > 0$ ή $f(x_1) < 0$. Αν $f(x_1) > 0$, θέτουμε $a_2 := a_1$, $b_2 := x_1$, ενώ αν $f(x_1) < 0$, θέτουμε $a_2 := x_1$, $b_2 := b_1$. Σε κάθε περίπτωση, αν $I_2 := [a_2, b_2]$ τότε $I_2 \subset I_1$ και $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$. Επομένως

$$a_1 \leq a_2,\ b_1 \geq b_2 \text{ και το μήκος του } I_2 \text{ ισούται με } b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2}.$$

Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία και υποθέτουμε ότι έχουμε κατασκευάσει τα διαστήματα

$$I_1, I_2, \ldots, I_k \quad \text{με } I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_k\,.$$

Τότε έχουμε $f(a_k) < 0$, $f(b_k) > 0$ και θέτουμε $x_k := \frac{a_k+b_k}{2}$. Αν $f(x_k) = 0$, παίρνουμε $c := x_k$ και το θεώρημα αποδείχτηκε. Αν $f(x_k) \neq 0$, τότε είτε $f(x_k) > 0$ ή $f(x_k) < 0$. Αν $f(x_k) > 0$, τότε θέτουμε $a_{k+1} := a_k$, $b_{k+1} := x_k$, ενώ αν $f(x_k) < 0$, τότε θέτουμε $a_{k+1} := x_k$, $b_{k+1} := b_k$. Σε κάθε περίπτωση θέτουμε $I_{k+1} := [a_{k+1}, b_{k+1}]$. Είναι $I_{k+1} \subset I_k$ και $f(a_{k+1}) < 0$, $f(b_{k+1}) > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$a_k \leq a_{k+1},\; b_k \geq b_{k+1} \text{ και το μήκος του } I_{k+1} \text{ ισούται με } b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b-a}{2^k}\,.$$

Η παραπάνω διαδικασία τερματίζεται αν βρεθεί ένα x_n με $f(x_n) = 0$. Αν η διαδικασία δεν τερματίζεται, τότε παίρνουμε μία ακολουθία κλειστών διαστημάτων (I_n), $I_n := [a_n, b_n]$. Η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα με

$$f(a_n) < 0,\; f(b_n) > 0 \text{ και } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Επομένως τα όρια $\lim_{n\to\infty} a_n$ και $\lim_{n\to\infty} b_n$ υπάρχουν και είναι ίσα, έστω $\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n$. Τότε, από το θεώρημα μεταφοράς

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \quad \text{και} \quad f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0\,.$$

Άρα $f(c) = 0$. □

Παράδειγμα 2.16. *Η* $f(x) = 2\ln x + \sqrt{x} - 2$ *έχει ρίζα στο διάστημα* $[1, 2]$. *Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο διχοτόμησης να βρεθεί η ρίζα με σφάλμα* $< 10^{-2}$.

Λύση. Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ με $f(1) = -1 < 0$ και $f(2) = 2\ln 2 + \sqrt{2} - 2 > 0$, η f έχει μία ρίζα c στο διάστημα $[1, 2]$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο διχοτόμησης κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα.

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\frac{1}{2}(b_n - a_n)$
1	1	2	1.5	+0.0357	0.5
2	1	1.5	1.25	-0.4357	0.25
3	1.25	1.5	1.375	-0.01905	0.125
4	1.375	1.5	1.4375	-0.0752	0.0625
5	1.4375	1.5	1.46875	-0.0193	0.03125
6	1.46875	1.5	1.484375	+0.0083	0.015625
7	1.46875	1.484375	1.4765625	-0.0054	0.0078125

Για $n = 7$ παίρνουμε $c \approx x_7 = 1.4765625$ με σφάλμα μικρότερο του 0.0078125. ■

Θεώρημα 2.17. (**Bolzano ή ενδιάμεσης τιμής**) *Έστω η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα I. Υποθέτουμε ότι τα $a, b \in I$ και ότι το $k \in \mathbb{R}$ είναι τέτοιο ώστε $f(a) < k < f(b)$. Τότε υπάρχει σημείο $c \in I$ μεταξύ a και b με $f(c) = k$.*

Απόδειξη. Αν $a < b$ θέτουμε $g(x) := f(x) - k$. Τότε $g(a) < 0 < g(b)$ και από το Θεώρημα 2.15 υπάρχει c με $a < c < b$ τέτοιο ώστε $0 = g(c) = f(c) - k$. Επομένως $f(c) = k$.
Αν $b < a$ θέτουμε $h(x) := k - f(x)$. Τότε $h(b) < 0 < h(a)$ και από το Θεώρημα 2.15 υπάρχει c με $b < c < a$ τέτοιο ώστε $0 = g(c) = k - f(c)$. Επομένως $f(c) = k$. □

Παράδειγμα 2.18. *Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και περιττό βαθμό έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.*

Απόδειξη. Έστω το πολυώνυμο

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \,.$$

Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο έχει βαθμό περιττό, $n = 2k + 1$ και ότι οι συντελεστές του είναι πραγματικοί αριθμοί. Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_n > 0$(διαφορετικά θεωρούμε το πολυώνυμο $-P(x)$). Είναι

$$P(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) , \quad \text{για κάθε } x \neq 0 \,.$$

Επειδή $n = 2k + 1$, έχουμε

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty\,.$$

Τότε υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$P(\alpha) < 0 < P(\beta)\,.$$

Επομένως από το Θεώρημα 2.15 υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $P(\xi) = 0$. □

Παράδειγμα 2.19. *Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda < 1$. Τότε υπάρχει $x_0 \in [0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$, δηλαδή η f έχει σταθερό σημείο στο διάστημα $[0, +\infty)$.*

Λύση. – Αν $f(0) = 0$, το 0 είναι ένα σταθερό σημείο της f στο διάστημα $[0, +\infty)$.
– Έστω $f(0) > 0$. Αν $g(x) := f(x) - x$, τότε $g(0) = f(0) > 0$ και από την υπόθεση έχουμε

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lambda - 1\,,$$

όπου $\lambda \in [0, 1)$. Έστω $\varepsilon > 0$ με $\varepsilon < 1 - \lambda$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{για κάθε } x > \delta, \quad \left| \frac{g(x)}{x} - (\lambda - 1) \right| < \varepsilon \Leftrightarrow (\lambda - 1 - \varepsilon)x < g(x) < (\lambda - 1 + \varepsilon)x\,.$$

Επειδή $(\lambda - 1 - \varepsilon)x < (\lambda - 1 + \varepsilon)x < 0$, για κάθε $x > \delta > 0$ είναι $g(x) < 0$. Για ένα τέτοιο x έχουμε $g(x) < 0 < g(0)$ και επομένως από το Θεώρημα 2.15 υπάρχει $x_0 \in (0, x)$ με $g(x_0) = 0$. Άρα $f(x_0) = x_0$ για κάποιο $x_0 > 0$. ■

Παράδειγμα 2.20. *Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(1)$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε*

$$f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = f(x_0)\,.$$

Λύση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση

$$f_n(x) := f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\,, \quad x \in \left[0,\, 1 - \frac{1}{n}\right]\,.$$

Τότε το άθροισμα

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right) &= f_n(0) + f_n\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f_n\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right] + \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{n}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] \\ &= f(1) - f(0) = 0\,.\end{aligned}$$

1η περίπτωση. Αν $f_n\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ για κάποιο $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, τότε

$$f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = f(x_0) \quad \text{με } x_0 = \frac{k}{n} \in [0,1]\,.$$

2η περίπτωση. Υποθέτουμε ότι $f_n\left(\frac{k}{n}\right) \neq 0$ για κάθε $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Επειδή το άθροισμα

$$f_n(0) + f_n\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f_n\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0\,,$$

δύο τουλάχιστον από τους όρους του αθροίσματος έχουν αντίθετο πρόσημο. Έστω

$$f_n\left(\frac{k_1}{n}\right) \cdot f_n\left(\frac{k_2}{n}\right) < 0\,, \text{ για κάποια } k_1, k_2 \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \text{ με } k_1 \neq k_2\,.$$

Επομένως από το Θεώρημα 2.15 υπάρχει x_0 μεταξύ των $\frac{k_1}{n}$ και $\frac{k_2}{n}$ με $f_n(x_0) = 0$ και ισοδύναμα

$$f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = f(x_0)\,, \quad \text{όπου } x_0 \in [0,1]\,.$$

■

Θεώρημα 2.21. *Έστω η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ ορισμένη στο διάστημα I.*

(α΄) Αν η f είναι συνεχής και δεν είναι σταθερή στο I, τότε το $f(I)$ είναι ένα διάστημα.

(β΄) Αν η f είναι συνεχής και δεν είναι σταθερή στο I και αν το $I = [a, b]$ είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα, τότε το $f(I)$ είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα.

Απόδειξη. (α΄) Έστω $J = f(I)$. Αν $\inf J < y < \sup J$, τότε υπάρχουν $y_1, y_2 \in J$ τέτοια ώστε $y_1 < y < y_2$ (γιατί;). Από το Θεώρημα 2.17 υπάρχει $c \in I$ με $f(c) = y$, δηλαδή το $y \in J$. Επομένως το $J = f(I)$ είναι ένα διάστημα με άκρα τα $\inf J$ και $\sup J$, όπου $-\infty \leq \inf J$ και $\sup J \leq +\infty$.

(β') Αν $m := \inf f([a,b])$ και $M := \sup f([a,b])$, είναι γνωστό από το Θεώρημα 2.14 ότι τα m και M ανήκουν στο $f([a,b])$. Επομένως $f([a,b]) \subseteq [m,M]$. Αν τώρα $k \in [m,M]$, από το Θεώρημα 2.17 υπάρχει $c \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $k = f(c)$. Δηλαδή το $k \in f([a,b])$ και κατά συνέπεια $[m,M] \subseteq f([a,b])$. Άρα, $f([a,b]) = [m,M]$.

□

Στο Θεώρημα 2.21 (α') τα διαστήματα I και $f(I)$ δεν είναι κατανάγκη του ίδιου τύπου. Για παράδειγμα, αν $f(x) = \sin x$ και I είναι το ανοικτό και φραγμένο διάστημα $(-\pi,\pi)$, το $f(I)$ είναι το κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-1,1]$. Ένα άλλο παράδειγμα: αν $g(x) = 1/x$ και $I = (0,1)$, το $f(I) = (1,\infty)$. Σ' αυτή την περίπτωση το I είναι φραγμένο ενώ το $f(I)$ δεν είναι φραγμένο.

Στο Θεώρημα 2.21 (β') αν το διάστημα I είναι κλειστό και όχι φραγμένο, τότε το $f(I)$ δεν είναι κατανάγκη κλειστό διάστημα. Για παράδειγμα, αν $h(x) = 1/(x^2+1)$ και $I = (-\infty, 0]$, το $f(I) = (0,1]$ δεν είναι κλειστό διάστημα.

2.3 Ταλάντωση (oscillation) συνάρτησης *

Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο των ασυνεχειών μιας πραγματικής συνάρτησης ορισμένης στο $\mathbb{R}$ είναι ειδικού τύπου. Αρχίζουμε με τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.22. *Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα* $\mathbf{F}_\sigma$ **σύνολο** *αν $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, όπου κάθε F_k είναι ένα κλειστό σύνολο.*

Παραδείγματα 2.23. *(i) Αν το F είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, το F είναι ένα F_σ σύνολο επειδή $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, όπου $F_1 = F$ και $F_2 = F_3 = \cdots = \emptyset$.*

(ii) Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών στο $\mathbb{R}$ είναι ένα F_σ σύνολο. Πράγματι, αν $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ είναι μια αρίθμηση των ρητών, τότε κάθε $\{r_k\}$ είναι κλειστό σύνολο και $\mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{r_k\}$.

(iii) Κάθε ανοικτό και φραγμένο διάστημα (a,b) είναι ένα F_σ σύνολο. Πράγματι, αν ο φυσικός αριθμός m είναι τέτοιος ώστε $\frac{2}{m} < b-a$, τότε

$$(a,b) = \bigcup_{k=m}^{\infty} \left[a + \frac{1}{k},\, b - \frac{1}{k}\right] ,$$

όπου τα $\left[a+\frac{1}{k},\, b-\frac{1}{k}\right]$ είναι κλειστά σύνολα για κάθε k.

Ορισμός 2.24. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν I είναι ένα ανοικτό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$, η* **ταλάντωση(oscillation) στο** *I της συνάρτησης f, συμβολίζεται με $\omega(f, I)$, ορίζεται ως εξής*

$$\omega(f, I) := \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x)\,.$$

Από τον ορισμό εύκολα αποδεικνύεται(άσκηση) ότι

$$\omega(f, I) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in I\} = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in I\}\,.$$

Επίσης $\omega(|f|, I) \leq \omega(f, I)$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Η **ταλάντωση (oscillation) στο** *x_0 της συνάρτησης f, συμβολίζεται με $\omega(f, x_0)$, ορίζεται ως εξής*

$$\omega(f, x_0) := \inf \omega(f, I)\,,$$

όπου το infimum το παίρνουμε πάνω σε όλα τα ανοικτά και φραγμένα διαστήματα I που περιέχουν το x_0.

Από τον ορισμό είναι προφανές ότι $\omega(f, I) \geq 0$ και $\omega(f, x_0) \geq 0$.

Δίνουμε τώρα ένα κριτήριο για τη συνέχεια μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0.

Πρόταση 2.25. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε $\omega(f, x_0) = 0$ αν και μόνο αν η f είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Αν $I = (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$, τότε για κάθε $x \in I$ είναι $f(x_0) - \varepsilon/2 < f(x) < f(x_0) + \varepsilon/2$. Επομένως

$$\omega(f, I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \leq (f(x_0) + \varepsilon/2) - ((f(x_0) - \varepsilon/2)) = \varepsilon$$

και κατά συνέπεια

$$\omega(f, x_0) = \inf \omega(f, I) \leq \varepsilon\,.$$

Επειδή για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι $0 \leq \omega(f, x_0) \leq \varepsilon$, έπεται ότι $\omega(f, x_0) = 0$.

Αντίστροφα, έστω $\omega(f, x_0) = 0$. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε σε κάθε ανοικτό και φραγμένο διάστημα που περιέχει το x_0, υπάρχει x για το οποίο είναι $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Δηλαδή

$$f(x) \geq f(x_0) + \varepsilon \quad \text{ή} \quad f(x) \leq f(x_0) - \varepsilon\,.$$

Επομένως, για κάθε ανοικτό και φραγμένο διάστημα I που περιέχει το x_0 είναι

$$\omega(f, I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \geq (f(x_0) + \varepsilon) - (f(x_0) - \varepsilon) = 2\varepsilon\,.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για κάποιο $\varepsilon > 0$ είναι

$$\omega(f, x_0) = \inf \omega(f, I) \geq 2\varepsilon\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0. □

Θεώρημα 2.26. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $F_n = \{x \in \mathbb{R} : \omega(f, x) \geq 1/n\}$. Συμβολίζουμε με A το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}$ στα οποία η f είναι ασυνεχής. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ το σύνολο F_n είναι κλειστό. Επιπλέον,*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\,.$$

Επομένως, το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}$ στα οποία η f είναι ασυνεχής είναι ένα F_σ σύνολο.

Απόδειξη. Έστω x σ.σ του F_n. Από την Πρόταση 1.3 αρκεί να δείξουμε ότι $x \in F_n$. Έστω I ανοικτό και φραγμένο διάστημα που περιέχει το x. Τότε το I θα περιέχει ένα σημείο $y \in F_n$. Επομένως

$$\omega(f, I) \geq \omega(f, y) \geq \frac{1}{n}\,.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε ανοικτό και φραγμένο διάστημα I που περιέχει το x, έπεται ότι $\omega(f, x) \geq 1/n$. Άρα $x \in F_n$.

Απομένει να δείξουμε ότι $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Έστω $x \in A$. Από την Πρόταση 2.25 έπεται ότι $\omega(f, x) > 0$. Επομένως υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $\omega(f, x) \geq 1/n$ και κατά συνέπεια $x \in F_n$.

Έστω τώρα $x \in F_n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε και πάλι από την Πρόταση 2.25 το $x \in A$. □

Θεώρημα 2.27. *Το σύνολο $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ των άρρητων αριθμών δεν είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Επομένως,* **δεν υπάρχει πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ που να είναι συνεχής σε κάθε ρητό αριθμό και ασυνεχής σε κάθε άρρητο αριθμό**.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι

$$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\,,$$

όπου τα F_n είναι κλειστά σύνολα. Αν $\{r_1,r_2,\ldots,r_n,\ldots\}$ είναι μια αρίθμηση των ρητών αριθμών, τότε $\mathbb{Q}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\}$ και κατά συνέπεια

$$\mathbb{R}=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\}\right).$$

Από το θεώρημα κατηγορίας του Baire, παραπέμπουμε στο [2], τουλάχιστον ένα από τα F_n θα πρέπει να περιέχει ένα διάστημα. Όμως κάθε διάστημα περιέχει ρητούς αριθμούς και $F_n\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, δηλαδή το σύνολο F_n αποτελείται από άρρητους αριθμούς, άτοπο. Επομένως το σύνολο $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ των άρρητων αριθμών δεν είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν από το Θεώρημα 2.26 ότι δεν υπάρχει πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ που να είναι ασυνεχής στους άρρητους αριθμούς και συνεχής στους ρητούς. □

Θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα πραγματικής συνάρτησης ορισμένης στο $\mathbb{R}$ που είναι συνεχής στους άρρητους αριθμούς και το 0 και ασυνεχής στο $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

Παράδειγμα 2.28. *Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με*

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{αν } x \text{ άρρητος ή } x=0\,,\\ \frac{1}{q} & \text{αν } x=\frac{p}{q},\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}^* \text{ και } p,q \text{ πρώτοι μεταξύ τους}\,.\end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στους άρρητους αριθμούς και το 0 και ασυνεχής στο $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

Απόδειξη. (i) Έστω x_0 ρητός αριθμός, $x_0\neq 0$. Υπάρχει ακολουθία (α_n) άρρητων αριθμών με $\alpha_n\to x_0$. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, από το θεώρημα μεταφοράς έχουμε $0=f(\alpha_n)\to f(x_0)$ και επομένως $f(x_0)=0$. Άτοπο, επειδή από τον ορισμό της f είναι $f(x_0)\neq 0$. Άρα η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

(ii) Έστω x_0 άρρητος αριθμός. Από το θεώρημα μεταφοράς αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) πραγματικών αριθμών με $x_n \to x_0$, η $f(x_n) \to f(x_0)$. Επειδή $f(x_n) = 0$ αν x_n άρρητος ή $x_n = 0$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η (x_n) **είναι ακολουθία ρητών αριθμών**, έστω $x_n = p_n/q_n$, με $p_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$ και $(p_n, q_n) = 1$.

Επειδή $f(x_0) = 0$ και $f(x_n) = f(p_n/q_n) = 1/q_n$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολουθία (q_n) φυσικών αριθμών τείνει στο άπειρο, δηλαδή $\lim_{n\to} q_n = \infty$. Η απόδειξη θα γίνει με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι η (q_n) δεν τείνει στο άπειρο. Τότε υπάρχει υπακολουθία (q_{k_n}) φυσικών αριθμών με $q_{k_n} \leq A < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως πεπερασμένο το πλήθος όροι της (q_{k_n}) είναι διάφοροι ανά δύο. Επειδή $x_n \to x_0$, η υπακολουθία $(x_{k_n}) = (p_{k_n}/q_{k_n})$ τείνει στο x_0 και επομένως θα είναι φραγμένη, έστω $|x_{k_n}| \leq B < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε

$$|p_{k_n}| = q_{k_n}|x_{k_n}| \leq AB < \infty\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

και επομένως πεπερασμένο το πλήθος όροι της ακολουθίας ακέραιων αριθμών (p_{k_n}) είναι διάφοροι ανά δύο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το σύνολο

$$E := \left\{ x_{k_n} = \frac{p_{k_n}}{q_{k_n}} \,:\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

των όρων της υπακολουθίας (x_{k_n}) είναι πεπερασμένο και κατά συνέπεια $x_{k_n} \to x_0 \in E$. Άτοπο, επειδή το x_0 είναι άρρητος αριθμός. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $q_n \nrightarrow \infty$. Επομένως $q_n \to \infty$ οπότε

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0 = f(x_0)\,.$$

(iii) $x_0 = 0$. Από τον ορισμό της f είναι $|f(x) \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ και άρα η f είναι συνεχής στο 0. □

2.4 Μονότονες και αντίστροφες συναρτήσεις

Αν μία συνάρτηση f είναι αύξουσα ή φθίνουσα σ' ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η f είναι **μονότονη** στο A. Ας σημειωθεί ότι αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A, τότε η $g := -f$ είναι φθίνουσα στο A. Αντίστοιχα, αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα στο A, τότε η $g := -f$ είναι αύξουσα στο A.

Οι μονότονες συναρτήσεις δεν είναι κατανάγκη συνεχείς. Για παράδειγμα, αν

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1,0]\,, \\ 1 & x \in (0,1]\,, \end{cases}$$

τότε η f είναι αύξουσα στο διάστημα $[-1,1]$ και δεν είναι συνεχής για $x=0$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. Δηλαδή $f(0-) = 0$ και $f(0+) = 1$. Στο παρακάτω θεώρημα αποδεικνύουμε ότι τα πλευρικά όρια μιας μονότονης συνάρτησης πάντοτε υπάρχουν στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της.

Θεώρημα 2.29. *Έστω η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη στο διάστημα I και έστω το $x_0 \in I$ δεν είναι άκρο του διαστήματος. Αν η f είναι* **αύξουσα***, τότε τα πλευρικά όρια $f(x_0-)$, $f(x_0+)$ υπάρχουν και είναι*

(i) $f(x_0-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\, x < x_0\}$,

(ii) $f(x_0+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I,\, x > x_0\}$,

(iii) $f(x_0-) \le f(x_0) \le f(x_0+)$.

Επίσης αν τα σημεία $p, q \in I$ δεν είναι άκρα του διαστήματος, τότε

$$p < q \Rightarrow f(p+) \le f(q-)\,.$$

Αν η f είναι **φθίνουσα***, τότε τα πλευρικά όρια $f(x_0-)$, $f(x_0+)$ υπάρχουν και είναι*

(i') $f(x_0-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I,\, x < x_0\}$,

(ii') $f(x_0+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\, x > x_0\}$,

(iii') $f(x_0-) \ge f(x_0) \ge f(x_0+)$.

Επίσης αν τα σημεία $p, q \in I$ δεν είναι άκρα του διαστήματος, τότε

$$p < q \Rightarrow f(p+) \ge f(q-)\,.$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι αύξουσα στο διάστημα I.

(i) Αν $x \in I$ με $x < x_0$, τότε $f(x) \leq f(x_0)$ και κατά συνέπεια το σύνολο $\{f(x) : x \in I, x < x_0\}$ είναι άνω φραγμένο από το $f(x_0)$. Επομένως το

$$L := \sup\{f(x) : x \in I,\, x < x_0\} \text{ υπάρχει}\,.$$

Τότε, από τον ορισμό του *supremum* έπεται ότι

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } x_\varepsilon \in I \text{ με } x_\varepsilon < x_0, \text{ τέτοιο ώστε } L - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq L\,.$$

Στη συνέχεια παίρνουμε $\delta > 0$ με $\delta := x_0 - x_\varepsilon$. Για κάθε $x \in I$ με $x_0 - \delta < x < x_0$ έπεται ότι $x_\varepsilon < x < x_0$ και επειδή η f είναι αύξουσα έχουμε

$$L - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq L < L + \varepsilon\,.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in I$ με $x_0 - \delta < x < x_0$ είναι $|f(x) - L| < \varepsilon$. Άρα, $f(x_0-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια.

(iii) Επειδή $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x < x_0$ και $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x > x_0$, έχουμε

$$f(x_0-) = \sup_{x<x_0} f(x) \leq f(x_0) \leq \inf_{x>x_0} f(x) = f(x_0+)\,.$$

Αν τα σημεία $p, q \in I$ με $p < q$ δεν είναι άκρα του διαστήματος, παίρνουμε x_0 τέτοιο ώστε $p < x_0 < q$. Τότε

$$f(p+) = \inf_{x>p} f(x) \leq f(x_0) \leq \sup_{x<q} f(x) = f(q-)\,.$$

□

Παράδειγμα 2.30. *Έστω $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι μια αρίθμηση των ρητών αριθμών στο διάστημα $[0,1]$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \sum_{r_n<x} \frac{1}{2^n}\,.$$

Το άθροισμα το παίρνουμε για εκείνα τα n για τα οποία $r_n < x$. Θέτουμε $f(x) = 0$ αν δεν υπάρχουν σημεία r_n στα αριστερά του x.

Η συνάρτηση f είναι αύξουσα στο διάστημα $[0,1]$. Για κάθε $c \in (0,1]$ είναι

$$f(c-) = \lim_{h\to 0^+} f(c-h) = \lim_{h\to 0^+} \sum_{r_n < c-h} \frac{1}{2^n} = \sum_{r_n<c} \frac{1}{2^n} = f(c)\,,$$

δηλαδή η συνάρτηση f είναι από αριστερά συνεχής για κάθε $c \in (0,1]$. Για κάθε $c \in [0,1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(c+) &= \lim_{h\to 0^+} f(c+h) \\ &= \lim_{h\to 0^+} \sum_{r_n<c+h} \frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{r_n \le c} \frac{1}{2^n}\,. \end{aligned}$$

Επομένως

$$f(c+) = \sum_{r_n\le c} \frac{1}{2^n} = \sum_{r_n<c} \frac{1}{2^n} = f(c) \qquad \text{(αν } c \text{ άρρητος)}$$

και

$$f(c+) = \sum_{r_n\le c} \frac{1}{2^n} > \sum_{r_n<c} \frac{1}{2^n} = f(c)\,. \qquad \text{(αν } c \text{ ρητός)}$$

Αν $c \in (0,1)$ είναι άρρητος αρθμός, τότε $f(c-) = f(c+) = f(c)$ και κατά συνέπεια η συνάρτηση f είναι συνεχής στους άρρητους αριθμούς του διαστήματος $[0,1]$. Επειδή $f(c-) = f(c)$ και $f(c+) > f(c)$ για κάθε ρητό αριθμό $c \in [0,1]$, το όριο $\lim_{x\to c} f(x)$ δεν υπάρχει για κάθε ρητό αριθμό $c \in [0,1]$.

Η απόδειξη του επόμενου αποτελέσματος προκύπτει εύκολα από το Θεώρημα 1.19 και το Θεώρημα 2.29.

Πόρισμα 2.31. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι* **αύξουσα** *στο διάστημα I και ότι το $c \in I$ δεν είναι άκρο του διαστήματος. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

1. *Η f είναι συνεχής στο c.*
2. $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x\to c^+} f(x)$.
3. $\sup\{f(x) : x \in I, x < c\} = f(c) = \inf\{f(x) : x \in I, x > c\}$.

Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση που η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα στο διάστημα I.

Ορισμός 2.32. *Το* $A \subset \mathbb{R}$ *λέγεται* **αριθμήσιμο απειροσύνολο**, *αν υπάρχει μία* $1-1$ *και επί (αμφιμονοσήμαντη) συνάρτηση* $f : A \to \mathbb{N}$. *Δηλαδή τα σύνολα* A *και* $\mathbb{N}$ *είναι ισοδύναμα, συμβολισμός* $A \sim \mathbb{N}$.

Θα λέμε ότι το A *είναι* **αριθμήσιμο** *σύνολο, αν είναι είτε πεπερασμένο σύνολο ή αριθμήσιμο απειροσύνολο.*

Πρόταση 2.33. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* $f : I \to \mathbb{R}$ *είναι μονότονη στο ανοικτό διάστημα* I. *Τότε, το σύνολο των σημείων του* I *στα οποία η* f *δεν είναι συνεχής είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι αύξουσα. Έστω

$$D = \{p \in I : \text{η } f \text{ δεν είναι συνεχής στο } p\} .$$

Τότε, $p \in D \Leftrightarrow f(p-) < f(p+)$. Επειδή το σύνολο των ρητών είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, για κάθε $p \in D$ υπάρχει ρητός r_p με

$$f(p-) < r_p < f(p+) .$$

Έστω $p, q \in D$ με $p < q$. Από το Θεώρημα 2.29 είναι $f(p+) \leq f(q-)$. Επομένως υπάρχουν ρητοί αριθμοί r_p, r_q με

$$f(p-) < r_p < f(p+) \leq f(q-) < r_q < f(q+) .$$

Δηλαδή $p < q$ στο D συνεπάγεται $r_p < r_q$. Παρόμοια $p > q$ στο D συνεπάγεται $r_p > r_q$. Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι στα $p, q \in D$ με $p \neq q$ αντιστοιχούν ρητοί αριθμοί r_p, r_q με $r_p \neq r_q$. Επομένως η συνάρτηση

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ p & \longmapsto & r_p \end{array}$$

είναι ένα προς ένα. Κατά συνέπεια το σύνολο E είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο του $\mathbb{Q}$. Όμως το σύνολο των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Άρα και το σύνολο E θα είναι αριθμήσιμο.

Η απόδειξη είναι παρόμοια στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι φθίνουσα. □

Θεώρημα 2.34. *Έστω η συνάρτηση* $f : I \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής και* $1-1$ *στο διάστημα* I. *Τότε η* f *είναι γνήσια μονότονη.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνήσια μονότονη. Τότε ένα απο τα παρακάτω ισχύει:

(i) υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in I$ τέτοια ώστε $x_1 < x_2 < x_3$ και $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_3) < f(x_2)$

ή

(ii) υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in I$ τέτοια ώστε $x_1 < x_2 < x_3$ και $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_3) > f(x_2)$.

Θα αποδείξουμε ότι αν ισχύει η περίπτωση (i) τότε οδηγούμεθα σε άτοπο(παρόμοια οδηγούμεθα σε άτοπο αν ισχύει η περίπτωση (ii)).

Ας υποθέσουμε ότι $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x \in [x_1, x_2]$ με $f(x) = f(x_3)$. Αυτό όμως αντίκειται στην υπόθεσή μας ότι η f είναι $1-1$.

Παρόμοια οδηγούμεθα σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $f(x_3) < f(x_1) < f(x_2)$. □

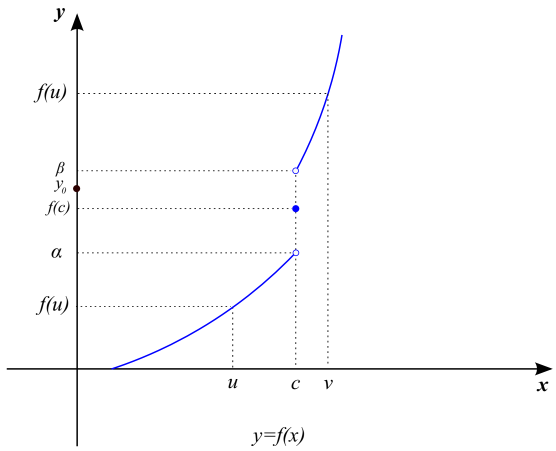
Θεώρημα 2.35. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μονότονη συνάρτηση στο διάστημα I. Αν το πεδίο τιμών $f(I)$ της f είναι ένα διάστημα, τότε η f είναι συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το διάστημα I είναι ανοικτό και ότι η f είναι αύξουσα στο I(βλέπε άσκηση 23). Η απόδειξη θα γίνει με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο I και έστω το σημείο $c \in I$ στο οποίο η f δεν είναι συνεχής. Αν

$$\alpha = \sup \{f(x) : x \in I, x < c\} \quad \text{και} \quad \beta = \inf \{f(x) : x \in I, x > c\} ,$$

τότε από το Πόρισμα 2.31 είναι $\alpha < \beta$. Έστω u, v σημεία του I με $u < c < v$ και έστω $y_0 \in (\alpha, \beta) \setminus \{f(c)\}$. Τότε το y_0 είναι μεταξύ του $f(u)$ και του $f(v)$, όμως το y_0 δεν ανήκει στο πεδίο τιμών της f.

Επομένως το $f(I)$ δεν είναι διάστημα. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο I. Άρα, η f είναι συνεχής στο I. □



y=f(x)

Θεώρημα 2.36. *Έστω η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι γνήσια αύξουσα(αντ. φθίνουσα) και συνεχής στο διάστημα I. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f(I) \to I$ είναι γνήσια αύξουσα(αντ. φθίνουσα) και συνεχής στο διάστημα $f(I)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα(η απόδειξη είναι παρόμοια αν η f είναι γνήσια φθίνουσα). Επομένως η f είναι $1-1$.

Επειδή η f είναι συνεχής, το $f(I)$ είναι ένα διάστημα. Θα αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι γνήσια αύξουσα. Έστω $y_1, y_2 \in f(I)$ με $y_1 < y_2$. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in I$ με $f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$. Είναι $x_1 < x_2$. Πράγματι, αν $x_1 \geq x_2$ τότε θα έχουμε

$$y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2 \,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

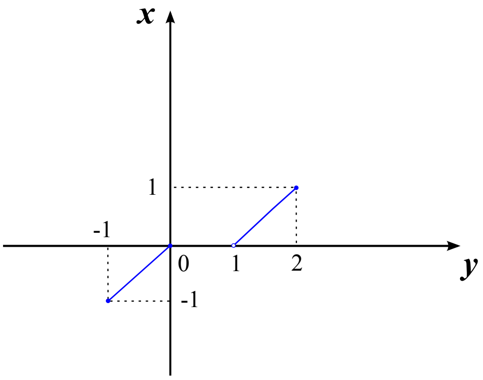
Άρα $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$, δηλαδή η f^{-1} είναι γνήσια αύξουσα.

Απομένει να δείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο διάστημα $f(I)$. Όμως το πεδίο τιμών της f^{-1} είναι το διάστημα I και επομένως από το Θεώρημα 2.35 έπεται ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο διάστημα $f(I)$. □

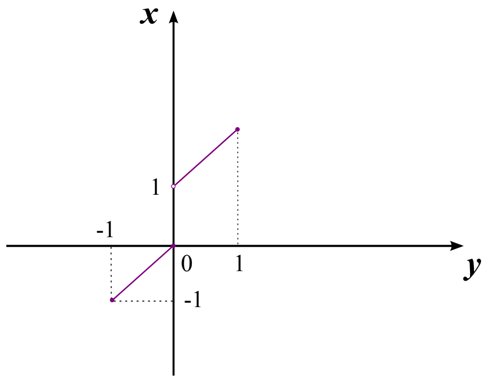
Αν η γνήσια μονότονη και συνεχής συνάρτηση f δεν είναι ορισμένη σε διάστημα, τότε είναι δυνατόν η f^{-1} να μην είναι συνεχής.

Παράδειγμα 2.37. *Έστω $D = [-1, 0] \cup (1, 2]$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $-1 \leq x \leq 0$ και $f(x) = x - 1$ αν $1 < x \leq 2$. Η f είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής στο D με πεδίο τιμών το $f(D) = [-1, 1]$. Παρατηρούμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : [-1, 1] \to D$ με*

$f^{-1}(x) = x$ *αν* $-1 \le x \le 0$ *και* $f^{-1}(x) = x + 1$ *αν* $0 < x \le 1$ *είναι ασυνεχής στο σημείο* 0 *(βλ. Σχήμα 2.2).*



Σχήμα 2.1: Η γραφική παράσταση της f (Παράδειγμα 2.37).



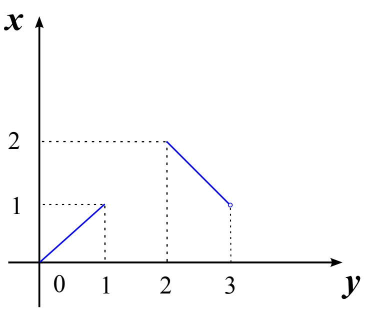
Σχήμα 2.2: Η γραφική παράσταση της f^{-1} (Παράδειγμα 2.37).

Αν μια συνεχής και $1-1$ συνάρτηση είναι ορισμένη σε *συμπαγές* σύνολο, δηλαδή σε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση είναι συνεχής.

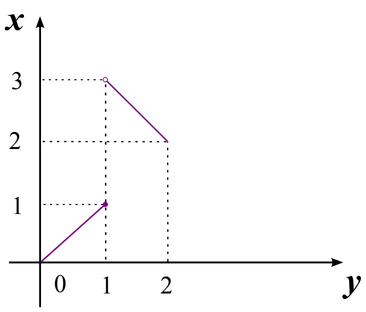
Θεώρημα 2.38. *Έστω $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής και $1-1$ συνάρτηση στο συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{R}$. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f(K) \to K$ είναι συνεχής.*

Παραλείπουμε την απόδειξη του θεωρήματος (βλέπε άσκηση 5). Αν το πεδίο ορισμού μιας συνεχούς και $1-1$ συνάρτησης δεν είναι συμπαγές σύνολο, τότε η αντίστροφη συνάρτηση μπορεί να μην είναι συνεχής.

Παράδειγμα 2.39. *Έστω το σύνολο $K = [0,1] \cup [2,3)$. Το K δεν είναι συμπαγές. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : K \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x$ αν $0 \le x \le 1$ και $g(x) = 4-x$ αν $2 \le x < 3$. Η g είναι $1-1$ και συνεχής στο K με πεδίο τιμών το $g(K) = [0,2]$. Όμως η αντίστροφη συνάρτηση $g^{-1} : [0,2] \to K$ με $g^{-1}(x) = x$ αν $0 \le x \le 1$ και $g^{-1}(x) = 4-x$ αν $1 < x \le 2$ είναι ασυνεχής στο σημείο 1 (βλ. Σχήμα 2.4).*



Σχήμα 2.3: Η γραφική παράσταση της g (Παράδειγμα 2.39).



Σχήμα 2.4: Η γραφική παράσταση της g^{-1} (Παράδειγμα 2.39).

2.5 Ασκήσεις

1. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι συνεχής, θα είναι και και η f συνεχής;

2. Αν οι $f, g : D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}$, τότε και οι συναρτήσεις $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ θα είναι συνεχείς, όπου

$$\max(f,g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}\ , \quad \min(f,g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}\ .$$

3. Έστω $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$g(xy) = g(x) + g(y)\,, \quad \text{για κάθε } x, y > 0\,.$$

Δείξτε ότι $g(x) = a \ln x$, για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ και για κάθε $x > 0$.

Υπόδειξη. Παράδειγμα 2.5 με $f(t) := g(e^t)$.

4. (αʹ) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στα σημεία 0 και 1 και τέτοια ώστε

$$f(x^2) = f(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

(i) Δείξτε ότι $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(x)\,, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και για κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

(ii) Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

(βʹ) Δώστε ένα παράδειγμα μη σταθερής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x^2) = f(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

5. Αποδείξτε το Θεώρημα 2.38.

   Υπόδειξη. Έστω (y_n) ακολουθία στο $f(K)$ με $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \in f(K)$. Αν $x_n = f^{-1}(y_n)$ και $x_0 = f^{-1}(y_0)$, δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in K$.

6. Δείξτε ότι η εξίσωση: $x^2 \cos x + x \sin x = -1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

7. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο διχοτόμησης να βρεθούν οι ρίζες των εξισώσεων

$$(i)\ x = \cos x\,, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad (ii)\ 2\tan x = 3x\,, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,,$$

   με σφάλμα $< 10^{-2}$.

8. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι μονότονη στο διάστημα $[0, a]$;

   Υπόδειξη. Θεωρείστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0\,. \end{cases}$$

9. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που είναι συνεχής μόνο στο σημείο x_0.

10. Δείξτε με επαγωγή ότι

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}}_{n \text{ τετραγωνικές ρίζες}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\,.$$

   Στη συνέχεια με τη βοήθεια της παραπάνω ισότητας να υπολογιστεί το όριο της ακολουθίας (a_n) που ορίζεται από την αναδρομική σχέση

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

11. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο $T > 0$, δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

12. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(0) = 1$ και

$$f(2x) - f(x) = x\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

13. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$$|f(x) - f(y)| \geq a|x - y| \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R},$$

όπου $a > 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι $1 - 1$ και επί.

14. (α΄) Έστω $f, g : [a, b] \to (0, \infty)$, $a < b$, συνεχείς συναρτήσεις με $g(x) > f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι

$$\text{υπάρχει } \lambda > 1, \text{ τέτοιο ώστε } g(x) \geq \lambda f(x) \text{ για κάθε } x \in [a, b]. \qquad (*)$$

Υπόδειξη. Έστω η (∗) δεν ισχύει. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $x_n \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$g(x_n) < \left(1 + \frac{1}{n}\right) f(x_n).$$

(β΄) Με κατάλληλο αντιπαράδειγμα δείξτε ότι η (α΄) δεν ισχύει αν αντικαταστήσουμε το $[a, b]$ με το ανοικτό διάστημα (a, b).

15. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{Q}$, δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

16. Έστω $f : [a, b] \to [a, b]$, $a < b$, συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.

17. Έστω $f, g : [a, b] \to [a, b]$, $a < b$, συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$(f(a) - g(a))(f(b) - g(b)) \leq 0.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

18. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) = \max_{a \leq x \leq b} g(x).$$

Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

19. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, συνεχής συνάρτηση και έστω $p_1, \dots, p_n > 0$. Να δείξετε ότι για κάθε $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ τέτοιο ώστε
$$f(x_0) = \frac{p_1 f(x_1) + \cdots + p_n f(x_n)}{p_1 + \cdots + p_n}\,.$$
Ειδικά αν $p_1 = \cdots = p_n = 1$, τότε
$$f(x_0) = \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right)\,.$$

20. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση με $f(a) = f(b)$ και έστω $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Αν $k \in (m, M)$, δείξτε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον διαφορετικά σημεία $x_1, x_2 \in [a,b]$ με $f(x_1) = f(x_2) = k$.

21. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή $m \in \mathbb{R}$.

22. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι φραγμένες.

23. (α΄) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, αύξουσα (αντίστοιχα, γνήσια αύξουσα) συνάρτηση στο $[a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα (αντίστοιχα, γνήσια αύξουσα) συνάρτηση $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) = g_1(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.

    (β΄) Έστω $f : (a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, αύξουσα (αντίστοιχα, γνήσια αύξουσα) συνάρτηση στο $(a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα (αντίστοιχα, γνήσια αύξουσα) συνάρτηση g_2 σ' ένα ανοικτό διάστημα I που περιέχει το $(a,b]$ τέτοια ώστε $f(x) = g_2(x)$ για κάθε $x \in (a,b]$.

    (γ΄) Έστω $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, $a < b$, αύξουσα (αντίστοιχα, γνήσια αύξουσα) συνάρτηση στο $[a,b)$. Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα (αντίστοιχα, γνήσια αύξουσα) συνάρτηση g_3 σ' ένα ανοικτό διάστημα J που περιέχει το $[a,b)$ τέτοια ώστε $f(x) = g_3(x)$ για κάθε $x \in [a,b)$.

24. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε
$$f(f(x)) = \lambda x^{25}\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}\,,$$
αν και μόνο αν $\lambda > 0$.

    Υπόδειξη. Αν υπάρχει τέτοια συνεχής συνάρτηση f, δείξτε ότι η f θα είναι $1-1$ και επί. Επομένως η f θα είναι γνήσια μονότονη.

Κεφάλαιο 3

Παραγώγιση

3.1 Η παράγωγος

Ορισμός 3.1. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα διάστημα και έστω $x_0 \in I$. Θα λέμε ότι η f είναι* **παραγωγίσιμη στο** *x_0, αν το όριο*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda$$

υπάρχει. Αυτό το μοναδικό όριο $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι η **παράγωγος της** *f* **στο** *x_0 και θα συμβολίζεται με*

$$f'(x_0) \quad \text{ή} \quad \frac{df(x_0)}{dx} \quad \text{ή} \quad Df(x_0)\,.$$

Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος I, τότε $x_0 + h \in I$ για κάθε αρκετά μικρό h. Ο ορισμός της παραγώγου της f στο x_0 διατυπώνεται και ως εξής

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$

Στον ορισμό της παραγώγου το σημείο x_0 μπορεί να είναι και ένα άκρο του διαστήματος I. Αν το x_0 **είναι το αριστερό άκρο του διαστήματος** I, τότε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$

Αν το x_0 **είναι το δεξιό άκρο του διαστήματος** I, τότε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$

Παράδειγμα 3.2. *Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση στο* 0 *και έστω* $a > 1$. *Αν*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(ax) - f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

τότε η f *είναι παραγωγίσιμη στο* 0 *με* $f'(0) = \frac{\lambda}{a-1}$.

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x\to 0} \frac{f(ax)-f(x)}{x} = \lambda$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $0 < |x| < \delta$ να ισχύει

$$\left|\frac{f(ax) - f(x)}{x} - \lambda\right| < \frac{\varepsilon}{2}(a-1) \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2}(a-1)|x| < f(ax) - f(x) - \lambda x < \frac{\varepsilon}{2}(a-1)|x|\,.$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ είναι $0 < |x/a^k| < \delta$ και επομένως ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{array}{rcl}
-\frac{\varepsilon}{2}(a-1)|\frac{x}{a}| < & f(x) - f\left(\frac{x}{a}\right) - \lambda\frac{x}{a} & < \frac{\varepsilon}{2}(a-1)|\frac{x}{a}|\,, \\
-\frac{\varepsilon}{2}(a-1)|\frac{x}{a^2}| < & f\left(\frac{x}{a}\right) - f\left(\frac{x}{a^2}\right) - \lambda\frac{x}{a^2} & < \frac{\varepsilon}{2}(a-1)|\frac{x}{a^2}|\,, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
-\frac{\varepsilon}{2}(a-1)|\frac{x}{a^n}| < & f\left(\frac{x}{a^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{a^n}\right) - \lambda\frac{x}{a^n} & < \frac{\varepsilon}{2}(a-1)|\frac{x}{a^n}|\,.
\end{array}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες έχουμε

$$-\frac{\varepsilon}{2}(a-1)|x|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a^k} < f(x) - f\left(\frac{x}{a^n}\right) - \lambda x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a^k} < \frac{\varepsilon}{2}(a-1)|x|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a^k}$$

οπότε

$$\left|f(x) - f\left(\frac{x}{a^n}\right) - \lambda x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a^k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}(a-1)|x|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a^k} < \frac{\varepsilon}{2}(a-1)|x|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a^k}\,.$$

Επειδή

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^k = \frac{1/a}{1-1/a} = \frac{1}{a-1}\,,$$

τελικά έχουμε

$$\left|f(x) - f\left(\frac{x}{a^n}\right) - \lambda x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a^k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}|x|\,. \tag{$*$}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 και $\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{a^n} = 0$, από το θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{a^n}\right) = f(0)$. Παίρνοντας στην $(*)$ το $n \to +\infty$ έχουμε

$$\left|f(x) - f(0) - \frac{\lambda}{a-1}x\right| \le \frac{\varepsilon}{2}|x|\,.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για $0 < |x| < \delta$ ισχύει

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{\lambda}{a-1}\right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

και άρα

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\lambda}{a-1}\,.$$

■

Πρόταση 3.3. *Έστω η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του διαστήματος I. Τότε*

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + u(x)(x - x_0) \quad \textit{με} \ \lim_{x\to x_0} u(x) = 0 \tag{3.1}$$

και

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \varepsilon(h)h \quad \textit{με} \ \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0\,. \tag{3.2}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$u(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\,, \quad x \neq x_0\,.$$

Από τον ορισμό της u προκύπτει η (3.1) με $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0$. Αν

$$\varepsilon(h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)\,, \quad h \neq 0\,,$$

από τον ορισμό της συνάρτησης ε προκύπτει η (3.2) με $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. □

Πρόταση 3.4. *Αν η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του διαστήματος I, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Απο την (3.1) έπεται ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Το θεώρημα μεταφοράς για το όριο συνάρτησης, Θεώρημα 1.11, συνεπάγεται το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.5. *Έστω η συνάρτηση* $f : I \to \mathbb{R}$ *και έστω* $x_0 \in I$*, όπου* I *είναι ένα διάστημα. Η συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο* x_0 *με παράγωγο* $f'(x_0) = \lambda$ *αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία* (x_n) *σημείων του* $I \setminus \{x_0\}$ *που συγκλίνει στο* x_0*, η ακολουθία*

$$\left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right) \text{ συγκλίνει στο } \lambda\,.$$

Παράδειγμα 3.6. *Έστω η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Η f *δεν είναι συνεχής στο* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*. Όμως η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* 0 *με* $f'(0) = 0$.

Λύση. (i) Έστω $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Αν (ρ_n) είναι ακολουθία ρητών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \rho_n = x$, τότε $\lim_{n\to\infty} f(\rho_n) = \lim_{n\to\infty} \rho_n^2 = x^2$. Αν (α_n) είναι ακολουθία άρρητων αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = x$, τότε $\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) = 0$.

Είναι $\lim_{n\to\infty} f(\rho_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n)$ αν και μόνο αν $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Επομένως το θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις συνεπάγεται ότι η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(ii) Είναι

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} x & \text{αν } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Έστω (x_n), $x_n \neq 0$, ακολουθία πραγματικών αριθμών με $x_n \to 0$. Επειδή $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n} = 0$ αν x_n άρρητος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η (x_n) είναι ακολουθία ρητών αριθμών. Τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

και επομένως από την Πρόταση 3.5 έχουμε $f'(0) = 0$. ■

Παράδειγμα 3.7. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* $f : I \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο* a *του διαστήματος* I*. Αν* (x_n)*,* (y_n) *είναι δύο ακολουθίες σημείων του* I *με* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$ *και* $x_n < a < y_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}^*$*, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a)\,.$$

Λύση. *1ος τρόπος*. Από την υπόθεση, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \cdot \frac{a - x_n}{y_n - x_n} + \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} \cdot \frac{y_n - a}{y_n - x_n}\,, \tag{$*$}$$

όπου

$$0 < t_n := \frac{y_n - a}{y_n - x_n} < 1 \quad \text{και} \quad 0 < \frac{a - x_n}{y_n - x_n} = 1 - t_n < 1\,.$$

Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ από την ($*$) έχουμε $\xi_n = (1 - t_n)\alpha_n + t_n\beta_n$, $0 < t_n < 1$, όπου

$$\xi_n := \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}\,, \quad \alpha_n := \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \quad \text{και} \quad \beta_n := \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a}\,.$$

Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ το ξ_n βρίσκεται μεταξύ των α_n και β_n και κατά συνέπεια

$$\min\{\alpha_n, \beta_n\} < \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} < \max\{\alpha_n, \beta_n\}\,.$$

Ισοδύναμα έχουμε

$$\frac{\alpha_n + \beta_n - |\alpha_n - \beta_n|}{2} < \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} < \frac{\alpha_n + \beta_n + |\alpha_n - \beta_n|}{2}\,, \tag{$**$}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή από την Πρόταση 3.5 είναι $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \beta_n = f'(a)$, από τη ($**$) έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a)\,.$$

2ος τρόπος. Αν εφαρμόσουμε τη σχέση (3.1) με a στη θέση του x_0, τότε

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(a) = u(x_n)\frac{a - x_n}{y_n - x_n} + u(y_n)\frac{y_n - a}{y_n - x_n}\,.$$

Επειδή $\lim_{x\to a} u(x) = 0$ και $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$, από το θεώρημα μεταφοράς έχουμε $\lim_{n\to\infty} u(x_n) = \lim_{n\to\infty} u(y_n) = 0$ και επομένως

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(a)\right| &\le |u(x_n)|\frac{a - x_n}{y_n - x_n} + |u(y_n)|\frac{y_n - a}{y_n - x_n} \\ &< |u(x_n)| + |u(y_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.\end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a)\,.$$

■

Παράδειγμα 3.8. *Έστω η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$. Αν οι συναρτήσεις f, f' δεν έχουν καμία κοινή ρίζα στο διάστημα $[a, b]$, τότε το σύνολο των ριζών της f στο διάστημα $[a, b]$ είναι πεπερασμένο.*

Λύση. Η απόδειξη θα γίνει με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $Z(f) := \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}$ δεν είναι πεπερασμένο, δηλαδή το σύνολο των ριζών της f στο διάστημα $[a, b]$ δεν είναι πεπερασμένο. Τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) ξένων ανά δύο στοιχείων του συνόλου $Z(f)$. Είναι $f(x_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη και επομένως από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) με $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = c$. Είναι $a \leq x_{k_n} \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και κατά συνέπεια το $c \in [a, b]$. Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση, από το θεώρημα μεταφοράς για συνεχείς συναρτήσεις $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(c)$. Όμως $f(x_{k_n}) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ οπότε και $f(c) = 0$, δηλαδή το c είναι ρίζα της f. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $c \in [a, b]$, από την Πρόταση 3.5 έχουμε

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{k_n}) - f(c)}{x_{k_n} - c} = 0\,.$$

Επομένως $f(c) = f'(c) = 0$, δηλαδή το $c \in [a, b]$ είναι μία κοινή ρίζα των f και f' που είναι άτοπο. Άρα το σύνολο των ριζών της f στο διάστημα $[a, b]$ είναι πεπερασμένο. ■

Ορισμός 3.9. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα διάστημα. Αν $x_0 \in I$ με $I \cap (x_0, \infty) \neq \emptyset$, η* **δεξιά παράγωγος** *της f στο x_0, συμβολίζεται $f'_+(x_0)$, ορίζεται ως εξής*

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,,$$

αν το όριο υπάρχει. Παρόμοια, αν $x_0 \in I$ με $(-\infty, x_0) \cap I \neq \emptyset$, η **αριστερή παράγωγος** *της f στο x_0, συμβολίζεται $f'_-(x_0)$, ορίζεται ως εξής*

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,,$$

αν το όριο υπάρχει.

Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος I, τότε η παράγωγος $f'(x_0)$ υπάρχει αν και μόνο αν οι πλευρικές παράγωγοι $f'_-(x_0)$ και $f'_+(x_0)$ υπάρχουν και είναι ίσες. Αν το x_0 είναι το αριστερό(αντ. δεξιό) άκρο του διαστήματος I, τότε η παράγωγος $f'(x_0)$ υπάρχει αν και μόνο αν η $f'_+(x_0)$(αντ. η $f'_-(x_0)$) υπάρχει.

Παρατηρήσεις 3.10. *1. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση σε μια περιοχή $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ του $x_0 \in \mathbb{R}$. Σημειώνουμε τη διαφορά μεταξύ των πλευρικών παραγώγων $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ και των πλευρικών ορίων $f'(x_0+) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$, $f'(x_0-) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ της f' αντίστοιχα. Η $f'_+(x_0)$(αντ.$f'_-(x_0)$) είναι η δεξιά(αντ. αριστερή) παράγωγος της f στο x_0, ενώ το $f'(x_0+)$(αντ.$f'(x_0-)$) είναι το όριο από δεξιά(αντ. αριστερά) της f' στο x_0.*

2. Αν η f' δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια $f'(x_0+)$ και $f'(x_0-)$ δεν υπάρχει. Ισοδύναμα, αν και τα δύο πλευρικά όρια $f'(x_0+)$, $f'(x_0-)$ υπάρχουν, τότε $f'(x_0+) = f'(x_0-) = f'(x_0)$, δηλαδή η f' είναι συνεχής στο x_0(Πρόταση 3.47).

Παράδειγμα 3.11. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

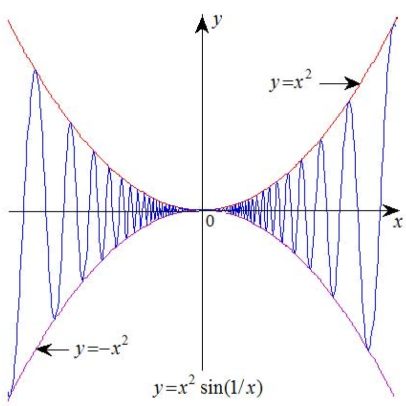
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \textit{αν } x \neq 0 \\ 0 & \textit{αν } x = 0\,. \end{cases}$$

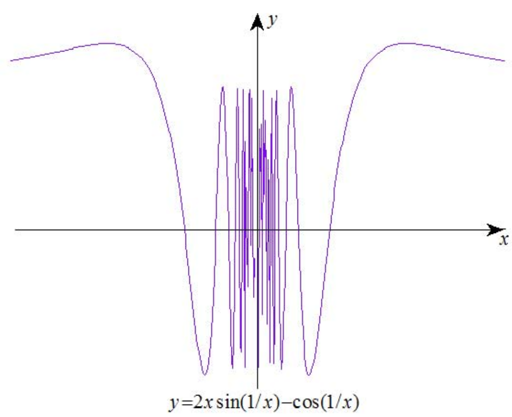
Επειδή

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0\,,$$

η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \textit{αν } x \neq 0 \\ 0 & \textit{αν } x = 0\,. \end{cases}$$





Τα πλευρικά όρια $f'(0+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$ *και* $f'(0-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$ *της* f' *δεν υπάρχουν. Πράγματι, έστω* $x_n = 1/2n\pi$ *και* $y_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Τότε* $x_n, y_n \to 0$, *ενώ*

$$f'(x_n) = -\cos 2n\pi = -1 \text{ και } f'(y_n) = \frac{2}{2n\pi + \pi/2}\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Δηλαδή $f'(x_n) \to -1$ *και* $f'(y_n) \to 0$. *Επομένως το* $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ *δεν υπάρχει. Παρόμοια, το* $\lim_{x\to 0^-} f'(x)$ *δεν υπάρχει. Άρα η* f' *είναι ασυνεχής στο* 0 *και τα δύο πλευρικά όρια* $f'(0+)$, $f'(0-)$ *δεν υπάρχουν. Η* f' *παρουσιάζει ασυνέχεια δεύτερου είδους στο* 0.

Δίνουμε στη συνέχεια τις βασικές ιδιότητες της παραγώγισης (παραλείπουμε τις αποδείξεις).

Πρόταση 3.12. *Έστω οι συναρτήσεις* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμες στο σημείο* x_0 *του διαστήματος* I *και έστω* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Τότε,*

(α΄) Η συνάρτηση (αf) *είναι παραγωγίσιμη στο* x_0 *με*

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)\,.$$

(β΄) Η συνάρτηση $f + g$ *είναι παραγωγίσιμη στο* x_0 *με*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)\,.$$

(γ΄) Η συνάρτηση fg *είναι παραγωγίσιμη στο* x_0 *με*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,.$$

(δ΄) Αν $g'(x_0) \neq 0$, *η συνάρτηση* f/g *είναι παραγωγίσιμη στο* x_0 *με*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\,.$$

Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα I, τότε η παράγωγος f' είναι μία συνάρτηση στο I. Αν η f' είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in I$, τότε η f έχει **δεύτερη παράγωγο** x_0 η οποία συμβολίζεται με $f''(x_0)$. Δηλαδή,

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}\,.$$

Παρόμοια μπορούμε να ορίσουμε την τρίτη παράγωγο της f στο x_0 η οποία συμβολίζεται με $f'''(x_0)$ ή $f^{(3)}(x_0)$.

Γενικά, έστω για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ορίζεται η $f^{(n-1)}$ στο διάστημα I. Αν η $f^{(n-1)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in I$, αυτή η παράγωγος λέγεται n-**οστή παράγωγο** της f στο x_0 και συμβολίζεται με

$$f^{(n)}(x_0) \quad \text{ή} \quad \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} \quad \text{ή} \quad D^{(n)} f(x_0)\,.$$

Για τη n-οστή παράγωγο έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

Πρόταση 3.13. *Έστω οι συναρτήσεις $f, g : I \to \mathbb{R}$ είναι n-φορές παραγωγίσιμες στο σημείο x_0 του διαστήματος I και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε,*

(α΄) Η συνάρτηση (αf) είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο x_0 με

$$(\alpha f)^{(n)}(x_0) = \alpha f^{(n)}(x_0)\,.$$

(β΄) Η συνάρτηση $f+g$ είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο x_0 με

$$(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)\,.$$

*(γ΄) (**Τύπος του Leibniz**) Η συνάρτηση fg είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο x_0 με*

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) g^{(k)}(x_0)\,,$$

όπου $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$.

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι οι n-οστές παράγωγοι του ημιτόνου και του συνημιτόνου δίνονται από τους τύπους

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{και} \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\,.$$

3.1.1 Το διαφορικό συνάρτησης

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του διαστήματος I. Τότε από την (3.2) έχουμε

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \varepsilon(h)h \quad \text{με} \ \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0\,.$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0\,.$$

Το παραπάνω όριο συμβολίζεται και ως εξής:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = o(h) \quad (h \to 0)\,.$$

Ισοδύναμα,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \quad (h \to 0) \tag{3.3}$$

και

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h) \quad (h \to 0)\,.$$

Για h αρκετά μικρό η διαφορά $f(x_0 + h) - f(x_0)$ προσεγγίζεται από το $f'(x_0)h$, δηλαδή

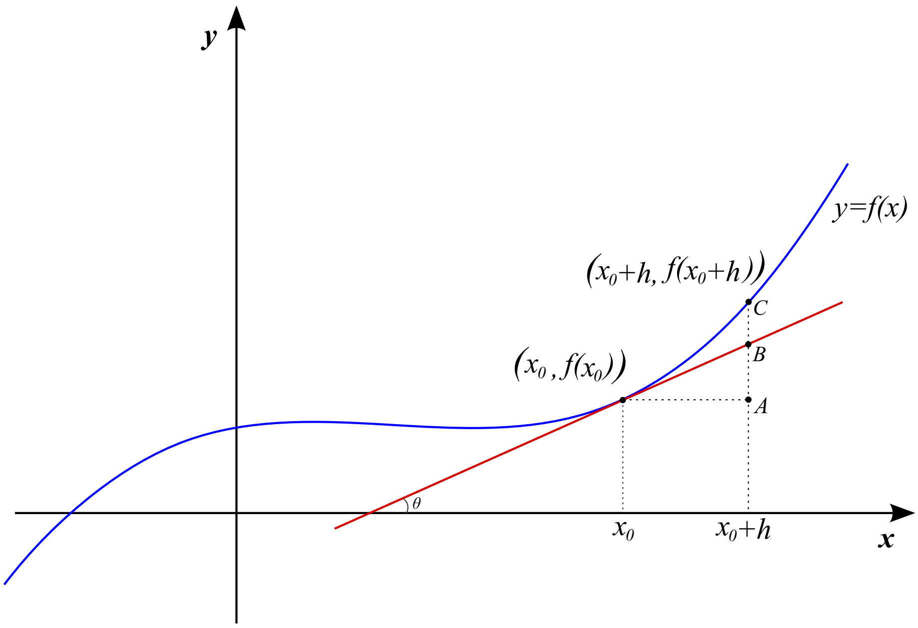
$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h \quad \text{για } h \text{ αρκετά μικρό}\,.$$

Ορισμός 3.14. *Έστω η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του διαστήματος I. Το* **διαφορικό της συνάρτησης** f **στο σημείο** x_0*, συμβολίζεται με $df(x_0)$, είναι μια γραμμική συνάρτηση $df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$df(x_0)(h) := f'(x_0)h\,.$$

Επομένως

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx df(x_0)(h) \quad \text{για } h \text{ αρκετά μικρό}\,. \tag{3.4}$$



Στο παραπάνω σχήμα η διαφορά $f(x_0+h)-f(x_0) = AC$ και το διαφορικό $df(x_0)(h) = f'(x_0)h = AB$. Παρατηρούμε ότι για αρκετά μικρό h το AC προσεγγίζεται από το AB.

Θεωρούμε τώρα την ταυτοτική συνάρτηση $id(x) := x$. Το διαφορικό της ταυτοτικής συνάρτησης είναι

$$dx(h) = x'h = h\,, \quad \text{για κάθε } h \in \mathbb{R}\,. \tag{3.5}$$

Αν η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του διαστήματος I, από τον Ορισμό 3.14 έχουμε

$$\begin{aligned} df(x_0)(h) &= f'(x_0)h \\ &= f'(x_0)dx(h) && \text{(από την (3.5))} \\ &= (f'(x_0)dx)(h)\,, \quad \text{για κάθε } h \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Επομένως

$$df(x_0) = f'(x_0)dx\,. \tag{3.6}$$

Από τον Ορισμό 3.14 το $df(x_0)$ είναι μία γραμμική συνάρτηση. Επίσης το dx, το διαφορικό της ταυτοτικής συνάρτησης, είναι γραμμική συνάρτηση. Επειδή η παράγωγος $f'(x_0)$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, έπεται ότι και το γινόμενο $f'(x_0)dx$ είναι γραμμική συνάρτηση. Άρα στην (3.6) έχουμε **ισότητα γραμμικών συναρτήσεων**. Λόγω της ισότητας (3.6), η παράγωγος $f'(x_0)$

συμβολίζεται και

$$\frac{df(x_0)}{dx}\,.$$

Αν η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε x στο διάστημα I, τότε έχουμε

$$df(x) = f'(x)dx \quad \text{ή} \quad dy = f'(x)dx\,.$$

Η παράγωγος $f'(x)$ συμβολίζεται και

$$\frac{dy}{dx}\,. \qquad \text{(συμβολισμός Leibniz)}$$

Παράδειγμα 3.15. *Η θεμοκρασία T σε ένα σημείο μιας μεταλλικής ράβδου τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο*

$$T(t) := 100^\circ \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) \int_0^{8/\sqrt{t}} e^{-x^2}\,dx\,.$$

Αν $T(64) = 15,73^\circ$, μετά πόσο χρόνο Δt, κατά προσέγγιση, η θερμοκρασία θα είναι $T(64 + \Delta t) = 17^\circ$;

Λύση. Για Δt αρκετά μικρό, από την (3.4) έχουμε

$$T(64 + \Delta t) - T(64) \approx dT(64)(\Delta t) = T'(64)\Delta t \Leftrightarrow 17^\circ - 15,73^\circ \approx T'(64)\Delta t$$

και επομένως

$$\Delta t \approx \frac{1,27^\circ}{T'(64)}\,.$$

Η παράγωγος της T, παραπέμπουμε στο Πόρισμα 5.38, είναι

$$T'(t) = 100^\circ \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(8/\sqrt{t})^2} (8/\sqrt{t})'\right) = 100^\circ \cdot \frac{8}{\sqrt{\pi}\sqrt{t^3}}\, e^{-64/t}$$

και επομένως $T'(64) = 100^\circ \cdot \frac{1}{64\sqrt{\pi}}\, e^{-1}$. Άρα,

$$\Delta t \approx \frac{1,27^\circ}{100^\circ} 64e\sqrt{\pi} \approx 3,9\,.$$

■

3.1.2 Ο κανόνας αλυσίδας

Θεώρημα 3.16 (Κανόνας αλυσίδας). *Έστω I, J δύο διαστήματα. Αν η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in I$ και η συνάρτηση $g : J \to \mathbb{R}$, με $f(I) \subseteq J$, είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0) \in J$, τότε η συνάρτηση $h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει ο τύπος*

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)\,. \qquad \text{(κανόνας αλυσίδας)}$$

Απόδειξη. Επειδή η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in I$, από την (3.1) έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = (f'(x_0) + u(x))(x - x_0) \quad \text{με } \lim_{x \to x_0} u(x) = 0\,. \tag{3.7}$$

Παρόμοια, επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0) \in J$, από την (3.1) έχουμε

$$g(y) - g(y_0) = (g'(y_0) + v(y))(y - y_0) \quad \text{με } \lim_{y \to y_0} v(y) = 0\,. \tag{3.8}$$

Είναι

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &= g(f(x)) - g(f(x_0)) \\ &= (g'(y_0) + v(y))(f(x) - f(x_0)) && \text{(από την (3.8))} \\ &= (g'(y_0) + v(y))(f'(x_0) + u(x))(x - x_0)\,. && \text{(από την (3.7))} \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $x \neq x_0$ είναι

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = (g'(y_0) + v(y))(f'(x_0) + u(x))\,. \tag{3.9}$$

Επειδή η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο x_0,

$$x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to f(x_0)\,, \quad \text{δηλαδή} \quad y \to y_0\,.$$

Άρα από την (3.9) έπεται ότι

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)\,.$$

□

Παρατήρηση 3.17. *Έστω η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα I και η συνάρτηση $g : J \to \mathbb{R}$, με $f(I) \subseteq J$, είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα J. Από το προηγούμενο θεώρημα η συνάρτηση $h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$ θα είναι παραγωγίσιμη στο I με*

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)\,, \quad \text{για κάθε } x \in I\,. \qquad \text{(κανόνας αλυσίδας)}$$

Αν θέσουμε $y = f(x)$ και $z = g(y) = g(f(x))$, με το συμβολισμό Leibniz ο κανόνας αλυσίδας εκφράζεται ως εξής

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,.$$

Παράδειγμα 3.18. *Θεωρούμε την εξίσωση Euler*

$$3x^2y''(x) + 11xy'(x) - 3y(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 11x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y = 0\,, \qquad x > 0\,. \tag{3.10}$$

Η διαφορική εξίσωση (3.10) *με την αντικατάσταση $x = e^t$ μετασχηματίζεται στη γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές*

$$3\frac{\mathrm{d}^2y^*}{\mathrm{d}t^2} + 8\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t} - 3y^* = 0\,, \tag{3.11}$$

όπου $y^*(t) = y(e^t)$. Η γενική λύση της (3.11) *είναι*

$$y^*(t) = c_1\mathrm{e}^{-3t} + c_2\mathrm{e}^{t/3}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Επομένως η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.10) *είναι*

$$y(x) = c_1x^{-3} + c_2x^{1/3}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Λύση. Ως γνωστόν $x = \mathrm{e}^t \Leftrightarrow t = \ln x$, $x > 0$. Επειδή $y(x) = y^*(t(x))$, όπου $t(x) = \ln x$, $x > 0$, χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^t} = \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}$$

και

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} && \text{(κανόνας αλυσίδας)} \\
&= \left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}^2y^*}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{1}{x} \\
&= \left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}^2y^*}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^t} = \mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}^2y^*}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\,.
\end{aligned}
$$

Αντικαθιστώντας το x, το $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ και το $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ στη διαφορική εξίσωση (3.10), παίρνουμε

$$
3\mathrm{e}^{2t}\cdot\left(\mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}^2y^*}{\mathrm{d}t^2} - \mathrm{e}^{-2t}\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\right) + 11\mathrm{e}^t\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}^*y}{\mathrm{d}t}\right) - 4y^* = 0
$$

και ισοδύναμα

$$
3\frac{\mathrm{d}^2y^*}{\mathrm{d}t^2} + 8\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t} - 3y^* = 0\,.
$$

■

3.1.3 Παραγώγιση αντίστροφης συνάρτησης

Θεώρημα 3.19 (Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης). *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνεχής και γνήσια μονότονη συνάρτηση στο διάστημα I. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in I$ με $f'(x_0) \neq 0$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$ και ισχύει*

$$
(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,. \tag{3.12}
$$

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι το όριο

$$
\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h}
$$

υπάρχει και ισούται με $1/f'(x_0)$. Παίρνουμε το h αρκετά μικρό, $h \neq 0$, έτσι ώστε το $y_0 + h$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f^{-1}(δηλαδή στο πεδίο τιμών της f). Επειδή η f είναι $1-1$, υπάρχει

μοναδικό $t \neq 0$ τέτοιο ώστε $y_0 + h = f(x_0 + t)$. Τότε

$$h = f(x_0 + t) - y_0 = f(x_0 + t) - f(x_0)\,.$$

Επίσης $x_0 + t = f^{-1}(y_0 + h)$ και κατά συνέπεια

$$t = f^{-1}(y_0 + h) - x_0 = f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)\,.$$

Επειδή ως γνωστόν η f^{-1} είναι συνεχής, $\lim_{h\to 0}[f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)] = 0$. Δηλαδή το $t \to 0$ καθώς το $h \to 0$ και επομένως

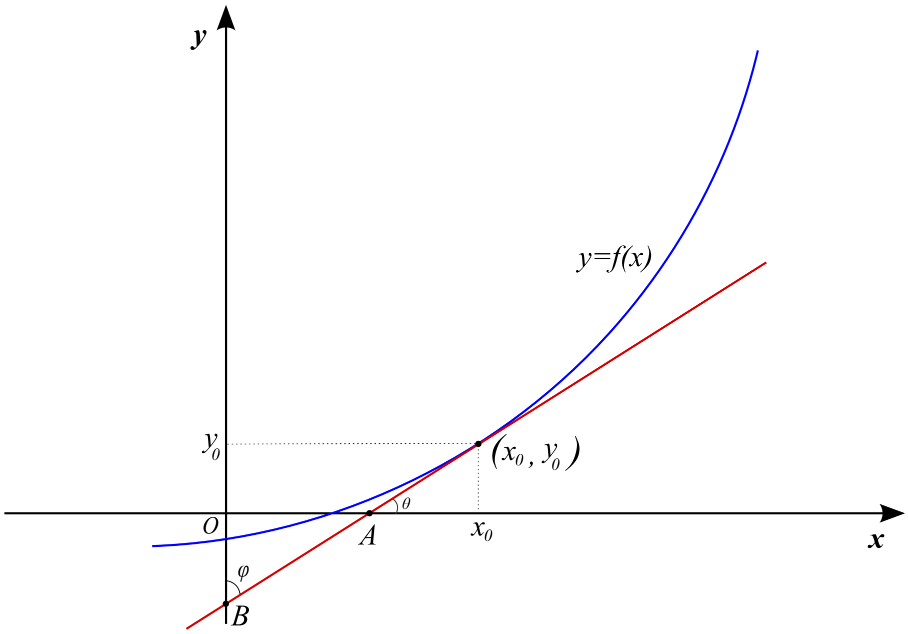
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} &= \lim_{t\to 0}\frac{t}{f(x_0+t) - f(x_0)}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}} = \frac{1}{f'(x_0)}\,.\end{aligned}$$

Άρα η παράγωγος $(f^{-1})'(y_0)$ υπάρχει και ισούται με $1/f'(x_0)$. □

Παρατήρηση 3.20. *Αν γνωρίζαμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $y_0 = f(x_0)$, τότε η απόδειξη του τύπου* (3.12) *προκύπτει εύκολα χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας. Πράγματι, επειδή $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in I$, έχουμε*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1 \;\; \textit{και επομένως} \;\; (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

''Γεωμετρική απόδειξη'' του θεωρήματος 3.19: Υποθέτουμε ότι η συνεχής και γνήσια αύξουσα συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του διαστήματος I με $f'(x_0) \neq 0$. Έστω $y_0 = f(x_0)$.



Αν $\tan\theta$ είναι η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο (x_0, y_0), τότε $f'(x_0) = \tan\theta$. Επίσης $(f^{-1})'(y_0) = \tan\varphi$. Επειδή $\theta + \varphi = \pi/2$, είναι

$$\tan\varphi = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \text{ και επομένως } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Πώς βρίσκουμε το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης $y = f^{-1}(x)$; Αρκεί να εναλλάξουμε τους άξονες Ox και Oy. Όμως τώρα οι άξονες δεν θα βρίσκονται στην κανονική τους θέση. Για να δούμε το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης $y = f^{-1}(x)$ με τους άξονες στην κανονική τους θέση, κάνουμε το παραπάνω σχήμα σε μια κόλλα χαρτί και στη συνέχεια εναλλάσσουμε τους άξονες Ox και Oy. Μετά στρέφουμε την κόλλα 90° με φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού και κοιτάζουμε το σχήμα από το πίσω μέρος της κόλλας. Αυτό που βλέπει κανείς είναι το γράφημα της $y = f^{-1}(x)$, που ως γνωστόν είναι το συμμετρικό του γραφήματος της $y = f(x)$ ως προς την ευθεία $y = x$, με τους άξονες στην κανονική τους θέση. Επίσης, η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της καμπύλης $y = f^{-1}(x)$ στο σημείο (x_0, y_0) με τον άξονα Ox είναι η φ και επομένως η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f^{-1}(x)$ στο σημείο (x_0, y_0) ισούται με $\tan\varphi$.

Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα I με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, τότε από το θεώρημα Darboux, παραπέμπουμε στο Πόρισμα 3.52, έπεται ότι η f θα είναι γνήσια μονότονη στο I. Επομένως από το Θεώρημα 3.19 προκύπτει ότι:

Θεώρημα 3.21 (Παραγώγιση αντίστροφης συνάρτησης)**.** *Υποθέσουμε ότι η συνάρτηση* $f : I \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα* I *με* $f'(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in I$*. Τότε η συνάρτηση* f *αντιστρέφεται, η αντίστροφή της* f^{-1} *είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα* $f(I)$ *και ισχύει*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,, \quad \text{για κάθε } y \in f(I)\,. \tag{3.13}$$

Σημείωση. Επειδή $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$*, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του Leibniz ο τύπος* (3.13) *γράφεται και στη μορφή*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}\,. \tag{3.14}$$

Παράδειγμα 3.22. *(i) Η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με*

$$f(x) := \int_0^{x+1} (1 + \cos(\cos t))\, dt$$

αντιστρέφεται και η παράγωγος $(f^{-1})'(0) = (1 + \cos 1)^{-1}$*.*

(ii) Η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $g(x) = x - \sin x$ *αντιστρέφεται και το όριο*

$$\lim_{y\to 0} \frac{g^{-1}(y)}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{6}\,.$$

Λύση.

(i) Είναι $f'(x) = 1 + \cos(\cos(x + 1)) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα και επομένως αντιστρέφεται. Επειδή $f(-1) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = -1$, από τον τύπο (3.12) έχουμε

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{1 + \cos(\cos 0)} = \frac{1}{1 + \cos 1}\,.$$

(ii) Είναι $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως η συνεχής συνάρτηση g είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και κατά συνέπεια αντιστρέφεται. Η αντίστροφη συνάρτηση g^{-1} θα είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα. Είναι $g(0) = 0$ οπότε και $g^{-1}(0) = 0$. Επειδή $x = g^{-1}(y) \Leftrightarrow y = g(x)$ και $\lim_{y\to 0} g^{-1}(y) = g^{-1}(0) = 0$, έπεται ότι το

$x \to 0$ καθώς το $y \to 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0}\left(\frac{g^{-1}(y)}{\sqrt[3]{y}}\right)^3 &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{g(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{6}{\cos x} = 6 \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)}\end{aligned}$$

και επομένως

$$\lim_{y\to 0}\frac{g^{-1}(y)}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{6}\,.$$

■

Παράδειγμα 3.23. *Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο*

$$f'(x) = (1+x^3)^{-1/2} \ \textit{για κάθε}\ x \in I = (-1,\infty)\,,$$

τότε η αντίστροφη συνάρτηση $g = f^{-1}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$g''(x) = \frac{3}{2}g(x)^2 \ \textit{για κάθε}\ x \in f(I)\,.$$

Λύση. Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,\infty)$, η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $I = (-1,\infty)$.

<u>*1ος τρόπος*</u>. Για κάθε $x \in f(I)$ έχουμε

$$\begin{aligned}g'(x) = (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad \text{(από την (3.13))}\\ &= \left\{1+[f^{-1}(x)]^3\right\}^{1/2}\end{aligned}$$

και επομένως

$$g''(x) = \frac{3}{2}\frac{[f^{-1}(x)]^2(f^{-1})'(x)}{\{1+[f^{-1}(x)]^3\}^{1/2}} = \frac{3}{2}[f^{-1}(x)]^2 = \frac{3}{2}g(x)^2\,.$$

<u>*2ος τρόπος*</u>. Για κάθε $y \in f(I)$ έχουμε

$$\begin{aligned}g'(y) = (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{(από την (3.13))}\\ &= (1+x^3)^{1/2}\end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
g''(y) &= \frac{d}{dy}(1+x^3)^{1/2} \\
&= \frac{d}{dx}(1+x^3)^{1/2}\frac{dx}{dy} && \text{(κανόνας αλυσίδας)} \\
&= \frac{1}{2}(1+x^3)^{-1/2}3x^2 \cdot \frac{1}{dy/dx} && \text{(από την (3.14))} \\
&= \frac{3}{2}x^2(1+x^3)^{-1/2} \cdot \frac{1}{(1+x^3)^{-1/2}} && (\tfrac{dy}{dx} = f'(x) = (1+x^3)^{-1/2}) \\
&= \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2}g(y)^2 \,.
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 3.24. *Αν η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα I με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, τότε η δεύτερη παραγωγος της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} υπάρχει και είναι*

$$(f^{-1})''(y) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}\,, \quad \text{για κάθε } y \in f(I)\,.$$

Αν η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα I, να υπολογιστεί η $(f^{-1})'''(y)$.

Λύση. Αν $y = f(x)$, τότε $x = f^{-1}(y)$ και

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{ή} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
(f^{-1})''(y) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} && \text{(κανόνας αλυσίδας)} \\
&= -\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \\
&= -\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3} \cdot \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}\,.
\end{aligned}$$

Αν παραγωγίσουμε και πάλι ως προς y, με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$(f^{-1})'''(y) = \frac{3(f''(x))^2 - f'(x)f'''(x)}{(f'(x))^5}\,.$$

■

3.2 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους

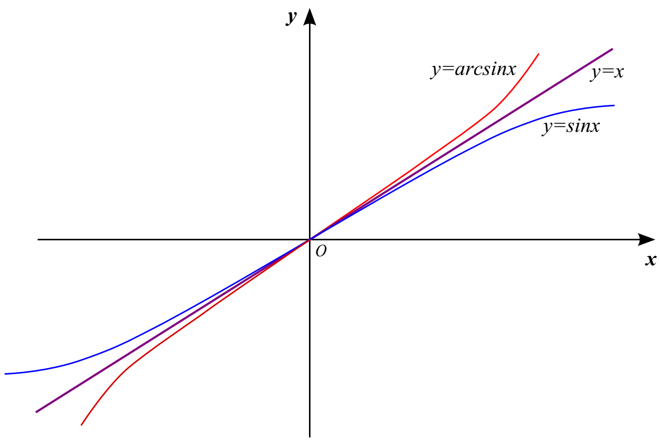
- $\underline{y = \sin x}$

Η συνάρτηση $y = \sin x$ είναι γνήσια μονότονη και συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής

$$I_k = \left[k\pi - \frac{\pi}{2},\, k\pi + \frac{\pi}{2}\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

και έχει πεδίο τιμών το $[-1, 1]$. Σε κάθε ένα από τα διαστήματα I_k η $y = \sin x$ αντιστρέφεται. Η αντίστροφή της συμβολίζεται $y = \arcsin x$ ή $y = \sin^{-1} x$, έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και πεδίο τιμών το I_k. Η $y = \arcsin x$ είναι συνεχής και γνήσια μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας με την $y = \sin x$.

Ειδικά για $k = 0$ η $y = \sin x$ είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Η αντίστροφή της, συμβολίζεται με $y = \arcsin x$ ή $y = \sin^{-1} x$ και λέγεται **πρωτεύον τόξο ημιτόνου**, είναι συνεχής, γνήσια αύξουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και πεδίο τιμών το $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Επομένως

$$\boxed{y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \;\text{ και }\; -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\,.}$$

Είναι

$$\boxed{\begin{array}{l} \arcsin(\sin x) = x \;\text{ για }\; -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \sin(\arcsin x) = x \;\text{ για }\; -1 \leq x \leq 1. \end{array}}$$

Έστω $y = \arcsin x$ με $x \in (-1,1)$. Τότε, $x = \sin y$ με $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ και επομένως

$$(\arcsin x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\sin y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad \forall x \in (-1,1)\ .$$

Άρα

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, && -1 < x < 1 \\ &\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c\,, && -1 < x < 1\,. \end{aligned}}$$

Πιο γενικά έχουμε

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(\arcsin \frac{x}{a}) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,, && -a < x < a,\ a > 0 \\ &\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c\,, && -a < x < a,\ a > 0\,. \end{aligned}}$$

Παράδειγμα 3.25. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$\int_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}\,x - x^2}}\,dx\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}\,x - x^2}}\,dx &= \int_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-(x-\sqrt{2})^2}}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-t^2}}\,dt \qquad\qquad \text{(αντικατάσταση } t = x-\sqrt{2}) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - t^2}}\,dt \\ &= \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \arcsin 0 = \frac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

■

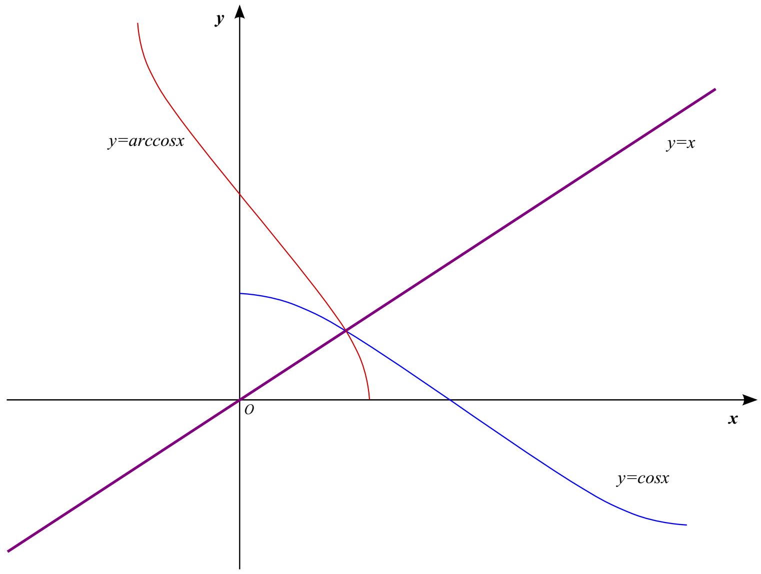
- $y = \cos x$

Η συνάρτηση $y = \cos x$ είναι γνήσια μονότονη και συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής

$$I_k = [k\pi,\ k\pi + \pi]\ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

και έχει πεδίο τιμών το $[-1,1]$. Σε κάθε ένα από τα διαστήματα I_k η $y=\cos x$ αντιστρέφεται. Η αντίστροφή της συμβολίζεται $y=\arccos x$ ή $y=\cos^{-1}x$, έχει πεδίο ορισμού το $[-1,1]$ και πεδίο τιμών το I_k. Η $y=\arccos x$ είναι συνεχής και γνήσια μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας με την $y=\cos x$.

Ειδικά για $k=0$ η $y=\cos x$ είναι γνήσια φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $[0,\,\pi]$. Η αντίστροφή της, συμβολίζεται με $y=\arccos x$ ή $y=\cos^{-1}x$ και λέγεται **πρωτεύον τόξο συνημιτόνου**, είναι συνεχής, γνήσια φθίνουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[-1,1]$ και πεδίο τιμών το $[0,\,\pi]$.



$$\boxed{y=\arccos x \Leftrightarrow x=\cos y \ \text{ και } \ 0\le y\le \pi\,.}$$

Είναι

$$\boxed{\begin{array}{l}\arccos(\cos x)=x \ \text{ για } 0\le x\le \pi \\ \cos(\arccos x)=x \ \text{ για } -1\le x\le 1.\end{array}}$$

Έστω $y=\arccos x$ με $x\in(-1,1)$. Τότε, $x=\cos y$ με $y\in(0,\pi)$ και επομένως

$$(\arccos x)'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d}{dy}(\cos y)}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\quad \forall x\in(-1,1)\;.$$

Άρα

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, && -1 < x < 1 \\ &\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + c\,, && -1 < x < 1\,. \end{aligned}}$$

Πιο γενικά έχουμε

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(\arccos \frac{x}{a}) = -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,, && -a < x < a,\ a > 0 \\ &\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\arccos \frac{x}{a} + c\,, && -a < x < a,\ a > 0\,. \end{aligned}}$$

Παράδειγμα 3.26. *Για κάθε $x \in [-1,1]$ ισχύει η ταυτότητα*

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Λύση. Έστω $f(x) := \arcsin x + \arccos x$, $x \in [-1,1]$. Τότε,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \ \text{για κάθε } x \in (-1,1)$$

και κατά συνέπεια $f(x) = c$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Είναι

$$c = f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

και επομένως $f(x) = \arcsin x + \arccos x = \pi/2$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$, έπεται ότι

$$f(-1) = \arcsin(-1) + \arccos(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

και

$$f(1) = \arcsin 1 + \arccos 1 = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Σημείωση. Χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τη συνέχεια της συνάρτησης f, εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$\arcsin(-1) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} \ \text{ και } \ \arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}\,.$$

■

Παράδειγμα 3.27. *Αν*

$$F(x) := \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

τότε η συνάρτηση F είναι σταθερή και ισούται με $\pi/4$.

Λύση.

- Επειδή $F(x+\pi) = F(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση F είναι π-περιοδική. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι $F(x) = \pi/4$ για κάθε $x \in I$, όπου I είναι ένα οποιοδήποτε διάστημα στο $\mathbb{R}$ μήκους π. Παίρνουμε $I = [-\pi/2,\, \pi/2]$.

- Παρατηρούμε ότι $F(-x) = F(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση F είναι άρτια. Άρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι $F(x) = \pi/4$ για κάθε $x \in [0,\, \pi/2]$.

Παραγωγίζοντας την F, για κάθε $x \in [0,\, \pi/2]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \arcsin\sqrt{\sin^2 x}\cdot(\sin^2 x)' + \arccos\sqrt{\cos^2 x}\cdot(\cos^2 x)' \\
&= \arcsin(\sin x)\cdot 2\sin x\cos x + \arccos(\cos x)\cdot(-2\cos x\sin x) \\
&= 2x\sin x\cos x - 2x\sin x\cos x = 0
\end{aligned}$$

και κατά συνέπεια $F(x) = c$ για κάθε $x \in [0,\, \pi/2]$. Επομένως για κάθε $x \in [0,\, \pi/2]$ είναι

$$\begin{aligned}
F(x) &= F\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \int_0^{\sin^2(\pi/4)} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2(\pi/4)} \arccos\sqrt{t}\,dt \\
&= \int_0^{1/2} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{1/2} \arccos\sqrt{t}\,dt \\
&= \int_0^{1/2} \left(\arcsin\sqrt{t} + \arccos\sqrt{t}\right)\,dt \\
&= \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2}\,dt = \frac{\pi}{4}\,. && (\arcsin\sqrt{t} + \arccos\sqrt{t} = \tfrac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

■

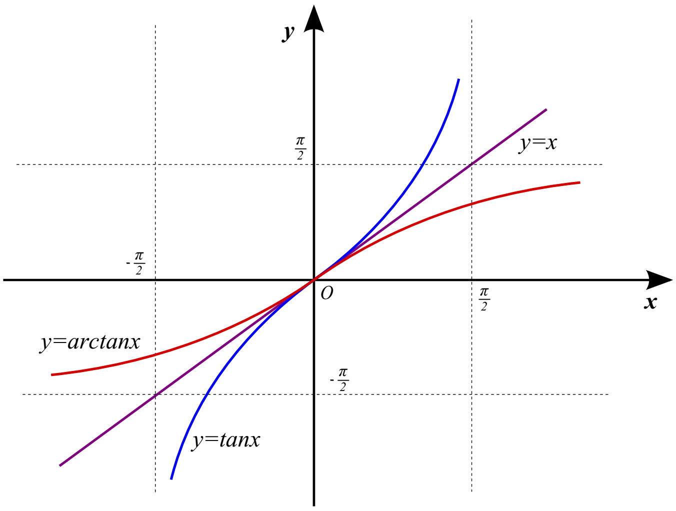
- $y = \tan x$

  Η συνάρτηση $y = \tan x$ είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής

  $$I_k = \left(k\pi - \frac{\pi}{2},\, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

  και έχει πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Σε κάθε ένα από τα διαστήματα I_k η $y = \tan x$ αντιστρέφεται. Η αντίστροφή της συμβολίζεται $y = \arctan x$ ή $y = \tan^{-1} x$, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το I_k. Η $y = \arctan x$ είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ειδικά για $k = 0$ η $y = \tan x$ είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Η αντίστροφή της, συμβολίζεται με $y = \arctan x$ ή $y = \tan^{-1} x$ και λέγεται **πρωτεύον τόξο εφαπτομένης**, είναι συνεχής, γνήσια αύξουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



$$\boxed{y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y \;\; \text{και} \;\; -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}}$$

με

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}\,.}$$

Είναι

$$\boxed{\begin{aligned} &\arctan(\tan x) = x \;\; \text{για} \; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ &\tan(\arctan x) = x \;\; \text{για} \; x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}}$$

Έστω $y = \arctan x$ με $x \in \mathbb{R}$. Τότε, $x = \tan y$ με $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ και επομένως

$$(\arctan x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\tan y)} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Άρα

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\arctan x) &= \frac{1}{1+x^2}\,, & x \in \mathbb{R} \\ \int \frac{1}{1+x^2} &= \arctan x + c\,, & x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}}$$

Πιο γενικά έχουμε

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\arctan\frac{x}{a}) &= \frac{a}{a^2+x^2}\,, & a\neq 0,\ x\in\mathbb{R} \\ \int \frac{1}{a^2+x^2} &= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c\,, & a\neq 0,\ x\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}}$$

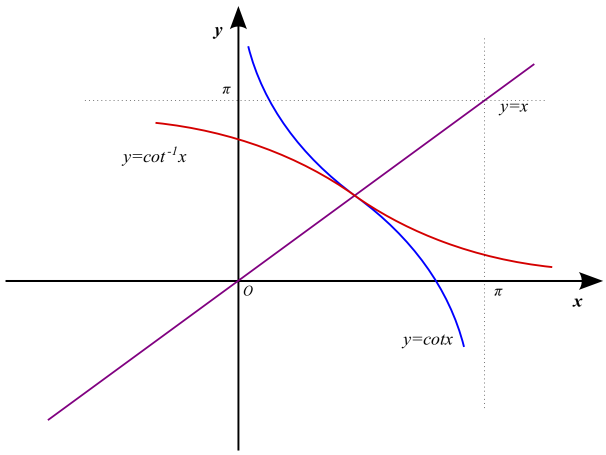
- $\underline{y=\cot x}$

Η συνάρτηση $y=\cot x$ είναι γνήσια φθίνουσα και συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής

$$I_k=(k\pi,\, k\pi+\pi)\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

και έχει πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Σε κάθε ένα από τα διαστήματα I_k η $y=\cot x$ αντιστρέφεται. Η αντίστροφή της συνήθως συμβολίζεται με $y=\cot^{-1}x$(ή $y=\operatorname{arccot}x$), έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το I_k. Η $y=\cot^{-1}x$ είναι συνεχής και γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Ειδικά για $k=0$ η $y=\cot x$ είναι γνήσια φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $(0,\,\pi)$. Η αντίστροφή της συνήθως συμβολίζεται με $y=\cot^{-1}x$(ή $y=\operatorname{arccot}x$) και λέγεται **πρωτεύον τόξο συνεφαπτομένης**. Η $y=\cot^{-1}x$ είναι συνεχής, γνήσια φθίνουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το $(0,\,\pi)$.



Επομένως

$$\boxed{y=\cot^{-1}x \Leftrightarrow x=\cot y \ \text{ και } \ 0<y<\pi}$$

με

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\cot^{-1}x=\pi \ \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\cot^{-1}x=0\,.}$$

Είναι

$$\boxed{\begin{aligned} &\cot^{-1}(\cot x) = x \;\; \text{για } 0 < x < \pi \\ &\cot(\cot^{-1} x) = x \;\; \text{για } x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}}$$

Έστω $y = \cot^{-1} x$ με $x \in \mathbb{R}$. Τότε, $x = \cot y$ με $y \in (0, \pi)$ και επομένως

$$\left(\cot^{-1} x\right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\cot y)} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Άρα

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) &= -\frac{1}{1+x^2}\,, && x \in \mathbb{R} \\ \int \frac{1}{1+x^2} &= -\cot^{-1} x + c\,, && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}}$$

Πιο γενικά έχουμε

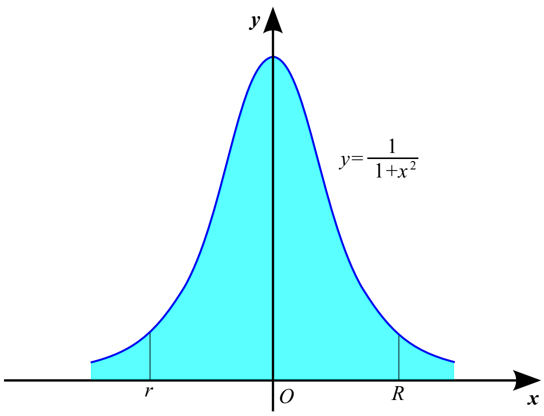
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right) &= -\frac{a}{a^2+x^2}\,, && a \neq 0,\ x \in \mathbb{R} \\ \int \frac{1}{a^2+x^2} &= -\frac{1}{a}\cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c\,, && a \neq 0,\ x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει η παρακάτω ταυτότητα:

$$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

Παράδειγμα 3.28. *Το γενικευμένο ολοκλήρωμα*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{\substack{r \to -\infty \\ R \to +\infty}} \int_r^R \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi\,.$$



Είναι

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{\substack{r\to-\infty\\ R\to+\infty}} \int_r^R \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \lim_{\substack{r\to-\infty\\ R\to+\infty}} \left(\arctan x\Big|_{x=r}^{x=R}\right) \\
&= \lim_{R\to+\infty} \arctan R - \lim_{r\to-\infty} \arctan r \\
&= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi\,.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.29. *(α') Αν $x, y \in \mathbb{R}$, με $xy \neq -1$ και $-\frac{\pi}{2} < \arctan x - \arctan y < \frac{\pi}{2}$, τότε*

$$\arctan x - \arctan y = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right).$$

(β') Αν $x, y \in \mathbb{R}$, με $xy \neq 1$ και $-\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y < \frac{\pi}{2}$, τότε

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

(γ') Αν $x \in (0, \infty)$, τότε

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\,.$$

(δ') Αν $x \in (-\infty, 0)$, τότε

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Λύση.

(α') Έστω $u = \arctan x$ και $v = \arctan y$. Τότε $x = \tan u$ και $y = \tan v$, με $u, v \in (-\pi/2, \pi/2)$. Επειδή από την υπόθεση το $u - v \in (-\pi/2, \pi/2)$, είναι

$$\begin{aligned}
\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v} = \frac{x-y}{1+xy} &\Leftrightarrow u - v = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) \\
&\Leftrightarrow \arctan x - \arctan y = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right).
\end{aligned}$$

(β')

$$\arctan x + \arctan y = \arctan x - \arctan(-y) \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right). \qquad \text{(από το (α'))}$$

(γ') Για κάθε $x \in (0, \infty)$ είναι

$$\left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

και επομένως $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = c$. Όμως $\arctan 1 + \arctan 1 = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2 = c$, οπότε $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

(δ') Αν $x \in (-\infty, 0)$, τότε

$$-\left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}\right) = \arctan(-x) + \arctan\left(\frac{1}{-x}\right) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{(από το (β'))}$$

και επομένως $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

■

Παράδειγμα 3.30. *Αν*

$$F(x) := \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\, dt\,, \quad x > 0\,,$$

τότε η συνάρτηση F είναι σταθερή και ισούται με $\pi/2$.

Λύση. Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} F(x) &= \arctan t\big|_{t=0}^{t=x} + \arctan t\big|_{t=0}^{t=1/x} \\ &= (\arctan x - \arctan 0) + (\arctan(1/x) - \arctan 0) \\ &= \arctan x + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}\,. \qquad \text{(Παράδειγμα 3.29 (γ'))} \end{aligned}$$

Σημείωση. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι για κάθε $x < 0$ είναι

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\, dt = -\frac{\pi}{2}\,.$$

■

Παράδειγμα 3.31. *Ισχύει η ταυτότητα*

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}\,. \tag{3.15}$$

Λύση. Αν $x = \arctan(1/5)$, τότε $\tan x = 1/5$. Επομένως

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2/5}{1-(1/5)^2} = \frac{5}{12}$$

και

$$\tan 4x = \frac{2\tan 2x}{1-\tan^2 2x} = \frac{5/6}{1-(5/12)^2} = \frac{120}{119}\,.$$

Ισοδύναμα, $4x = \arctan(120/119) \Leftrightarrow 4\arctan(1/5) = \arctan(120/119)$. Επειδή

$$\frac{\pi}{4} < \arctan\frac{120}{119} < \frac{\pi}{2} \text{ και } 0 < \arctan\frac{1}{239} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \arctan\frac{120}{119} - \arctan\frac{1}{239} < \frac{\pi}{2}\,,$$

είναι

$$\begin{aligned} 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} &= \arctan\frac{120}{119} - \arctan\frac{1}{239} \\ &= \arctan\left(\frac{120/119 - 1/239}{1+120/(119\cdot 239)}\right) && \text{(Παράδειγμα 3.29 (α'))} \\ &= \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

<u>*Σημείωση*</u>. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της συνάρτησης $y = \arctan x$ σε δυναμοσειρά, καθώς επίσης και την ταυτότητα (3.15), μπορούμε να προσεγγίσουμε με μεγάλη ακρίβεια τον αριθμό π.

■

3.3 Υπερβολικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους

Τις συναρτήσεις

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{και} \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

ονομάζουμε **υπερβολικό ημίτονο**, **υπερβολικό συνημίτονο** και **υπερβολική εφαπτομένη** αντίστοιχα. Από τον ορισμό της $y = \cosh x$ είναι προφανές ότι $\cosh x \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τη συνάρτηση

$$\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,,$$

ονομάζουμε **υπερβολική συνεφαπτομένη**.

Εύκολα αποδεικνύονται οι παρακάτω ταυτότητες:

(i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad x \in \mathbb{R},$

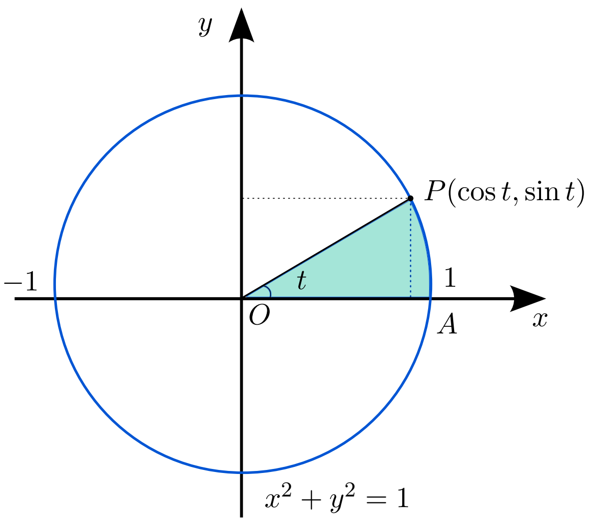
(ii) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y, \quad x, y \in \mathbb{R},$

(iii) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y, \quad x, y \in \mathbb{R},$

(iv) $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}.$

Παρατήρηση 3.32. *Ως γνωστόν οι παραμετρικές εξισώσεις του μοναδιαίου κύκλου* $x^2 + y^2 = 1$ *είναι οι*

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned} \right\}, \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$



Έστω $P(x, y)$ *σημείο του μοναδιαίου κύκλου. Αν* t *είναι η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα* OP *με τον άξονα* Ox, *τότε* $x = \cos t$ *και* $y = \sin t$. *Ας σημειωθεί ότι το εμβαδόν του κυκλικού τομέα* OAP *ισούται με* $t/2$.

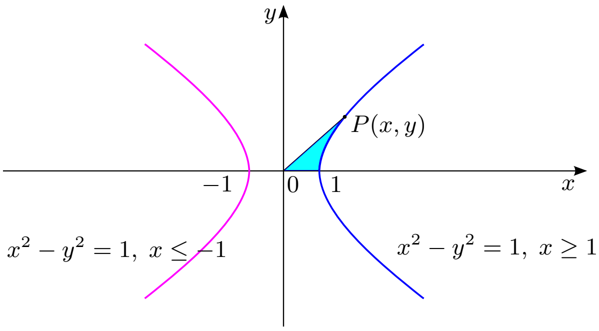
Θεωρούμε τώρα την **ισοσκελή υπερβολή**: $x^2 - y^2 = 1$. *Θα αποδείξουμε ότι οι παραμετρικές εξισώσεις του* **δεξιού κλάδου της ισοσκελούς υπερβολής**:

$$x^2 - y^2 = 1\,,\ x \geq 1 \text{ και ισοδύναμα } x = \sqrt{y^2 + 1}\,,$$

είναι οι

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \cosh t \\ y &= \sinh t \end{aligned} \right\}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Αυτός είναι ο λόγος που οι συναρτήσεις sinh, cosh *ονομάζονται ¨υπερβολικές¨.*



Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το σημείο $P(x,y)$ με $x = \cosh t$, $y = \sinh t$ ανήκει στο δεξιό κλάδο της ισοσκελούς υπερβολής: $x^2 - y^2 = 1$, $x \geq 1$, επειδή $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ και $x = \cosh t \geq 1$.
Αντίστροφα, έστω $P(x,y)$ σημείο του δεξιού κλάδου της υπερβολής: $x^2 - y^2 = 1$, $x \geq 1$. Όπως θα δείξουμε στη μελέτη του υπερβολικού ημιτόνου, η συνάρτηση $y = \sinh x$ είναι γνήσια αύξουσα με πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Επομένως για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό $t \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $y = \sinh t$. Τότε,

$$\begin{aligned} \cosh t &= \sqrt{\sinh^2 t + 1} \qquad\qquad (\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \text{ και } \cosh t \geq 1 \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}) \\ &= \sqrt{y^2+1} = x\,. \end{aligned}$$

Άρα $P(x,y) = P(\cosh t, \sinh t)$, για κάποιο μοναδικό $t \in \mathbb{R}$.
Είναι αξιοσημείωτο ότι όπως στην περίπτωση του μοναδιαίου κύκλου, έτσι και στην περίπτωση της ισοσκελούς υπερβολής το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα Ox, το ευθύγραμμο τμήμα OP και το δεξιό κλάδο της υπερβολής $y = \sqrt{x^2-1}$, $x \geq 1$, ισούται με $t/2$ (άσκηση 17).

Παράγωγοι των υπερβολικών συναρτήσεων

Εύκολα υπολογίζονται οι παράγωγοι των υπερβολικών συναρτήσεων. Είναι

$$(\sinh x)' = \cosh x\,, \quad (\cosh x)' = \sinh x\,, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

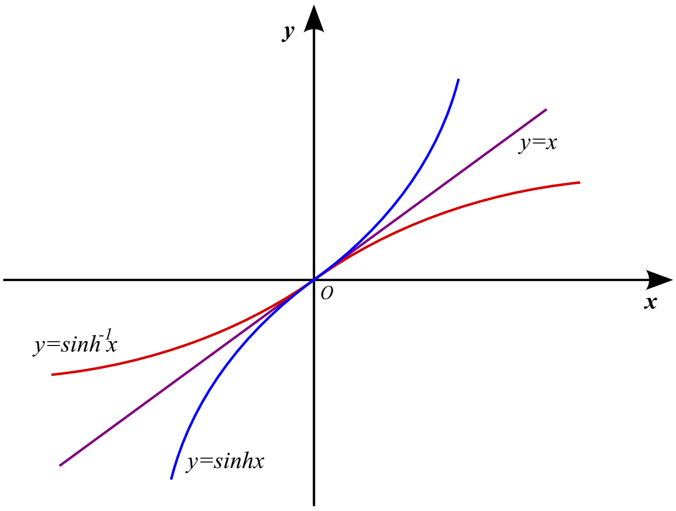
$$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

- **Το υπερβολικό ημίτονο $y = \sinh x$ και η αντίστροφη συνάρτηση $y = \sinh^{-1} x$**

  Είναι $(\sinh x)' = \cosh x \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \sinh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty\,.$$

Επομένως η συνάρτηση $y = \sinh x$ είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Η αντίστροφή της $y = \sinh^{-1} x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι επίσης γνήσια αύξουσα και συνεχής.



Μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση $y = \sinh^{-1} x$ με τη βοήθεια του λογαρίθμου. Είναι

$$y = \sinh^{-1} x \Leftrightarrow x = \sinh y \Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0\,.$$

Η λύση της εξίσωσης: $(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$ είναι $e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$. Επειδή $e^y > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})\,.$$

Επομένως

$$\boxed{y = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

με παράγωγο

$$\boxed{(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.}$$

Άρα

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} &= \sinh^{-1} x + c\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}}$$

Πιο γενικά έχουμε

$$\frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ a>0$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ a>0$$

ή

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + c\,, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ a \neq 0\,.$$

Παράδειγμα 3.33. *Η διαφορική εξίσωση*

$$(1+x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 4y = 0 \tag{3.16}$$

με την αντικατάσταση $t = \sinh^{-1} x \Leftrightarrow x = \sinh t$ *μετασχηματίζεται στη γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές*

$$\frac{\mathrm{d}^2y^*}{\mathrm{d}t^2} - 4y^* = 0\,, \tag{3.17}$$

όπου $y^*(t) = y(\sinh t)$. *Η γενική λύση της* (3.17) *είναι*

$$y^*(t) = c_1\mathrm{e}^{-2t} + c_2\mathrm{e}^{2t}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Επειδή $t = \sinh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$, *η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης* (3.16) *είναι*

$$y(x) = c_1(x+\sqrt{1+x^2})^{-2} + c_2(x+\sqrt{1+x^2})^2\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Λύση. Είναι $y(x) = y^*(t(x))$, όπου $t(x) = \sinh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

1ος τρόπος. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

και

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 y^*}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\,.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ και το $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ στη διαφορική εξίσωση (3.16) παίρνουμε

$$(1+x^2)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^2 y^*}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\right) + x\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 4y^* = 0$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\mathrm{d}^2 y^*}{\mathrm{d}t^2} - 4y^* = 0\,.$$

<u>*2ος τρόπος*</u>. Επειδή $x(t) = \sinh t$, από το Θεώρημα 3.21 έχουμε $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{1}{\cosh t}$. Επομένως

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cosh t}\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}$$

και

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\cosh t}\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\cosh t}\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} && \text{(κανόνας αλυσίδας)} \\
&= \left(-\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\cosh t}\frac{\mathrm{d}^2 y^*}{\mathrm{d}t^2}\right)\frac{1}{\cosh t} \\
&= \frac{1}{\cosh^2 t}\frac{\mathrm{d}^2 y^*}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\sinh t}{\cosh^3 t}\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\,.
\end{aligned}$$

Επειδή $1+x^2 = 1+\sinh^2 t = \cosh^2 t$, αντικαθιστώντας το x, το $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ και το $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ στη διαφορική εξίσωση (3.16) παίρνουμε

$$\cosh^2 t\left(\frac{1}{\cosh^2 t}\frac{\mathrm{d}^2y^*}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\sinh t}{\cosh^3 t}\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}\right) + \sinh t\frac{1}{\cosh t}\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t} - 4y^* = 0$$

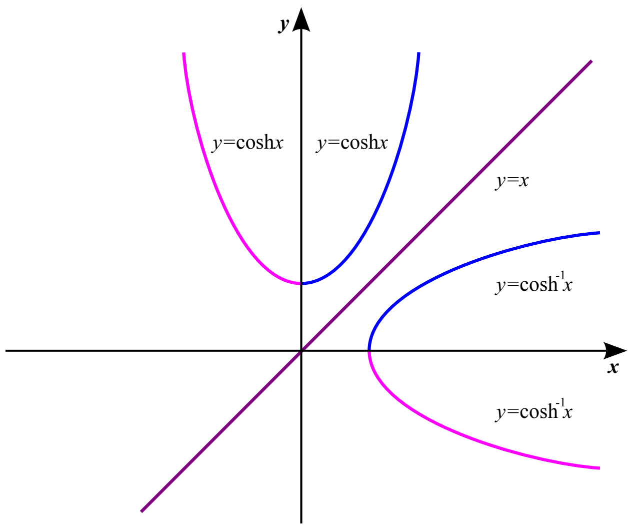
και ισοδύναμα

$$\frac{\mathrm{d}^2y^*}{\mathrm{d}t^2} - 4y^* = 0\,.$$

■

- **Το υπερβολικό συνημίτονο** $y = \cosh x$ **και η αντίστροφη συνάρτηση** $y = \cosh^{-1} x$

Για κάθε $x > 0$ είναι $(\cosh x)' = \sinh x > 0$ κα για κάθε $x < 0$ είναι $(\cosh x)' = \sinh x < 0$. Επειδή $\cosh 0 = 1$ και $\lim_{x\to\pm\infty}\cosh x = \infty$, το πεδίο τιμών της $y = \cosh x$ είναι το $[1, +\infty)$. Η $y = \cosh x$ είναι γνήσια αύξουσα για κάθε $x \geq 0$ και γνήσια φθίνουσα για κάθε $x \leq 0$. Επομένως, η αντίστροφη της $\cosh x : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ είναι η $\cosh^{-1} x : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ και η αντίστροφη της $\cosh x : (-\infty, 0] \to [1, +\infty)$ είναι η $\cosh^{-1} x : [1, +\infty) \to (-\infty, 0]$.



Όπως και στην περίπτωση της $y = \sinh^{-1} x$, μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση $y = \cosh^{-1} x$ με τη βοήθεια του λογαρίθμου. Εύκολα αποδεικνύεται (άσκηση) ότι για την

(αʹ) $\cosh^{-1} x : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ είναι

$$\boxed{y = \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\,, \quad \forall x \geq 1}$$

με παράγωγο

$$\boxed{(\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,, \quad \forall x > 1}$$

και για την

(β') $\cosh^{-1} x : [1, +\infty) \to (-\infty, 0]$ έχουμε

$$\boxed{y = \cosh^{-1} x = \ln(x - \sqrt{x^2-1})\,, \quad \forall x \geq 1}$$

με παράγωγο

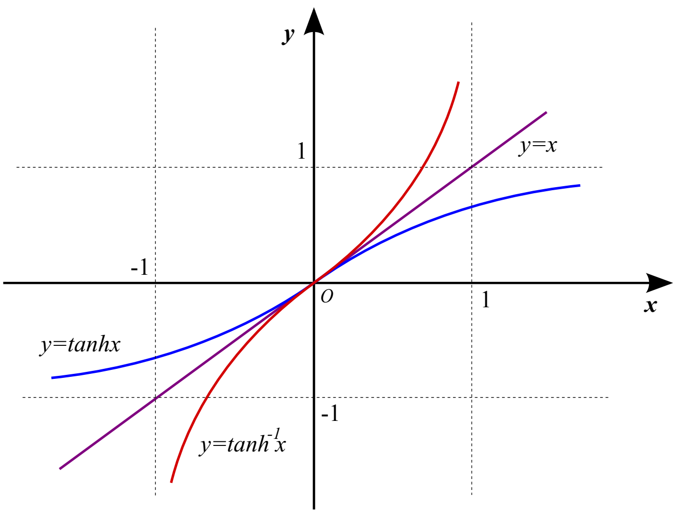
$$\boxed{(\cosh^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,, \quad \forall x > 1\,.}$$

- **Η υπερβολική εφαπτομένη $y = \tanh x$ και η αντίστροφη συνάρτηση $y = \tanh^{-1} x$**

Είναι $(\tanh x)' = 1/\cosh^2 x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = -1\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1\,.$$

Επομένως η συνάρτηση $y = \tanh x$ είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το $(-1, 1)$. Η αντίστροφή της $y = \tanh^{-1} x : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ είναι επίσης γνήσια αύξουσα και συνεχής.



Μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση $y = \tanh^{-1} x$ με τη βοήθεια του λογαρίθμου. Είναι

$$y = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow x = \tanh y \Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

και κατά συνέπεια

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1 .$$

Επομένως

$$\boxed{y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1}$$

με παράγωγο

$$\boxed{(\tanh^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1 .}$$

- **Η υπερβολική συνεφαπτομένη** $y = \coth x$ **και η αντίστροφη συνάρτηση** $y = \coth^{-1} x$

Είναι $(\coth x)' = -1/\sinh^2 x < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ με

$$\lim_{x\to 0^-} \coth x = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} \coth x = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = +\infty .$$

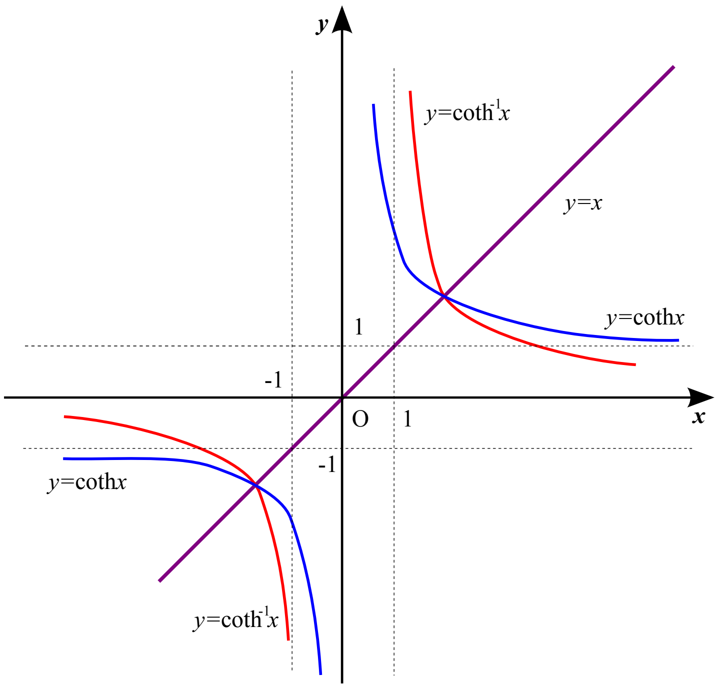
Επίσης

$$\lim_{x\to -\infty} \coth x = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = -1$$

και

$$\lim_{x\to +\infty} \coth x = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = 1 .$$

Επομένως η συνάρτηση $y = \coth x$ είναι γνήσια φθίνουσα και συνεχής με πεδίο ορισμού το $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και πεδίο τιμών το $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Η αντίστροφή της $y = \coth^{-1} x : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ είναι επίσης γνήσια φθίνουσα και συνεχής.



Εύκολα μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση $y = \coth^{-1} x$ με τη βοήθεια του λογαρίθμου. Είναι

$$y = \coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) , \quad |x| > 1 .$$

Επομένως

$$\boxed{y = \coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) , \quad |x| > 1}$$

με παράγωγο

$$\boxed{(\coth^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2} , \quad |x| > 1 .}$$

3.4 Το θεώρημα μέσης τιμής και το θεώρημα Darboux

Το θεώρημα μέσης τιμής είναι σημαντικό επειδή συνδέει τις τιμές μιας συνάρτησης με τις τιμές της παραγώγους της. Αρχίζουμε με τον ορισμό του τοπικού ελάχιστου και του τοπικού μέγιστου μιας συνάρτησης.

Ορισμός 3.34. *Η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ έχει* **τοπικό ελάχιστο***(αντίστοιχα,* **τοπικό μέγιστο***) στο σημείο x_0 του διαστήματος I αν υπάρχει περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ του x_0, τέτοια ώστε $f(x) \geq$*

$f(x_0)$(αντίστοιχα, $f(x) \leq f(x_0)$) για κάθε $x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta) \cap I$. Θα λέμε ότι η f έχει **τοπικό ακρότατο** *στο $x_0 \in I$ αν έχει είτε τοπικό ελάχιστο ή τοπικό μέγιστο στο x_0.*
Η συνάρτηση f έχει **ελάχιστο**(*αντίστοιχα,* **μέγιστο**) *στο σημείο $x_0 \in I$, αν $f(x) \geq f(x_0)$ (αντίστοιχα, $f(x) \leq f(x_0)$) για κάθε $x \in I$.*

Το παρακάτω αποτέλεσμα συνδέει το τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο μιας συνάρτησης ορισμένης σε ένα διάστημα με τις τιμές της παραγώγους της.

Θεώρημα 3.35 (Fermat). *Έστω η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ έχει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος I. Αν η παράγωγος $f'(x_0)$ υπάρχει, τότε $f'(x_0) = 0$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση που η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο x_0 (η απόδειξη είναι παρόμοια αν η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο x_0).
Επειδή η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0, υπάρχει περιοχή $(x_0 - \delta,\, x_0 + \delta) \subseteq I$ του x_0 τέτοια ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$. Τότε,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0\,, \text{ αν } x_0 - \delta < x < x_0 \text{ και } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0\ , \text{ αν } x_0 < x < x_0 + \delta\,.$$

Επομένως,

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{και} \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0\,.$$

Άρα, επειδή $f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0)$, έχουμε ότι $f'(x_0) = 0$. □

Πόρισμα 3.36. *Έστω η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα I και έστω η f έχει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο $x_0 \in I$. Τότε είτε η παράγωγος $f'(x_0)$ δεν υπάρχει, ή $f'(x_0) = 0$.*

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και έχει ελάχιστο στο 0. Όμως η παράγωγος $f'(0)$ δεν υπάρχει, είναι $f'_-(0) = -1$ και $f'_+(0) = 1$.
Πριν από το θεώρημα μέσης τιμής θα αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα που οφείλεται στον Michel Rolle(1652- 1719).

Θεώρημα 3.37 (Rolle). *Έστω η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a,b). Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. – Αν $f(x) = c$ για κάθε $x \in [a,b]$, δηλαδή η f είναι σταθερή, τότε $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

– Έστω η f δεν είναι σταθερή. Επειδή η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a,b]$ με

$$f(x_1) = \min_{a \le x \le b} f(x) \quad \text{και} \quad f(x_2) = \max_{a \le x \le b} f(x)\,.$$

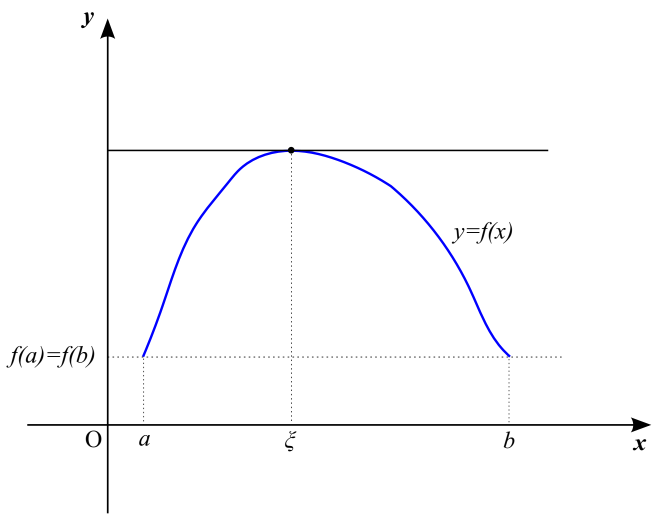
- Αν $x_1 \in (a,b)$, από το Θεώρημα Fermat θα είναι $f'(x_1) = 0$. Αν $x_2 \in (a,b)$, παρόμοια θα είναι $f'(x_2) = 0$.

- Δεν μπορεί να είναι $x_1 = a$ και $x_2 = b$ ή $x_1 = b$ και $x_2 = a$, γιατί τότε

$$f(a) = f(x_1) < f(x_2) = f(b) \quad \text{ή} \quad f(a) = f(x_2) > f(x_1) = f(b)\,.$$

(άτοπο, επειδή $f(a) = f(b)$)

<u>*Σημείωση*</u>. Γεωμετρικά, το θεώρημα Rolle μας λέει ότι αν $f(a) = f(b)$ τότε υπάρχει ξ στο διάστημα (a,b), τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα Ox. □



Θεώρημα 3.38 (Γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy). *Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα (a, b). Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)\,. \tag{3.18}$$

Απόδειξη. Έστω

$$h(x) := (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)\,.$$

Η h είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) με

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)\,.$$

Επομένως από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0\,.$$

□

Αν $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε $g(a) \neq g(b)$ και επομένως η (3.18) μπορεί να γραφεί ως εξής

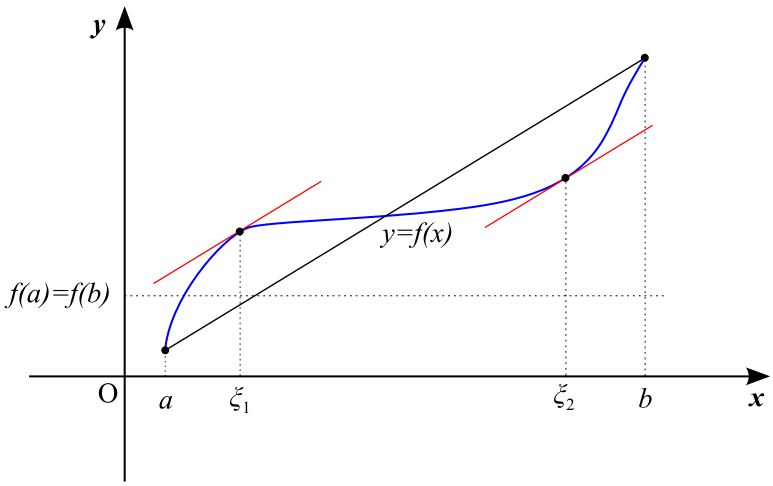
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,, \quad \text{για κάποιο } \xi \in (a, b)\,. \tag{3.19}$$

Θεώρημα 3.39 (Θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange). *Έστω η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b). Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)\,. \tag{3.20}$$

Απόδειξη. Είναι εφαρμογή του γενικευμένου θεωρήματος μέσης τιμής του Cauchy για $g(x) = x$, για κάθε $x \in [a, b]$. □

Σημείωση. Γεωμετρικά, το θεώρημα μέσης τιμής αναφέρει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ στο διάστημα (a,b), τέτοιο ώστε η κλίση της εφαπτομένης στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι ίση με την κλίση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.



Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα τα a, $a+h$, $h \neq 0$ και παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο ανοικτό διάστημα, τότε η (3.20) γράφεται και στη μορφή

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h) \quad \text{για κάποιο } \theta \in (0,1)\,. \tag{3.21}$$

Παράδειγμα 3.40. *Αν η συνάρτηση $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) με $b-a \geq 4$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε*

$$|f'(\xi)| < 1 + f^2(\xi)\,.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $F(x) := \arctan f(x)$, $x \in (a,b)$. Έστω $x_1, x_2 \in (a,b)$ με $a < x_1 < x_2 < b$. Τότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε

$$F(x_2) - F(x_1) = F'(\xi)(x_2 - x_1) \Leftrightarrow \arctan f(x_2) - \arctan f(x_1) = \frac{f'(\xi)}{1+f^2(\xi)}(x_2 - x_1)\,.$$

Επειδή $-\pi/2 < \arctan f(x_1), \arctan f(x_2) < \pi/2$, είναι $-\pi < \arctan f(x_2) - \arctan f(x_1) < \pi$ και ισοδύναμα $|\arctan f(x_2) - \arctan f(x_1)| < \pi$. Επομένως

$$\pi > |\arctan f(x_2) - \arctan f(x_1)| = \frac{|f'(\xi)|}{1+f^2(\xi)}(x_2 - x_1)$$

και κατά συνέπεια

$$\frac{|f'(\xi)|}{1+f^2(\xi)} < \frac{\pi}{x_2 - x_1}\,.$$

Επειδή $b-a \geq 4$, μπορούμε να επιλέξουμε τα $x_1, x_2 \in (a,b)$ έτσι ώστε $x_2 - x_1 > \pi$. Τότε,

$$\frac{|f'(\xi)|}{1+f^2(\xi)} < \frac{\pi}{\pi} = 1 \Leftrightarrow |f'(\xi)| < 1 + f^2(\xi)\,.$$

■

Παράδειγμα 3.41. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Αν $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$.*
Αν $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, είναι $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$;

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x) := f(x) - \lambda x$. Επειδή $g'(x) = f'(x) - \lambda$, από την υπόθεση $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$. Επομένως για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x > M$ είναι $|g'(x)| < \varepsilon$. Έστω x σταθερό, $x > M$. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (M,x)$ τέτοιο ώστε

$$g(x) - g(M) = g'(\xi)(x-M)\,.$$

Τότε, για κάθε $x > M$ έχουμε

$$\left|\frac{g(x)-g(M)}{x}\right| = \frac{x-M}{x}|g'(\xi)| < \frac{x-M}{x}\varepsilon < \varepsilon\,.$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)-g(M)}{x} = 0$. Όμως $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(M)}{x} = 0$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ και αυτό συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$.

Σημείωση. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Έστω $f(x) = x + \sin x$. Τότε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

ενώ το όριο $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}(1+\cos x)$ δεν υπάρχει. ■

Πόρισμα 3.42. *Έστω η συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a,b) με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε η f είναι σταθερή στο κλειστό διάστημα $[a,b]$.*

Απόδειξη. Αν $x \in [a,b]$ με $x > a$, από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) \quad \text{για κάποιο } \xi \in (a,x)\,.$$

Από την υπόθεση είναι $f'(\xi) = 0$ και επομένως $f(x) = f(a)$ για κάθε $x \in [a,b]$. □

Πόρισμα 3.43. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα I.*

(α΄) $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$ αν και μόνο αν η f είναι αύξουσα στο I.

(β΄) $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in I$ αν και μόνο αν η f είναι φθίνουσα στο I.

(γ΄) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in I$, τότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο I. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.

(δ΄) Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in I$, τότε η f είναι γνήσια φθίνουσα στο I. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.

Απόδειξη. (α΄) Έστω $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$. Αν $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$, από το θεώρημα μέσης τιμής

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad \text{για κάποιο } \xi \in (x_1, x_2)\,.$$

Επειδή $f'(\xi) \geq 0$, έπεται ότι $f(x_2) \geq f(x_1)$. Δηλαδή η f είναι αύξουσα στο I.

Αντίστροφα, έστω η συνάρτηση f είναι αύξουσα στο I και έστω $x_0 \in I$. Τότε, για $x > x_0$ ή $x < x_0$ είναι

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0\,.$$

(β΄) Προκύπτει από την (α΄) θεωρώντας τη συνάρτηση $-f$.

(γ΄) Έστω $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in I$. Όπως και στην (α΄) αποδεικνύεται ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο I. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Όμως, $f'(0) = 0$.

(δ΄) Προκύπτει από τη (γ΄) θεωρώντας τη συνάρτηση $-f$.

□

Παράδειγμα 3.44. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $y = f(x) = 2x + 2x^2 + x^3$.*

(α΄) Η f είναι $1-1$ και επί.

(β΄) Να βρεθεί $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |f^{-1}(y)| \leq \alpha |y|\,. \tag{3.22}$$

Λύση.

(α΄) – Είναι $f'(x) = 2 + 4x + 3x^2$ με διακρίνουσα $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 < 0$. Επομένως $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κατά συνέπεια η f είναι γνήσια αύξουσα.

– Έστω $y \in \mathbb{R}$. Επειδή $f(x) = x^3 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$, για κάθε $x \neq 0$, είναι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Τότε υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(a) < y < f(b)$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x \in (a, b)$ με $f(x) = y$. Επομένως η συνάρτηση f είναι επί.

(β΄) Επειδή η f είναι $1-1$ και επί, η (3.22) είναι ισοδύναμη με την: $|x| \leq \alpha|2x + 2x^2 + x^3|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Αρκεί λοιπόν να βρεθούν εκείνα τα $\alpha > 0$ για τα οποία ισχύει η ανισότητα

$$|2\alpha + 2\alpha x + \alpha x^2| \geq 1\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Τότε έχουμε είτε $2\alpha + 2\alpha x + \alpha x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \alpha x^2 + 2\alpha x + (2\alpha - 1) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $2\alpha + 2\alpha x + \alpha x^2 \leq -1 \Leftrightarrow \alpha x^2 + 2\alpha x + (2\alpha + 1) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

– Επειδή $\alpha > 0$, η ανισότητα $\alpha x^2 + 2\alpha x + (2\alpha - 1) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι ισοδύναμη με $\Delta = (2\alpha)^2 - 4\alpha(2\alpha - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1$.

– Επειδή $\alpha > 0$, η ανισότητα $\alpha x^2 + 2\alpha x + (2\alpha + 1) \leq 0$ δεν ισχύει για κανένα $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η (3.22) ισχύει για κάθε $\alpha \geq 1$

■

Πρόταση 3.45 (Κριτήριο πρώτης παραγώγου για ακρότατα). *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$, έστω x_0 εσωτερικό σημείο του $[a, b]$ και έστω $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [a, b]$ περιοχή του x_0. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στα ανοικτά διαστήματα (a, x_0) και (x_0, b).*

(α΄) Αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

(β΄) Αν $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

Απόδειξη. (α΄) Έστω $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_x \in (x, x_0)$, τέτοιο ώστε

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x)(x - x_0)\,.$$

Επειδή $f'(\xi_x) \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Παρόμοια συμπεραίνουμε ότι $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Επομένως $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και κατά συνέπεια η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

(β΄) Η απόδειξη είναι παρόμοια.

□

Παράδειγμα 3.46. *Για κάθε $x > -1$ είναι*

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x\,.$$

Λύση. Αν $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, $x > -1$, τότε

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}\,.$$

Είναι $f'(x) \leq 0$, για κάθε $x \in (-1, 0]$ και $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \geq 0$. Επομένως

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{(1+x} \geq f(0) = 0\,.$$

Αν $g(x) = \ln(1+x) - x$, $x > -1$, τότε

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}\,.$$

Είναι $g'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (-1, 0]$ και $g'(x) \leq 0$, για κάθε $x \geq 0$. Επομένως

$$g(x) = \ln(1+x) - x \leq g(0) = 0\,.$$

■

Πρόταση 3.47. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα I και έστω x_0 εσωτερικό σημείο του I.*

(α΄) Αν το πλευρικό όριο $f'(x_0+) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ υπάρχει, τότε $f'(x_0+) = f'(x_0)$.

(β) Αν το πλευρικό όριο $f'(x_0-) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$ υπάρχει, τότε $f'(x_0-) = f'(x_0)$.

Επομένως αν και τα δύο πλευρικά όρια $f'(x_0+)$, $f'(x_0-)$ υπάρχουν, τότε $f'(x_0+) = f'(x_0-) = f'(x_0)$, δηλαδή η f' είναι συνεχής στο εσωτερικό σημείο $x_0 \in I$.

Απόδειξη. (α΄) Έστω $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq I$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_0, x_0+h]$, $0 < h < \delta$, από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta h)\,, \text{ για κάποιο } \theta \in (0,1)\,.$$

Επειδή το $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = f'(x_0+)$ υπάρχει, δηλαδή είναι πραγματικός αριθμός, τότε $\lim_{h \to 0^+} f'(x_0 + \theta h) = f'(x_0+)$ και επομένως

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f'(x_0 + \theta h) = f'(x_0+)\,.$$

(β΄) Η απόδειξη είναι παρόμοια.

□

Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για παραγώγους

Το δεύτερο σημαντικό θεώρημα αυτής της παραγράφου είναι το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για παραγώγους και οφείλεται στον Jean Gaston Darboux(1842–1917). Το αξιοσημείωτο με αυτό το θεώρημα είναι ότι στην υπόθεση δεν απαιτείται η συνέχεια της παραγώγου της συνάρτησης f. Αν η παράγωγος f' ήταν συνεχής, τότε το θεώρημα του Darboux θα ήταν μία εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano ή ενδιάμεσης μέσης τιμής για την f'.

Θεώρημα 3.48 (Darboux). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(a) \neq f'(b)$. Τότε για κάθε c μεταξύ $f'(a)$ και $f'(b)$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε*

$$f'(\xi) = c\,.$$

Απόδειξη. – Έστω $f'(a) < f'(b)$. Αν $c \in (f'(a),\, f'(b))$, θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) := f(x) - cx\,.$$

Τότε

$$g'(a) = f'(a) - c < 0 \quad \text{και} \quad g'(b) = f'(b) - c > 0\,.$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$ και επομένως θα παίρνει την ελάχιστη τιμή της για κάποιο $\xi \in [a,b]$.

Αν $\xi = a$, τότε για κάθε $h > 0$ με $a + h < b$ είναι $g(a+h) \geq g(a)$ και επομένως

$$g'(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \geq 0\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Αν $\xi = b$, τότε για κάθε $h < 0$ με $b + h > a$ είναι $g(b+h) \geq g(b)$ και επομένως

$$g'(b) = \lim_{h\to 0^-} \frac{g(b+h) - g(b)}{h} \leq 0\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Άρα το $\xi \in (a,b)$ και το θεώρημα Fermat συνεπάγεται ότι $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = c$.

– *Αν* $f'(a) > f'(b)$, η απόδειξη είναι παρόμοια. □

Για μια άλλη απόδειξη του θεωρήματος Darboux παραπέμπουμε στην άσκηση 40.

Πόρισμα 3.49. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα I και έστω x_0 εσωτερικό σημείο του I.*

(α΄) Αν η f' δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια $f'(x_0+) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ και $f'(x_0-) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ δεν υπάρχει.

(β΄) Κανένα από τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ και $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ δεν μπορεί να ισούται με $+\infty$ ή $-\infty$.

Απόδειξη. (α΄) *1ος τρόπος.* Αν και τα δύο πλευρικά όρια $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ υπάρχουν, δηλαδή είναι πραγματικοί αριθμοί, από την Πρόταση 3.47 η f' θα είναι συνεχής στο x_0. Επομένως ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ και $\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ δεν υπάρχει.

2ος τρόπος. Για την απόδειξη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το Θεώρημα Darboux (άσκηση 41).

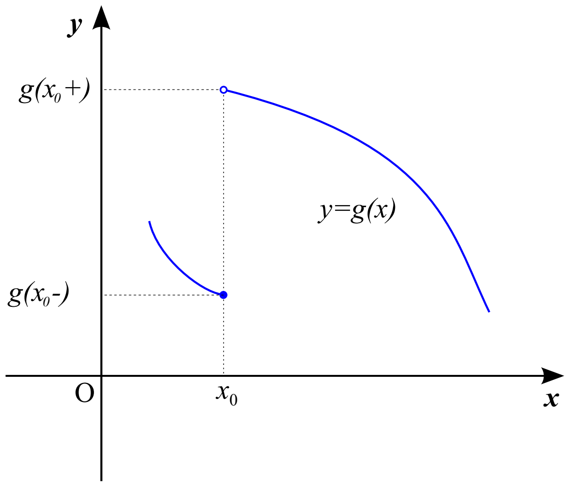
(β΄) Έστω $f'(x_0+) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = +\infty$. Από τον ορισμό του ορίου από δεξιά της f' στο x_0, για $M = f'(x_0)+1$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0, x_0+\delta) \subset I$ να ισχύει $f'(x) \geq f'(x_0) + 1$. Μάλιστα μπορούμε να επιλέξουμε το $\delta > 0$ έτσι ώστε $f'(x_0) \neq f'(x_0 + \delta)$(γιατί;). Τότε από το Θεώρημα Darboux για κάθε c στο ανοικτό διάστημα J με άκρα τα $f'(x_0)$ και $f'(x_0 + \delta)$ υπάρχει $\xi \in (x_0, x_0 + \delta)$ με $c = f'(\xi) \geq f'(x_0) + 1$. Επομένως το διάστημα $[f'(x_0) + 1, +\infty)$ θα περιέχει το ανοικτό διάστημα J και κατά συνέπεια θα περιέχει και τα άκρα του διαστήματος J. Τότε $f'(x_0) + 1 \leq f'(x_0) < +\infty$, άτοπο. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι $f'(x_0+) = +\infty$. Άρα το $f'(x_0+)$ δεν ισούται με $+\infty$. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι το $f'(x_0+)$ δεν ισούται με $-\infty$.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι το $f'(x_0-) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ δεν μπορεί να ισούται με $+\infty$ ή $-\infty$.

$\square$

Παρατήρηση 3.50. *Αν η f' είναι ασυνεχής σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε από το Πόρισμα 3.49 ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια $f'(x_0+)$, $f'(x_0-)$ δεν υπάρχει. Δηλαδή* **οι ασυνέχειες της f' είναι δεύτερου είδους**. *Γεωμετρικά, παρότι η παράγωγος f' δεν είναι κατανάγκη συνεχής συνάρτηση, το γράφημα της f' δεν παρουσιάζει πηδήματα στα σημεία ασυνέχειας. Επομένως, η ασυνέχεια της f' σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της μπορεί να προκύψει μόνο από υπερβολική ταλάντωση του γραφήματός της (βλέπε Παράδειγμα 3.11).*

Στο παρακάτω σχήμα το γράφημα της συνάρτησης $y = g(x)$ ορισμένης σ' ένα διάστημα I παρουσιάζει πήδημα στο εσωτερικό σημείο x_0 του I στο οποίο η συνάρτηση g είναι ασυνεχής.



Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$, τότε θα είναι $f'(x_0-) = g(x_0-)$ και $f'(x_0+) = g(x_0+)$ με $f'(x_0-) < f'(x_0+)$. Δηλαδή και τα δύο πλευρικά όρια $f'(x_0+)$, $f'(x_0-)$ υπάρχουν, άτοπο. Άρα η g δεν έχει παράγουσα στο διάστημα I.

Παράδειγμα 3.51.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \textit{αν } x \neq 0 \\ 0 & \textit{αν } x = 0\,. \end{cases}$$

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.11, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \textit{αν } x \neq 0 \\ 0 & \textit{αν } x = 0\,. \end{cases}$$

Η f' είναι ασυνεχής στο 0 και τα δύο πλευρικά όρια $f'(0+)$, $f'(0-)$ δεν υπάρχουν.

Πόρισμα 3.52. *Αν η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα I με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, τότε η f είναι γνήσια μονότονη στο I.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι η f' διατηρεί το πρόσημο στο διάστημα I. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι για κάποια $x, y \in I$ είναι $f'(x) < 0 < f'(y)$, από το θεώρημα Darboux υπάρχει ξ μεταξύ των x και y με $f'(\xi) = 0$. Άτοπο, επειδή από την υπόθεση είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ και κατά συνέπεια $f'(\xi) \neq 0$.

Επομένως θα είναι είτε $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in I$ ή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in I$. Άρα, είτε η f είναι γνήσια φθίνουσα στο I ή η f είναι γνήσια αύξουσα στο I. $\square$

3.5 Ασκήσεις

1. Να βρεθούν όλες οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n} \Leftrightarrow f(x+n) - f(x) = nf'(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ και } \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

   Υπόδειξη. (i) Δείξτε ότι $f'(x+1) = f(x+2) - f(x+1) = f'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

   (ii) Δείξτε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος I. Αν $a, b > 0$, να δείξετε ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + bh) - f(x_0 - ah)}{(b+a)h} = f'(x_0)\,.$$

3. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $a \in \mathbb{R}$. Αν $k, n \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n \left[\sum_{i=1}^{k} f\left(a + \frac{i}{n}\right) - kf(a)\right] = \frac{k(k+1)}{2} f'(a)\,.$$

4. Έστω η συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 4x - 1 & \text{αν } x \text{ άρρητος}\,. \end{cases}$$

   Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη μόνο για $x = 1/2$ με $f'(1/2) = 4$.

5. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in (a,b)$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(v) - f(u) - f'(x_0)(v-u)| < \varepsilon(v-u)\,,$$

   για όλα τα $u, v \in [a,b]$ με $x_0 - \delta < u \leq x_0 \leq v < x_0 + \delta$.

6. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(y) - f(x)| \leq C|y - x|^\alpha ,$$

για κάποιο $C > 0$ και $\alpha > 0$.

   (α΄) Αν $\alpha > 1$, δείξτε ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως η f είναι σταθερή.

   (β΄) Αν $0 < \alpha \leq 1$, τότε η f μπορεί να μην είναι παραγωγίσιμη. Πράγματι, αν $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, δείξτε ότι

$$||y|^\alpha - |x|^\alpha| \leq |y - x|^\alpha ,$$

   για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και ότι η $f(x) = |x|^\alpha$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

7. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^1, ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } f(x) < 0 \\ f^2(x) & \text{αν } f(x) \geq 0 \,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η g είναι κλάσης C^1 στο $\mathbb{R}$.

8. Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση κλάσης C^2 με $f(0) = f'(0) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1, τέτοια ώστε $f(x) = g(x^2)$ για κάθε $x \geq 0$.

9. Έστω η συνάρτηση $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx$, όπου $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Αν $|f(x)| \leq |\sin x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1 \,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Δείξτε ότι $|f'(0)| \leq 1$.

10. Να αποδειχθεί ότι

$$\arccos\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right) = 2\,|\arctan x| \,, \quad x \in \mathbb{R} \,.$$

11. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και τέτοια ώστε

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2},\ f(1) = \frac{\pi}{2} \text{ και } f'(x) \geq \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ για κάθε } x \in (-1, 1) \,.$$

Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \arcsin x$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

12. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $y = f(x) = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$, $|x| \leq 1$, είναι γνήσια μονότονη. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη της f, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{y \to -1} \frac{f^{-1}(y)}{1+y} .$$

13. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{|x|} & \text{αν } x \neq 0 \,, \\ \frac{\pi}{2} & \text{αν } x = 0 \,, \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

14. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x \leq 0 \,. \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-1/x} P_{2n}(1/x) & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x \leq 0 \,, \end{cases}$$

όπου $P_{2n}(1/x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $2n$ ως προς $1/x$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

15. Αν $f(x) = \arctan x$, δείξτε ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη με

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \cdot \sin\left(n\left(\frac{\pi}{2} + f(x)\right)\right) , \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} .$$

16. Να βρεθούν όλες οι $1-1$ και δύο φορές παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις $y = f(x)$ με $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οι οποίες είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} = 0 .$$

17. Έστω $P(\cosh t, \sinh t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, σημείο του δεξιού κλάδου της υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$ με εξίσωση $y = \sqrt{x^2-1}$, $x \geq 1$. Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν του χωρίου του επιπέδου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt{x^2-1}$, τον άξονα Ox και το ευθ. τμήμα OP ισούται με $t/2$.

18. Να δείξετε ότι η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{4}{(1-x^2)^2}y = 0\,, \quad |x| < 1\,, \tag{1}$$

με την αντικατάσταση

$$t = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\,, \quad |x| < 1\,,$$

μετασχηματίζεται στη γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$\frac{\mathrm{d}^2y^*}{\mathrm{d}t^2} - 4y^* = 0\,, \tag{2}$$

όπου $y^*(t) = y(\tanh t)$. Η γενική λύση της (2) είναι

$$y^*(t) = c_1\mathrm{e}^{-2t} + c_2\mathrm{e}^{2t}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

και άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1) είναι

$$y(x) = c_1\frac{1-x}{1+x} + c_2\frac{1+x}{1-x}\,, \quad |x| < 1\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

19. Έστω η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a,b) με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}\,.$$

20. Έστω η συνάρτηση $f : [0,\pi/4] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,\pi/4]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(0,\pi/4)$ με $f(0) = 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (0,\pi/4)$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = f(x_0)\frac{1+\tan x_0}{1-\tan x_0}\,.$$

21. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ με $f'(\xi) = 0$.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Θεωρείστε τη συνάρτηση $g(x) := f(\tan\frac{\pi x}{2})$, $x \in (-1,1)$.

22. Έστω $f : (a,b) \to (-1,1)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα (a,b) με $b - a \geq 4$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$, τέτοιο ώστε

$$|f'(\xi)| < \sqrt{1-(f(\xi))^2}\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $F(x) := \arcsin(f(x))$, $x \in (a,b)$.

23. Υποθέτουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b) με $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Αν $f(a) < 0 < f(b)$, δείξτε ότι υπάρχει *μοναδικό* $c \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(c) = 0$.

24. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x) \leq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει *μοναδικό* $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2x_0$.

25. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, δηλαδή $f \in C^2([a,b])$. Αν η f έχει τρεις τουλάχιστον διαφορετικές ρίζες στο $[a,b]$, δείξτε ότι η εξίσωση

$$f(x) + f''(x) = 2f'(x)$$

θα έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[a,b]$.

Υπόδειξη. Αν $g(x) := e^{-x}f(x)$, εξετάστε τις παραγώγους $g'(x)$ και $g''(x)$.

26. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ότι η παράγωγος f' είναι φραγμένη στο διάστημα $(0,+\infty)$. Αν η ακολουθία $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ τείνει στο $+\infty$, δηλαδή $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$, να δείξετε ότι και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

27. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = f'(0) = 0$. Αν $a \neq 0$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} f\left(\frac{a^n}{n!}\right) = 0\,.$$

28. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη με $f'(0) = 1$. Τότε υπάρχει διάστημα $[-\delta,\delta]$, $\delta > 0$, στο οποίο η f είναι γνήσια αύξουσα.

29. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(0) = 1$. Υπάρχει διάστημα $[-\delta,\delta]$, $\delta > 0$, στο οποίο η f είναι αύξουσα;

Υπόδειξη. Θεωρείστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0\,. \end{cases}$$

30. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$;

Υπόδειξη. Θεωρείστε τη συνάρτηση $f(x) = (1/x)\sin x^2$.

31. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $y = f(x) = 2xe^{x^2}$. Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$ και επί. Να βρεθεί $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f^{-1}(y)| \leq \alpha|y|\,, \quad \text{για κάθε } y \in \mathbb{R}\,.$$

32. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\alpha \in (0, 1)$ είναι

$$|f'(x)| \leq x^{\alpha}\,, \quad \text{για κάθε } x > 0\,.$$

Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

33. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ότι το όριο $\lim_{x\to0^+} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Αν το όριο $\lim_{x\to0^+} xf'(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $\lim_{x\to0^+} xf'(x) = 0$.

Υπόδειξη. *1ος τρόπος*. Με τον κανόνα L'Hôpital δείξτε ότι $\lim_{x\to0^+}(xf(x))' = \lim_{x\to0^+} f(x)$.

2ος τρόπος.

(i) Έστω $\lim_{x\to0^+} xf'(x) = \lambda > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (0, \delta)$ είναι

$$f'(x) > \frac{\lambda}{2x}\,.$$

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $x \in (0, \delta)$

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) > \frac{\lambda}{4}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

και ότι αυτό οδηγεί σε άτοπο.

34. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ότι το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Αν το όριο $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

Υπόδειξη. Με τον κανόνα L'Hôpital δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(xf(x))' = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

35. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Αν $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, δείξτε ότι και $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Υπόδειξη. Κοιτάξτε την απόδειξη στο Παράδειγμα 3.41.

36. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty\,.$$

Να αποδειχθεί ότι είτε το όριο $\lim_{x\to b^-} f'(x)$ δεν υπάρχει ή $\lim_{x\to b^-} f'(x) = \infty$.

Υπόδειξη. Αν $\lim_{x\to b^-} f'(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f'(x)| < 1 + |\lambda|\,, \quad \forall x \in (b - \delta, b)\,.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής αποδείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(y)| \leq M\,, \quad \forall y \in (b - \delta, b)\,.$$

37. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη.

(α΄) Αν

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) + f'(x)) = 0\,,$$

τότε το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$ υπάρχει και ισούται με το μηδέν.

Για την απόδειξη χρησιμοποιείστε τα παρακάτω βήματα:

(i) Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x\to\infty}(f(x) + f'(x)) = 0$,

υπάρχει $A > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x > A$ είναι $|f(x) + f'(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

(ii) Έστω $x > A$. Αν $g(x) := e^x f(x)$, χρησιμοποιώντας το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής (θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy) για τις συναρτήσεις $y = g(x)$ και $y = e^x$ αποδείξτε ότι

$$|g(x) - g(A)| < \frac{\varepsilon}{2}|e^x - e^A|\,.$$

(iii) Να συμπεράνετε ότι για κάθε $x > A$ είναι

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + |f(A)e^{A-x}|$$

(iv) Αποδείξτε ότι υπάρχει $B > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x > B$ είναι

$$|f(A)e^{A-x}| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Αν $\Delta = \max\{A, B\}$, τότε για κάθε $x > \Delta$ είναι $|f(x)| < \varepsilon$.

(β΄) Αν

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) + f'(x)) = 1\,,$$

τότε $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

38. Χρησιμοποιώντας τη διπλή ανισότητα του παραδείγματος 3.46, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2\,.$$

39. Αποδείξτε ότι

$$x - \frac{x^3}{3!} \le \sin x \le x\,, \quad \forall x \ge 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω διπλή ανισότητα, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right) = \ln 2\,.$$

40. (*Μια διαφορετική απόδειξη του θεωρήματος Darboux*) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(a) \neq f'(b)$. Τότε για κάθε c μεταξύ $f'(a)$ και $f'(b)$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = c\,.$$

Για την απόδειξη θεωρείστε πρώτα τις συνεχείς συναρτήσεις $f_a, f_b : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$f_a(x) = \begin{cases} f'(a) & \text{αν } x = a \\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{αν } x \neq a \end{cases} \quad \text{και} \quad f_b(x) = \begin{cases} f'(b) & \text{αν } x = b \\ \frac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{αν } x \neq b\,. \end{cases}$$

Τότε

$$f_a(a) = f'(a),\ f_a(b) = f_b(a) \text{ και } f_b(b) = f'(b)\,.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιείστε το θεώρημα Bolzano ή ενδιάμεσης τιμής και το θεώρημα μέσης τιμής.

41. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα I και έστω x_0 εσωτερικό σημείο του I. Αν και τα δύο πλευρικά όρια $f'(x_0+) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$, $f'(x_0-) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ της f' υπάρχουν, δηλαδή είναι πραγματικοί αριθμοί, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Darboux δείξτε ότι η f' είναι συνεχής στο x_0.

3.6 Κανόνας L'Hôpital

3.7 Τύπος και σειρά Taylor

3.7.1 Θεώρημα Taylor

Αν η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του διαστήματος I, από την (3.3) έχουμε ότι

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \quad (h \to 0)\,.$$

Στην περίπτωση που η f είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο x_0, ο παραπάνω τύπος γενικεύεται.

Πρόταση 3.53. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του διαστήματος I. Τότε,*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n) \quad (h \to 0)\,. \tag{3.23}$$

Απόδειξη. Αν

$$P_n(h) := f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k\,,$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - P_n(h)}{h^n} = 0\,.$$

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε $(n-1)$-φορές τον κανόνα L'Hôpital. Επειδή

$$\begin{aligned} P_n^{(n-1)}(h) &= \left(f(x_0) + f'(x_0)h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n \right)^{(n-1)} \\ &= f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)h\,, \end{aligned}$$

είναι

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-P_n(h)}{h^n} &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-P_n'(h)}{nh^{n-1}} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)-P_n''(h)}{n(n-1)h^{n-2}} \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-P_n^{(n-1)}(h)}{n!h} \\
&\qquad\qquad ((n-1)\text{-φορές ο κανόνας L'Hôpital}) \\
&= \frac{1}{n!}\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-[f^{(n-1)}(x_0)+f^{(n)}(x_0)h]}{h} \\
&= \frac{1}{n!}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-f^{(n-1)}(x_0)}{h}-f^{(n)}(x_0)\right] \\
&= \frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)\right] = 0\,.
\end{aligned}$$

Σημείωση. Αν χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα L'Hôpital n-φορές, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-P_n(h)}{h^n} &= \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(x_0+h)-P_n^{(n)}(h)}{n!} \qquad (n\text{-φορές ο κανόνας L'Hôpital}) \\
&= \frac{1}{n!}\lim_{h\to 0}\left[f^{(n)}(x_0+h)-f^{(n)}(x_0)\right]\,.
\end{aligned}$$

Όμως στην υπόθεση **δεν μας δίνεται ότι η $f^{(n)}$ είναι συνεχής στο** x_0 και επομένως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\lim_{h\to 0} f^{(n)}(x_0+h) = f^{(n)}(x_0)$. □

Αν $x = x_0 + h \in I$, ο τύπος (3.23) παίρνει τη μορφή

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \quad (x\to x_0)\,. \tag{3.24}$$

Ειδικά για $x_0 = 0$ είναι

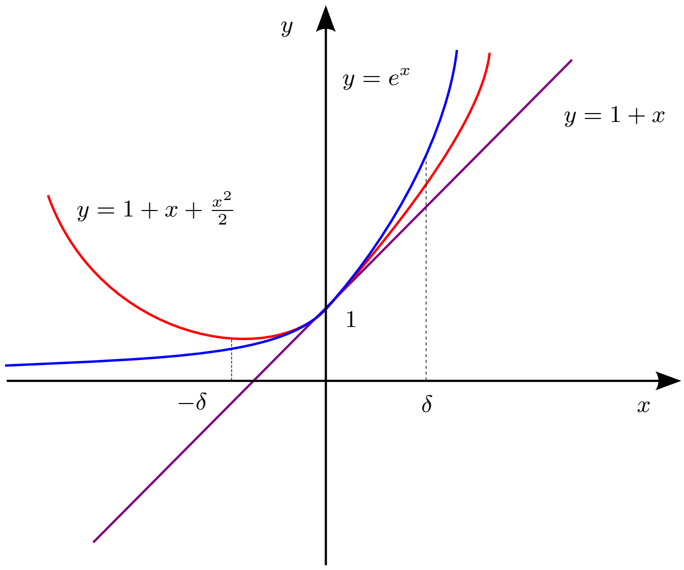
$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n) \quad (x\to 0)\,. \tag{3.25}$$

Παράδειγμα 3.54. *Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση $y = f(x) = e^x$. Επειδή $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από τον τύπο* (3.25) *έχουμε*

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n) \quad (x\to 0)\,.$$

Για $n = 1$ και $n = 2$ παίρνουμε αντίστοιχα

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad (x \to 0) \quad \textit{και} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0)\,.$$



Σχήμα 3.1: Σε μια μικρή περιοχή $(-\delta, \delta)$ του μηδενός το πολυώνυμο $P_1(x) = 1 + x$ είναι μια καλή προσέγγιση της εκθετικής συνάρτησης $y = e^x$. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, στην ίδια περιοχή το πολυώνυμο $P_2(x) = 1 + x + x^2/2$ προσεγγίζει καλύτερα την εκθετική συνάρτηση.

Παράδειγμα 3.55. *Να υπολογιστεί το όριο*

$$\lim_{x\to 0} \frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{x}{\sin x}\right).$$

Λύση. Αν $f(x) = x/\sin x$, ζητείται να υπολογιστεί η παράγωγος $f^{(4)}(0)$. Επειδή

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \quad (x \to 0)\,,$$

είναι

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)}\,.$$

Όμως

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + o(y^2) \quad (y \to 0)$$

και επομένως

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{\sin x} &= 1 + \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right) + \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{x^2}{3!} + \left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right) x^4 + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{x^2}{3!} + \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{120}\right) x^4 + o(x^4)\,.
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$\lim_{x\to 0} \frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{x}{\sin x}\right) = f^{(4)}(0) = 4!\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 4!\left(\frac{1}{36} - \frac{1}{120}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}\,.$$

■

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος I. Τότε, από το θεώρημα Fermat μία αναγκαία συνθήκη για να έχει η f τοπικό ακρότατο στο x_0 είναι η παράγωγος να μηδενίζεται στο x_0, δηλαδή $f'(x_0) = 0$. Με το κριτήριο της πρώτης παραγώγου, Πρόταση 3.45, εξετάζουμε αν η f έχει τοπικό ελάχιστο ή τοπικό μέγιστο στο x_0. Αν η συνάρτηση f έχει παραγώγους ανώτερης τάξης, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.53 θα δώσουμε ένα γενικό κριτήριο για τοπικά ακρότατα.

Θεώρημα 3.56 (Γενικό κριτήριο για ακρότατα). *Έστω η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι n-φορές παραγωγίσιμη, $n \geq 2$, στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος I. Υποθέτουμε ότι*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \textit{και } f^{(n)}(x_0) \neq 0\,.$$

(α') Αν n είναι άρτιος, $n = 2k$, τότε η f έχει **τοπικό ελάχιστο***(αντίστοιχα,* **τοπικό μέγιστο***) στο x_0 αν $f^{(n)}(x_0) > 0$(αντίστοιχα, $f^{(n)}(x_0) < 0$).*

(β') Αν n περιττός, $n = 2k+1$, τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο x_0.

Απόδειξη. Από την υπόθεση, το πολυώνυμο

$$
\begin{aligned}
P_n(h) &:= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n \\
&= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n
\end{aligned}
$$

και επομένως

$$\frac{f(x_0+h)-P_n(h)}{h^n} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^n} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,.$$

Επειδή από την Πρόταση 3.53 είναι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-P_n(h)}{h^n} = 0\,,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,. \tag{3.26}$$

Έστω $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Τότε λόγω της (3.26) υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε

το $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^n}$ έχει το ίδιο πρόσημο με το $f^{(n)}(x_0)$, για κάθε $h\in(-\delta,\delta)$, $h\neq 0$. (3.27)

(α΄) *Έστω $n=2k$*. Αν $f^{(n)}(x_0)>0$, επειδή $h^n=h^{2k}>0$, από την (3.27) έπεται ότι $f(x_0+h)>f(x_0)$ για κάθε $h\in(-\delta,\delta)$, $h\neq 0$. Επομένως η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0. Η περίπτωση $f^{(n)}(x_0)<0$ είναι παρόμοια.

(β΄) *Έστω $n=2k+1$*. Αν $f^{(n)}(x_0)>0$, τότε χρησιμοποιώντας την (3.27) έχουμε

$$f(x_0+h)<f(x_0) \quad \text{για κάθε } h\in(-\delta,0)$$

και

$$f(x_0+h)>f(x_0) \quad \text{για κάθε } h\in(0,\delta)\,.$$

Επομένως η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο x_0.

Αν $f^{(n)}(x_0)<0$, τότε από την (3.27) έχουμε

$$f(x_0+h)>f(x_0) \quad \text{για κάθε } h\in(-\delta,0)$$

και

$$f(x_0+h)<f(x_0) \quad \text{για κάθε } h\in(0,\delta)\,.$$

Επομένως και πάλι η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο x_0.

□

Αν η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του διαστήματος I, από τον τύπο (3.24) για x πολύ κοντά στο x_0, δηλαδή για αρκετά μικρό $x - x_0$, έχουμε ότι

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Επομένως για x πλησίον του x_0 προσεγγίζουμε τη συνάρτηση $y = f(x)$, που είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο x_0, με ένα πολυώνυμο βαθμού n. Ποιο είναι το σφάλμα της προσέγγισης; Για να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα χρειαζόμαστε τον *τύπο Taylor* που γενικεύει το κλασικό θεώρημα μέσης τιμής για παραγώγους ανώτερης τάξης.

Θεώρημα 3.57 (Taylor). *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε οι παράγωγοι $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και η $f^{(n+1)}$ υπάρχει στο (a, b). Αν $x_0 \in [a, b]$, τότε για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε τον* **τύπο Taylor***:*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) , \end{aligned} \tag{3.28}$$

όπου

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \;\; \textit{είναι } \textbf{το πολυώνυμο Taylor βαθμού } n$$

και $R_n(x)$ είναι το **υπόλοιπο** *με*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} , \quad \textit{για κάποιο } \xi \textit{ μεταξύ } x_0 \textit{ και } x \tag{Lagrange}$$

ή

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - x_0) , \quad \textit{για κάποιο } \xi \textit{ μεταξύ } x_0 \textit{ και } x . \tag{Cauchy}$$

Απόδειξη. — Απόδειξη του τύπου Taylor με το υπόλοιπο κατά Lagrange:

Έστω $x \in [a, b]$, x σταθερό. Η μορφή του τύπου Taylor με το υπόλοιπο κατά Lagrange μας οδηγεί στο να ορίσουμε δύο βοηθητικές συναρτήσεις F και Φ στο κλειστό διάστημα με άκρα τα σημεία

x_0 και x ως εξής:

$$\begin{aligned} F(t) &:= f(x) - \left[f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right], \\ \Phi(t) &:= (x-t)^{n+1} \end{aligned}$$

και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε το "γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy", Θεώρημα 3.38.

Για κάποιο ξ μεταξύ x_0 και x είναι

$$\begin{aligned} \frac{F(x)-F(x_0)}{\Phi(x)-\Phi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\Phi'(\xi)} \Leftrightarrow \frac{F(x_0)}{\Phi(x_0)} &= \frac{F'(\xi)}{\Phi'(\xi)} \qquad (F(x) = \Phi(x) = 0) \\ \Leftrightarrow F(x_0) &= \frac{F'(\xi)}{\Phi'(\xi)}(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Επειδή

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \quad \text{και} \quad \Phi'(t) = -(n+1)(x-t)^n,$$

έχουμε

$$F(x_0) = \frac{F'(\xi)}{\Phi'(\xi)}(x-x_0)^{n+1} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}}{-(n+1)}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Επομένως

$$F(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

και αυτό συνεπάγεται τον τύπο Taylor με το υπόλοιπο κατά Lagrange.

– Απόδειξη του τύπου Taylor με το υπόλοιπο κατά Cauchy:

Η απόδειξη του τύπου Taylor με το υπόλοιπο κατά Cauchy είναι εφαρμογή του κλασικού θεωρήματος μέσης τιμής του Lagrange, Θεώρημα 3.39, για τη βοηθητική συνάρτηση F που ορίσαμε παραπάνω. Παραλείπουμε την εύκολη απόδειξη. □

Το θεώρημα Taylor είναι γενίκευση του θεωρήματος μέσης τιμής για παραγώγους ανώτερης τάξης. Επειδή $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ και $0! = 1$, από τον τύπο Taylor για $n = 0$ έχουμε

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0), \quad \text{για κάποιο } \xi \text{ μεταξύ } x_0 \text{ και } x. \qquad \text{(θεώρημα μέσης τιμής)}$$

Παρατήρηση 3.58. *Αν η f* **είναι ένα πολυώνυμο βαθμού** *n και το x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός, από τον τύπο Taylor(τύπος* (3.28)*) παίρνουμε*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k .
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

Αυτό ισχύει επειδή $f^{(n+1)} \equiv 0$ και κατά συνέπεια $R_n(x) = 0$.

Εφαρμογή. Θα εκφράσουμε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ σε μορφή δυνάμεων του $(x+1)$. Από τον τύπο (3.29) *για $x_0 = -1$ έχουμε*

$$
P(x) = P(-1) + P'(-1)(x+1) + \frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{P^{(3)}(-1)}{3!}(x+1)^3 + \frac{P^{(4)}(-1)}{3!}(x+1)^4 .
$$

Επειδή $P(-1) = 1$, $P'(-1) = 10$, $P''(-1) = 0$, $P^{(3)}(-1) = -18$ και $P^{(4)}(-1) = 24$, τελικά είναι

$$
P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 1 + 10(x+1) - 3(x+1)^3 + (x+1)^4 .
$$

Για $x_0 = 0$ ο τύπος Taylor, γνωστός και σαν **τύπος Maclaurin**, παίρνει τη μορφή

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x) ,
\end{aligned}
$$

όπου

$$
R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} , \quad \text{για κάποιο } \xi \text{ μεταξύ } x_0 \text{ και } x \tag{Lagrange}
$$

ή

$$
R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n x , \quad \text{για κάποιο } \xi \text{ μεταξύ } 0 \text{ και } x . \tag{Cauchy}
$$

Ο **τύπος Maclaurin με το υπόλοιπο κατά Lagrange** διατυπώνεται και ως εξής

$$
\boxed{
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_n(x)} ,
\end{aligned}
}
\tag{3.30}
$$

για κάποιο $\theta \in (0,1)$. Αντίστοιχα, ο **τύπος Maclaurin με το υπόλοιπο κατά Cauchy** γράφεται και στη μορφή

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}}_{R_n(x)} \end{aligned}} \tag{3.31}$$

για κάποιο $\theta \in (0,1)$. Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε τα αναπτύγματα Maclaurin μερικών βασικών συναρτήσεων. Είναι

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}}_{R_n(x)} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \underbrace{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x}_{R_{2n}(x)} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \underbrace{(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\cos\theta x}_{R_{2n-1}(x)} \\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cosh\theta x}_{R_{2n}(x)} \\ \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \underbrace{\frac{x^{2n}}{(2n)!}\cosh\theta x}_{R_{2n-1}(x)} \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + R_n(x)\,, \quad x > -1\,, \\ &\text{με } R_n(x) = (-1)^n \frac{1}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1} \text{ (υπόλοιπο κατά Lagrange)} \\ &\text{ή } R_n(x) = (-1)^n \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1} \text{ (υπόλοιπο κατά Cauchy)}\,, \end{aligned}} \tag{3.32}$$

για κάποιο $\theta \in (0,1)$.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε δύο από τα παραπάνω αναπτύγματα, η απόδειξη των υπόλοιπων αναπτυγμάτων είναι παρόμοια.

Παράδειγμα 3.59. *Είναι*

(i)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \underbrace{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x}_{R_{2n}(x)}$$

και

(ii)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + R_n(x)\,, \quad x > -1\,,$$

με

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{1}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1} \qquad \text{(υπόλοιπο κατά Lagrange)}$$

ή

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}\,, \qquad \text{(υπόλοιπο κατά Cauchy)}$$

για κάποιο $\theta \in (0,1)$.

Λύση.

(i) Η k-παράγωγος της συνάρτησης $y = f(x) = \sin x$ δίνεται από τον τύπο: $(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$. Από τον τύπο (3.30) έχουμε

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + \underbrace{\frac{f^{(2n+1)}(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}}_{R_{2n}(x)}\,.$$

Επομένως, η απόδειξη του αναπτύγματος Maclaurin της $y = \sin x$ προκύπτει από το γεγονός ότι

$$f^{(k)}(0) = (\sin x)^{(k)}\Big|_{x=0} = \begin{cases} 0 & \text{αν } k = 2n \\ (-1)^{n-1} & \text{αν } k = 2n-1 \end{cases}$$

και

$$\begin{aligned} f^{(2n+1)}(\theta x) = (\sin\theta x)^{(2n+1)} &= \sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi + \theta x\right) \\ &= \cos(n\pi + \theta x) \\ &= \cos(n\pi)\cos(\theta x) - \sin(n\pi)\sin(\theta x) = (-1)^n\cos(\theta x)\,. \end{aligned}$$

(ii) Παρατηρούμε ότι η n-οστή παράγωγος της $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$, είναι

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\,.$$

Επειδή $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ και

$$f^{(n+1)}(\theta x) = (-1)^n\frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}}\,,$$

με εφαρμογή των τύπων (3.30) και (3.31) παίρνουμε το ανάπτυγμα Maclaurin της $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$, με το υπόλοιπο κατά Lagrange και το υπόλοιπο κατά Cauchy αντίστοιχα.

■

Παράδειγμα 3.60. *Αν $k \in \mathbb{N}^*$, τότε για κάθε $x > 0$ είναι*

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots - \frac{1}{2k}x^{2k} < \ln(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}\,. \tag{3.33}$$

Λύση. Αν $x > 0$, από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε

$$\ln(1+x) = \underbrace{x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n}_{P_n(x)} + \underbrace{(-1)^n\frac{1}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}}_{R_n(x)}\,, \tag{3.34}$$

με το υπόλοιπο κατά Lagrange, για κάποιο $\theta \in (0,1)$.

(i) Αν $n = 2k$ είναι άρτιος, τότε $R_{2k}(x) > 0$ και από την (3.34) προκύπτει η αριστερή ανισότητα της (3.33).

(ii) Αν $n = 2k+1$ είναι περιττός, τότε $R_{2k+1}(x) < 0$ και από την (3.34) προκύπτει η δεξιά ανισότητα της (3.33). ■

Παράδειγμα 3.61. *Για κάθε $x \in [-1,1]$,*

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad \textit{με σφάλμα μικρότερο του } 10^{-3}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \underbrace{(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x}_{R_{2n}(x)}\,.$$

Για κάθε $x \in [-1,1]$ έχουμε

$$|R_{2n}(x)| = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}|\cos\theta x| \le \frac{1}{(2n+1)!}\,.$$

Η ανισότητα

$$\frac{1}{(2n+1)!} < 10^{-3} \Leftrightarrow (2n+1)! > 1000$$

ισχύει για κάθε $n \geq 3$. Επομένως, για $n = 3$ και για κάθε $x \in [-1,1]$ έχουμε $|R_{2n}(x)| < 10^{-3}$. Άρα για κάθε $x \in [-1,1]$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\,,$$

με το σφάλμα της προσέγγισης μικρότερο του 10^{-3}. ■

Παράδειγμα 3.62 (Ανισότητα Landau). *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και f'' είναι φραγμένες με*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = M_0 \quad \text{και} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| = M_2\,,$$

όπου $M_0, M_2 > 0$. Τότε η f' είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$ με

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}\,.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}$, x σταθερό. Για κάθε $h > 0$ από τον τύπο Taylor έχουμε

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi_1)}{2!}h^2\,, \text{ για κάποιο } \xi_1 \in (x, x+h)$$

και

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(\xi_2)}{2!}h^2\,, \text{ για κάποιο } \xi_2 \in (x-h, x)\,.$$

Τότε

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)\,h + \frac{h^2}{2!}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)]$$

και επομένως

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h}{4}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)]\,.$$

Είναι

$$\begin{aligned}
|f'(x)| &\leq \frac{|f(x+h) - f(x-h)|}{2h} + \frac{h}{4}|f''(\xi_1) - f''(\xi_2)| \\
&\leq \frac{|f(x+h)| + |f(x-h)|}{2h} + \frac{h}{4}\left(|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|\right) \\
&\leq \frac{M_0 + M_0}{2h} + \frac{h}{4}\left(M_2 + M_2\right) \\
&= \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}\,.
\end{aligned}$$

Αν $\varphi(h) := \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$, τότε

$$\varphi'(h) = -\frac{M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2}, \text{ οπότε } \varphi'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}\,.$$

Επομένως

$$\min_{h>0} \varphi(h) = \varphi\left(\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}\right) = \sqrt{2M_0M_2}\,.$$

Άρα

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Παράδειγμα 3.63. *Έστω η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$, για $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Τότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$, τέτοιο ώστε*

$$|f^{(n)}(\xi)| \geq n!2^{n-1}|f(1) - f(0)|\,.$$

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε τον τύπο Taylor, τύπος (3.28) με το υπόλοιπο κατά Lagrange, για $x = 1/2$ με $x_0 = 0$ και $x_0 = 1$ αντίστοιχα. Επειδή από την υπόθεση $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, έχουμε

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) + \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

για κάποιο ξ_1 με $0 < \xi_1 < 1/2$ και

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + \frac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

για κάποιο ξ_2 με $1/2 < \xi_2 < 1$ αντίστοιχα. Από τις παραπάνω ισότητες έπεται ότι

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{n!2^n}\left[f^{(n)}(\xi_1) - (-1)^n f^{(n)}(\xi_2)\right]$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
|f(1) - f(0)| &= \frac{1}{n!2^n}\left|f^{(n)}(\xi_1) - (-1)^n f^{(n)}(\xi_2)\right| \\
&\leq \frac{1}{n!2^n}\left[|f^{(n)}(\xi_1)| + |f^{(n)}(\xi_2)|\right] \\
&\leq \frac{2}{n!2^n}|f^{(n)}(\xi)|\,. \qquad (|f^{(n)}(\xi)| = \max\left\{|f^{(n)}(\xi_1)|,\, |f^{(n)}(\xi_2)|\right\})
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\left|f^{(n)}(\xi)\right| \geq n!2^{n-1}\left|f(1)-f(0)\right| .$$

Παρατήρηση. Αν η συνάρτηση f είναι σταθερή, τότε

$$|f^{(n)}(\xi)| = 0 = n!2^{n-1}\,|f(1)-f(0)| \text{ για κάθε } \xi \in [0,1]\,.$$

□

Παράδειγμα 3.64. *Έστω $f \in C^3([-1,1])$, δηλαδή η συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ είναι τρεις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-1,1]$. Τότε η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(-\frac{1}{n}\right)\right]-2f'(0)\right\}$$

συγκλίνει.

Εφαρμογή. *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(n\arctan(1/n)-1)$ συγκλίνει.*

Λύση. Έστω $x \in [-1,1]$, $x \neq 0$. Από τον τύπο Maclaurin, για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x είναι

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3\,.$$

Ειδικά για $x = \pm 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, έπεται ότι

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + \frac{1}{n}f'(0) + \frac{1}{2n^2}f''(0) + \frac{1}{6n^3}f^{(3)}(\alpha_n) \tag{3.35}$$

και

$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = f(0) - \frac{1}{n}f'(0) + \frac{1}{2n^2}f''(0) - \frac{1}{6n^3}f^{(3)}(\beta_n)\,, \tag{3.36}$$

για κάποια α_n, β_n με $0 < \alpha_n < 1/n$ και $-1/n < \beta_n < 0$. Αφαιρώντας κατά μέλη τις (3.35), (3.36) και πολλαπλασιάζοντας με n παίρνουμε

$$n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(-\frac{1}{n}\right)\right]-2f'(0) = \frac{1}{6n^2}\left[f^{(3)}(\alpha_n)+f^{(3)}(\beta_n)\right]\,,$$

όπου $\alpha_n, \beta_n \in [-1,1]$. Έστω

$$M := \max_{x\in[-1,1]}|f^{(3)}(x)|\,.$$

Τότε

$$\left|n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(-\frac{1}{n}\right)\right]-2f'(0)\right| \leq \frac{M}{3}\cdot\frac{1}{n^2}\,.$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(-\frac{1}{n}\right)\right]-2f'(0)\right|$$

θα συγκλίνει. Δηλαδή η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(-\frac{1}{n}\right)\right]-2f'(0)\right\}$$

συγκλίνει απόλυτα και κατά συνέπεια θα συγκλίνει.

Εφαρμογή. Η $f(x) := \arctan x$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επειδή

$$f\left(\tfrac{1}{n}\right)-f\left(-\tfrac{1}{n}\right)=\arctan\left(\tfrac{1}{n}\right)-\arctan\left(-\tfrac{1}{n}\right)=2\arctan\left(\tfrac{1}{n}\right)$$

και

$$f'(0)=\left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=0}=1\,,$$

η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\left[f\left(\tfrac{1}{n}\right)-f\left(-\tfrac{1}{n}\right)\right]-2f'(0)\right\}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\arctan\left(\tfrac{1}{n}\right)-1\right)$$

θα συγκλίνει. Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(n\arctan(1/n)-1)$ συγκλίνει. ■

Παράδειγμα 3.65. *Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι κλάσης C^{∞}, δηλαδή η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν υπάρχει πολυώνυμο P με πραγματικούς συντελεστές και περιττό βαθμό τέτοιο ώστε*

$$|f^{(n)}(x)|\le|P(x)|\,,\quad \text{για κάθε } n\in\mathbb{N} \text{ και κάθε } x\in\mathbb{R}\,,$$

τότε $f\equiv 0$.

Απόδειξη. Από το Παράδειγμα 2.18 το πολυώνυμο P έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$, έστω $P(x_0)=0$ για κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$. Από την υπόθεση έπεται ότι $f^{(n)}(x_0)=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έστω $x\in\mathbb{R}$, x σταθερό. Τότε, από τον τύπο Taylor έχουμε ότι

$$f(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,,\quad \text{για κάποιο } \xi_n \text{ μεταξύ } x_0 \text{ και } x\,.$$

Όμως $|f^{(n+1)}(\xi_n)|\le|P(\xi_n)|$, οπότε

$$|f(x)|\le\frac{|P(\xi_n)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\,,\quad \text{για κάποιο } \xi_n \text{ μεταξύ } x_0 \text{ και } x\,.$$

Επειδή το πολυώνυμο P είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[x_0, x]$(ή $[x, x_0]$), το P είναι φραγμένο. Επομένως υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $|P(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [x_0, x]$(ή $t \in [x, x_0]$). Άρα,

$$|f(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

Επειδή ως γνωστόν(Λήμμα 3.68)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0\,,$$

από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι $f(x) = 0$. Άρα, $f \equiv 0$.

Σημείωση. Το αποτέλεσμα δεν ισχύει στην περίπτωση που ο βαθμός του πολυωνύμου είναι άρτιος αριθμός. Πράγματι, έστω $f(x) = \sin x$. Τότε,

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1 + x^2 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και κάθε } x \in \mathbb{R}\,. \qquad \text{(γιατί ;)}$$

Όμως $f(x) = \sin x \not\equiv 0$. □

3.7.2 Σειρά Taylor

Ορισμός 3.66. *Αν η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του διαστήματος I, τότε η* **σειρά Taylor της** f **με κέντρο το** x_0 *είναι η δυναμοσειρά*

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots\,.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Αν $x_0 = 0$, τότε η σειρά Taylor λέγεται και **σειρά Maclaurin της** f. *Είναι*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots\,. \tag{3.38}$$

Παρατήρηση 3.67. *Έστω $f \in C^\infty([a, b])$ και έστω $x_0 \in [a, b]$. Τότε, για κάθε $x \in [a, b]$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από το Θεώρημα Taylor έχουμε*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_n(x)}\,,$$

για κάποιο ξ μεταξύ x_0 και x. Το σημείο ξ εξαρτάται από το x_0, το x και το n. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συγκλίνει η σειρά Taylor στο $f(x)$ είναι το υπόλοιπο να τείνει στο μηδέν, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0\,.$$

Πολλές φορές δύσκολα αντιμετωπίζεται το παραπάνω όριο επειδή είναι άγνωστη η θέση του ξ. Όμως σε κάποιες περιπτώσεις μπορούμε να βρούμε ένα κατάλληλο άνω φράγμα για την παράγωγο $f^{(n+1)}(\xi)$ και το όριο του υπολοίπου μπορεί να αποδειχθεί ότι τείνει στο μηδέν.

Αν $f \in C^{\infty}([a,b])$, δηλαδή η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη, θα δώσουμε μία ικανή συνθήκη για να συγκλίνει η σειρά Taylor της f και να ισούται με $f(x)$. Θα χρειαστούμε το παρακάτω όριο.

Λήμμα 3.68. *Αν $x \in \mathbb{R}$, x σταθερό, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0\,.$$

Απόδειξη. Αν $x = 0$, προφανώς το όριο είναι μηδέν. Έστω $x \neq 0$ και έστω $a_n = x^n/n!$. Τότε,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

και από το κριτήριο του λόγου(κριτήριο D'Alembert) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0\,.$$

$\square$

Θεώρημα 3.69. *Έστω $f \in C^{\infty}((x_0-\delta, x_0+\delta))$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη σε μια περιοχή $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta > 0$, του σημείου x_0. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M\,, \quad \text{για κάθε } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \text{ και κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

Τότε, το υπόλοιπο Taylor $R_n(x) \to 0$ και επομένως

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,, \quad |x-x_0| < \delta\,.$$

Απόδειξη. Στον τύπο Taylor το υπόλοιπο κατά Lagrange είναι

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

για κάποιο ξ μεταξύ x_0 και x. Επειδή $|f^{(n+1)}(\xi)| \le M$ και $|x - x_0| < \delta$, έχουμε

$$|R_n(x)| \le M \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Όμως από το προηγούμενο λήμμα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

και επομένως $R_n(x) \to 0$. □

Παραδείγματα 3.70. *1. Για την εκθετική συνάρτηση $y = e^x$ από τον πίνακα (3.32) έχουμε*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}}_{R_n(x)}, \quad \text{για κάποιο } \theta \in (0,1)$$

με

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, x σταθερό, αν $n \to \infty$, τότε $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ (Λήμμα 3.68) και επομένως

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Έστω $y = \sin x$. Από τον πίνακα (3.32) για κάποιο $\theta \in (0,1)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \underbrace{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x}_{R_{2n}(x)}.$$

Επειδή $|R_{2n}(x)| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (Λήμμα 3.68), $R_{2n}(x) \to 0$ καθώς το $n \to \infty$ και επομένως

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παρόμοια

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. *Έστω $y = \sinh x$. Από τον πίνακα* (3.32) *για κάποιο $\theta \in (0,1)$*

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cosh\theta x}_{R_{2n}(x)}\,.$$

Αν $x \in \mathbb{R}$, x σταθερό, επειδή $1 \le \cosh\theta x < \cosh|x|$, έχουμε

$$|R_{2n}(x)| = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\cosh\theta x < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\cosh|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{(Λήμμα 3.68)}$$

και επομένως $R_{2n}(x) \to 0$ καθώς το $n \to \infty$. Άρα

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παρόμοια

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\,. \qquad \text{(άθροισμα γεωμετρικής προόδου)}$$

Αν $|x| < 1$, τότε $x^{n+1} \to 0$ καθώς το $n \to \infty$ και επομένως

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

για κάθε $|x| < 1$. Αν στο παραπάνω ανάπτυγμα αντικαταστήσουμε το x με το $-x$, τότε

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \qquad \text{(γεωμετρική σειρά)}$$

για κάθε $|x| < 1$.

5. *Για τη συνάρτηση $y = \ln(1+x)$, $x > -1$, από τον πίνακα* (3.32) *έχουμε το ανάπτυγμα Maclaurin*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + \underbrace{(-1)^n \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}}_{R_n(x)}$$

με το υπόλοιπο κατά Cauchy, για κάποιο $\theta \in (0,1)$. Έστω x σταθερό, $|x| < 1$. Υπάρχει $\beta \in \mathbb{R}$ με $|x| < \beta < 1$. Επειδή $0 < 1 - \theta < 1 + \theta x$ και $0 < 1 - \beta < 1 + \theta x$, έχουμε

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1 \quad \textit{και} \quad 0 < \frac{1}{1+\theta x} < \frac{1}{1-\beta}\,.$$

Τότε,

$$|R_n(x)| = \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}|x|^{n+1} = \frac{1}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n |x|^{n+1} < \frac{1}{1-\beta}\beta^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$(0<\beta<1)$$

και επομένως $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. *Άρα*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + \cdots\,,$$

για κάθε $|x| < 1$. *Αν στο παραπάνω ανάπτυγμα αντικαταστήσουμε το* x *με το* $-x$, *τότε*

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\,,$$

για κάθε $|x| < 1$.

Παράδειγμα 3.71 (Διωνυμικό θεώρημα του Newton)**.** *Αν* $\alpha \in \mathbb{R}$, *τότε*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\,, \quad \textit{για κάθε } |x| < 1\,,$$

όπου

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \quad \textit{και} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,.$$

Απόδειξη. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Επειδή η n-οστή παράγωγος

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}\,,$$

το ανάπτυγμα Maclaurin της $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x > -1$, είναι

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

με το υπόλοιπο κατά Cauchy

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{n!}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{\alpha-1}x^{n+1}\,, \end{aligned}$$

για κάποιο $\theta \in (0,1)$. Έστω x σταθερό, $|x| < 1$. Υπάρχει $\beta \in \mathbb{R}$ με $|x| < \beta < 1$. Είναι $0 < 1-\theta < 1+\theta x$, οπότε

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1\,.$$

Επειδή $|x| < \beta$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\left|\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)x\right| < \beta \quad \text{για κάθε } k > N\,.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &< \left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right|(1+\theta x)^{\alpha-1}|x|^{n+1} \\
&= |\alpha x|\left|\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)x\right|\left|\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)x\right|\cdots\left|\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)x\right| \\
&\quad\cdot\left|\left(1-\frac{\alpha}{N+1}\right)x\right|\cdots\left|\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)x\right|(1+\theta x)^{\alpha-1} \\
&< |\alpha|(1+|\alpha|)^N|\cdot\beta^{n-N}(1+\theta x)^{\alpha-1}\,.
\end{aligned}$$

Επειδή $0 < 1-\beta < 1+\theta x$, για κάθε $\alpha < 1$ είναι $(1+\theta x)^{\alpha-1} < (1-\beta)^{\alpha-1}$. Επομένως

$$(1+\theta x)^{\alpha-1} \leq \begin{cases} 2^{\alpha-1} & \text{αν } \alpha \geq 1 \\ (1-\beta)^{\alpha-1} & \text{αν } \alpha < 1\,. \end{cases}$$

Θέτουμε $M = 2^{\alpha-1}$ αν $\alpha \geq 1$ και $M = (1-\beta)^{\alpha-1}$ αν $\alpha < 1$, το M δεν εξαρτάται από το n. Τότε,

$$|R_n(x)| < M|\alpha||(1+|\alpha|)^N\beta^{n-N} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (0 < \beta < 1)$$

και κατά συνέπεια $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Άρα

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

για κάθε $|x| < 1$. Αυτό το ανάπτυγμα το απέδειξε ο Newton και είναι γνωστό σαν *διωνυμικό θεώρημα του Newton.* □

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρουμε τα αναπτύγματα σε δυναμοσειρές (σειρές Maclaurin) βασικών συναρτήσεων που αποδείξαμε στα προηγούμενα παραδείγματα.

Πίνακας με αναπτύγματα γνωστών συναρτήσεων σε δυναμοσειρές

$$
\begin{array}{lll}
e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & & x \in \mathbb{R} \\
\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & & x \in \mathbb{R} \\
\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & & x \in \mathbb{R} \\
\sinh x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & & x \in \mathbb{R} \\
\cosh x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} & & x \in \mathbb{R} \\
\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n & \textbf{(γεωμετρική σειρά)} & |x| < 1 \\
\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n & \textbf{(γεωμετρική σειρά)} & |x| < 1 \\
\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} & & |x| < 1 \\
-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} & & |x| < 1 \\
\dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & & |x| < 1 \\
(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n & \textbf{(διωνυμική σειρά)} & |x| < 1
\end{array}
\tag{3.39}
$$

Σημείωση. Στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $y = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, σε δυναμοσειρά, ορίζουμε

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \quad \text{και} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Παράδειγμα 3.72. *Από το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης* $y = e^x$ *σε σειρά Maclaurin, για* $x = 1$ *έχουμε*

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots .$$

(i) Αν $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, *τότε*

$$0 < e - S_n < \frac{1}{n!n} \tag{3.40}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Ο αριθμός e *είναι άρρητος.*

Απόδειξη. (i) Για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
0 < e - S_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right) \\
&< \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{n!(n+1)}\left(1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{n!(n+1)} \cdot \frac{1}{1 - 1/(n+1)} \qquad \text{(άθροισμα γεωμετρικής σειράς)} \\
&= \frac{1}{n!n} .
\end{aligned}$$

(ii) Υποθέτουμε ότι ο e είναι ρητός αριθμός, έστω $e = \frac{p}{q}$ με $p, q \in \mathbb{N}^*$. Αν θέσουμε $e = \frac{p}{q}$ και $n = q$ στον τύπο (3.40), τότε

$$0 < \frac{p}{q} - S_q < \frac{1}{q!q} \Leftrightarrow 0 < (q-1)!p - q!S_q < \frac{1}{q} .$$

Επειδή $q!S_q = q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$, η διαφορά $(q-1)!p - q!S_q$ είναι ακέραιος αριθμός με

$$0 < (q-1)!p - q!S_q < \frac{1}{q} \leq 1 .$$

Δηλαδή ο ακέραιος αριθμός $(q-1)!p - q!S_q$ βρίσκεται μεταξύ 0 και 1, άτοπο. Άρα ο αριθμός e είναι άρρητος.

Παρατήρηση. Από την (3.40) έπεται ότι

$$S_n < e < S_n + \frac{1}{n!n} .$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω ανισότητες για να υπολογίσουμε με μεγάλη ακρίβεια τον αριθμό e. Αν π.χ. $n = 12$, τότε παίρνουμε

$$S_{12} < e < S_{12} + \frac{1}{12!12} \Leftrightarrow 0,718281826 < e < 0,718281832\,.$$

□

Παράδειγμα 3.73. *Για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ είναι*

$$\lim_{|t|\to\infty} t^n e^{-t^2} = 0\,.$$

Λύση. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{|t|\to\infty} \left| t^n e^{-t^2} \right| = \lim_{|t|\to\infty} |t|^n e^{-t^2} = 0\,.$$

Ισοδύναμα, αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{t\to\infty} t^n e^{-t^2} = 0\,.$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της $y = e^x$ σε δυναμοσειρά με $x = t^2$ έχουμε

$$e^{t^2} = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{n!} + \frac{t^{2(n+1)}}{(n+1)!} + \cdots$$

και επομένως

$$e^{t^2} > \frac{t^{2(n+1)}}{(n+1)!}\,.$$

Άρα,

$$t^n e^{-t^2} = t^n \frac{1}{e^{t^2}} < t^n \frac{(n+1)!}{t^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{t^{n+2}}\,.$$

Επειδή $\lim_{t\to\infty} 1/t^{n+2} = 0$, συμπεραίνουμε ότι και $\lim_{t\to\infty} t^n e^{-t^2} = 0$.

Σημείωση. Ο υπολογισμός του ορίου γίνεται και με τον κανόνα L'Hôpital. ■

Παράδειγμα 3.74. *Να βρεθούν όλα τα $c \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε*

$$\cosh x \leq e^{cx^2}\,, \quad \textit{για κάθε } x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.41}$$

Λύση. Επειδή

$$\begin{aligned} \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!2^n} && ((2n)! \geq n!2^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2/2)^n}{n!} = e^{x^2/2}\,, \end{aligned}$$

για $c \geq 1/2$ η ανισότητα $\cosh x \leq e^{cx^2}$ ισχύει.

Υποθέτουμε τώρα ότι η ανισότητα (3.41) ισχύει. Τότε

$$0 \leq \frac{e^{cx^2} - \cosh x}{x^2}, \quad \text{για κάθε } x \neq 0 .$$

Επειδή

$$e^{cx^2} = 1 + cx^2 + \frac{c^2x^4}{2!} + o(x^4) \text{ και } \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \quad (x \to 0),$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^{cx^2} - \cosh x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + cx^2 + \frac{c^2x^4}{2!} + o(x^4)\right) - \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)}{x^2} \\ &= \left(c - \frac{1}{2!}\right) + \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{c^2}{2!} - \frac{1}{4!}\right)x^2 + o(x^2)\right) = c - \frac{1}{2!}\end{aligned}$$

και επομένως $c - \frac{1}{2!} \geq 0 \Leftrightarrow c \geq \frac{1}{2}$.

Άρα, η ανισότητα (3.41) ισχύει αν και μόνο αν $c \geq \frac{1}{2}$. ■

Στο επόμενο παράδειγμα η συνάρτηση f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η σειρά Maclaurin της f συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως για κάθε $x \neq 0$ η σειρά Maclaurin της f δεν ισούται με $f(x)$.

Παράδειγμα 3.75 (Cauchy). *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 . \end{cases}$$

Τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη με $f^{(n)}(0) = 0$ για καθε $n \in \mathbb{N}$.

Συμπέρασμα. Είναι

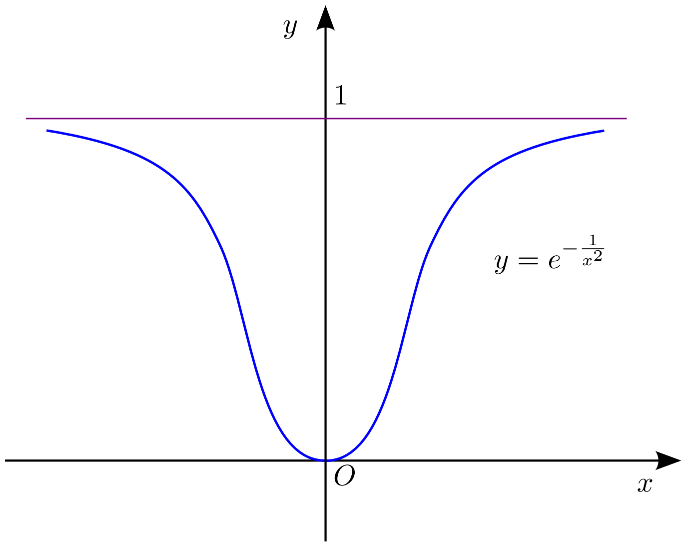
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x), \quad \text{για κάθε } x \neq 0 .$$

Άρα, σε οποιαδήποτε περιοχή του μηδενός η σειρά Maclaurin της f δεν ισούται με την $f(x)$.

Λύση. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \neq 0$

$$f^{(n)}(x) = P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}, \tag{3.42}$$

όπου $P_{3n}(1/x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $3n$ ως προς $1/x$.



– Η (3.42) προφανώς ισχύει για $n = 0$ με $P_0 \equiv 1$.

– Αν η (3.42) ισχύει για $n = k \geq 0$, τότε

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} \right)' \\ &= \frac{2}{x^3} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} - \frac{1}{x^2} P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} \\ &= \left(\frac{2}{x^3} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) \right) e^{-1/x^2} \\ &= P_{3(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} \end{aligned}$$

και επομένως η (3.42) ισχύει για $n = k + 1$ με

$$P_{3(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right) = P_{3k+3}\left(\frac{1}{x}\right) := \frac{2}{x^3} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Επομένως η (3.42) ισχύει για κάθε $n \geq 0$ και για κάθε $x \neq 0$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(0) = 0. \tag{3.43}$$

– Από τον ορισμό της f η (3.43) ισχύει για $n = 0$.

– Αν η (3.43) ισχύει για $n = k \geq 0$, τότε

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x-0} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} && \text{((3.42) για } n=k) \\
&= \lim_{|t|\to\infty} t P_{3k}(t) e^{-t^2} \\
&= 0 && \text{(Παράδειγμα 3.73)}
\end{aligned}
$$

και επομένως η (3.43) ισχύει για $n = k+1$. Άρα η (3.43) ισχύει για κάθε $n \geq 0$. ■

3.8 Ασκήσεις

1. Με τον κανόνα L'Hôpital υπολογίστε τα όρια

$$(\alpha') \quad \lim_{x\to 1} \frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x-1}, \qquad (\beta') \quad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}.$$

2. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hôpital δείξτε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0, \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0.$$

   Για το δεύτερο όριο υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ είναι βαθμού $n \geq 1$.

3. Αποδείξτε ότι αν $n \in \mathbb{N}$ και $x < 0$, τότε

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

4. (α΄) Αποδείξτε ότι αν $n \in \mathbb{N}^*$, n **άρτιος** και $x \geq 0$, τότε

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

   (β΄) Αποδείξτε ότι αν $n \in \mathbb{N}^*$, n **περιττός** και $x \geq 0$, τότε

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

5. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 2$, $\lim_{x\to\infty} xf''(x) = 0$. Αν $x > 0$, να αποδειχθεί ότι για κάποιο $\xi \in (x, x+1)$ είναι

$$xf'(x) = \frac{x}{x+1}(x+1)f(x+1) - xf(x) - \frac{1}{2}xf''(\xi)$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to\infty} xf'(x)$.

6. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη με $\lim_{x\to\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\infty} f'''(x) = 0$, να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ και $\lim_{x\to\infty} f''(x)$.

Υπόδειξη. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από τον τύπο Taylor είναι

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{f''(x)}{2!} + \frac{f'''(x+\theta_1)}{3!}$$

και

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{f''(x)}{2!} - \frac{f'''(x+\theta_2)}{3!},$$

για κάποια θ_1, θ_2 με $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$.

7. Έστω η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,1]$ και η f'' υπάρχει στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$. Αν

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \quad \text{και } f(1) = 1,$$

να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $|f''(\xi)| \geq 4$.

Πρακτική εφαρμογή: Αν ο χρόνος ενός αθλητή των $100m$ είναι $10\,\text{sec}$, τότε κάποια χρονική στιγμή η επιτάχυνση του αθλητή είναι τουλάχιστον $4m/\,\text{sec}^2$.

8. (**Ανισότητα Kolmogorov**) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και f''' είναι φραγμένες με

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = M_0 \text{ και } \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'''(x)| = M_3.$$

Δείξτε ότι η f' είναι φραγμένη με

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq \frac{1}{2}\sqrt[3]{9M_0^2 M_3}.$$

9. Έστω η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$ και η f'' υπάρχει στο ανοικτό διάστημα (a, b). Αν $f'(a) = f'(b) = 0$, δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε
$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|\,.$$

10. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $\lim_{x\to+\infty} f''(x) = 0$. Δείξτε ότι
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x+2) + f(x) - 2f(x+1)) = 0\,.$$

11. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^2 και τέτοια ώστε
$$f(x+y)f(x-y) \leq (f(x))^2\,, \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}\,.$$
Δείξτε ότι
$$f(x)f''(x) \leq (f'(x))^2\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

12. Χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor για τη συνάρτηση $f(x) = 1/x^\alpha$, $x \neq 0$, με $\alpha > 0$, να αποδειχθεί ότι
$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)\,, \quad \alpha > 0,\ n = 2, 3, \ldots\,.$$
Εφαρμογή. Για $\alpha > 0$ να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^{1+\alpha})$ συγκλίνει.

13. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Δείξτε ότι $f^{(n)}(0) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

14. (α΄) Χρησιμοποιώντας τον τύπο Maclaurin για τη συνάρτηση $y = \sin x$, δείξτε ότι
$$|\sin x - x| \leq \frac{1}{6}|x|^3\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$
(β΄) Αν $a \in \mathbb{R}$ και $c > 0$, για κάθε $x > 0$ δείξτε ότι
$$|x^a \sin(x^{-c}) - x^{a-c}| \leq \frac{1}{6}x^{a-3c}$$
και υπολογίστε το όριο: $\lim_{x\to+\infty} x^a \sin(x^{-c})$. Εξετάστε τις περιπτώσεις (*i*) $a < c$, (*ii*) $a = c$ και (*iii*) $a > c$.

15. Ζητείται να βρεθεί μη συγκλίνουσα φραγμένη ακολουθία (a_n), τέτοια ώστε

$$|a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n| \leq n^{-2}, \quad \forall n \geq 2.$$

Υπόδειξη. Αν $f(x) := \frac{1}{2}\sin(\ln(x+1))$, $x > -1$, ορίζουμε την ακολουθία (a_n) με $a_n = f(n)$. Εφαρμόζοντας τον τύπο Taylor για την f μέχρι τον όρο δεύτερης τάξης και κέντρο το $x_0 = n$, δείξτε ότι

$$|f(n-1) + f(n+1) - 2a_n| = |f''(\xi)|, \quad \text{για κάποιο } \xi \in (n-1, n+1),$$

με $|f''(\xi)| \leq n^{-2}$.

16. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$. Έστω η ακολουθία (S_n) με

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad n > \frac{1}{a}.$$

(α΄) Αν $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1/a$, χρησιμοποιώντας τον τύπο Maclaurin δείξτε ότι

$$S_n = \frac{n+1}{2n} f'(0) + \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 f''(\theta_{k,n}),$$

για κάποιο $\theta_{k,n} \in \left(0, \frac{k}{n^2}\right)$.

(β΄) Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{f'(0)}{2}.$$

17. Η n-οστή παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 1/x^2$ στο $(0, \infty)$ είναι

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (n+1)! x^{-(n+2)}, \qquad \forall x > 0.$$

(α΄) Χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor, με κέντρο το $x_0 = 1$, δείξτε ότι

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

όπου το πολυώνυμο Taylor

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1)(x-1)^k$$

και το υπόλοιπο

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{n+2}{\xi^{n+3}} (x-1)^{n+1}, \quad \text{για κάποιο } \xi \text{ μεταξύ } x \text{ και } 1.$$

(β΄) Για κάθε $x \in (0,1)$ δείξτε ότι

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{n+2}{x^2} \left(\frac{1-x}{x} \right)^{n+1} .$$

(γ΄) Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} |f(x) - P_n(x)| = 0$ και επομένως

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)(x-1)^k .$$

Κεφάλαιο 4

Αόριστο Ολοκλήρωμα

4.1 Παράγουσες

Ορισμός 4.1. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση στο διάστημα I. Ονομάζουμε* **παράγουσα** *της f στο I κάθε συνάρτηση F ορισμένη στο I τέτοια ώστε*

(i) Η F είναι παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x_0 του I με $F'(x_0) = f(x_0)$.

(ii) Αν το I έχει ελάχιστο (αντίστοιχα, μέγιστο) στοιχείο a, τότε η f είναι παραγωγίσιμη από δεξιά (αντίστοιχα, από αριστερά) στο a και $F'_+(a) = f(a)$ (αντίστοιχα, $F'_-(a) = f(a)$).

Πρόταση 4.2. *Αν η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ έχει μία παράγουσα F_1 στο διάστημα I, τότε για κάθε πραγματική σταθερά C η $F_1 + C$ είναι και πάλι παράγουσα της f στο I. Αντίστροφα, αν F_2 είναι μία παράγουσα της f στο I, υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε $F_2 = F_1 + C$.*

Απόδειξη. Επειδή $(F_1 + C)'(x) = (F_1(x) + C)' = F_1'(x) = f(x)$, η $F_1 + C$ είναι παράγουσα της f στο I. Αντίστροφα, η συνάρτηση $F_2 - F_1$ είναι παραγωγίσιμη στο I με $(F_2 - F_1)'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. Άρα $F_2(x) - F_1(x) = C$, δηλαδή $F_2(x) = F_1(x) + C$. □

Έστω F μία παράγουσα της συνάρτησης f στο διάστημα I. Το **αόριστο ολοκλήρωμα** της f είναι το σύνολο $F + C$ όλων των παραγουσών της f στο I και συμβολίζεται με $\int f(x)\,dx$. Δηλαδή

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C\,. \tag{4.1}$$

Αν $F'(x) = f(x)$, δηλαδή η F είναι μία παραγουσα της f σε κάποιο διάστημα I, από την (4.1) έχουμε

$$\boxed{\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x\,.} \tag{4.2}$$

Επίσης από την (4.1) προκύπτει ότι

$$\boxed{\int \mathrm{d}F(x) = \int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C\,.} \tag{4.3}$$

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις $f, g : I \to \mathbb{R}$ έχουν παράγουσες στο διάστημα I, τότε από τον ορισμό του αόριστου ολοκληρώματος έπεται άμεσα η ιδιότητα:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{4.4}$$

Πίνακας ολοκληρωμάτων βασικών στοιχειωδών συναρτήσεων

1. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c\,, \qquad \alpha \neq -1,\, x > 0$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c\,, \qquad x \neq 0$

3. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c\,, \qquad 0 < a \neq 1$

4. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c$

5. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

6. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + c$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c\,, \qquad x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2},\, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\,,\, k \in \mathbb{Z}$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c\,, \qquad x \in (k\pi,\, (k+1)\,\pi)\,,\, k \in \mathbb{Z}$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c_1, \\ -\arccos\left(\frac{x}{a}\right) + c_2, \end{cases} \qquad a > 0\,, \quad x \in (-a, a)$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c_1, & \\ & a\neq 0 \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arccot}\left(\frac{x}{a}\right)+c_2, & \end{cases}$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \begin{cases} \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+c_1, & a\neq 0, \\ \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c_2, & a>0. \end{cases}$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c\,, \quad |x|>|a|>0$

13. $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$

14. $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + c$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\coth x + c\,, \qquad x\neq 0$

4.2 Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

4.2.1 Παραγοντική Ολοκλήρωση

Έστω $f,g : I\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο διάστημα I. Επειδή $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$, ισχύει η σχέση

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + c\,. \tag{4.5}$$

Παράδειγμα 4.3. *Αν $a,b\in\mathbb{R}$, $ab\neq 0$, τότε*

$$(i) \qquad \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+c$$

και

$$(ii) \qquad \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}+c\,.$$

Λύση. (i) Αν $I = \int e^{ax} \sin bx\, dx$, εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \int \sin bx\, de^{ax} \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{1}{a} \int e^{ax}\, d\sin bx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx\, dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} \int \cos bx\, de^{ax} \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} \left(e^{ax} \cos bx - \int e^{ax}\, d\cos bx \right) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos bx - \frac{b^2}{a^2} I\,. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) I = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2} e^{ax} \Rightarrow I = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + c\,.$$

(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια. ■

Παρατήρηση 4.4. *Για τον υπολογισμό των παραπάνω ολοκληρωμάτων θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τον τύπο του Euler, δηλαδή*

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cos bx + i e^{ax} \sin bx\,, \quad \textit{για κάθε } a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Τότε

$$\left(\frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x} \right)' = e^{(a+ib)x}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x} &= \frac{a - ib}{a^2 + b^2} e^{(a+ib)x} \\ &= \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \left(e^{ax} \cos bx + i e^{ax} \sin bx \right) \\ &= \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + i \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax}\,. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.5. *Αν $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, τότε ισχύουν οι παρακάτω αναγωγικοί τύποι*

(α') $\displaystyle \int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx\,,$

(β') $\displaystyle \int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx\,.$

Απόδειξη. (α΄) Αν $I_n := \int \sin^n x\,dx$, χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^{n-1} x \sin x\,dx \\
&= \int \sin^{n-1} x(-\cos x)'\,dx \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n\,,
\end{aligned}$$

οπότε

$$nI_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}\,.$$

(β΄) Η απόδειξη είναι παρόμοια.

□

4.2.2 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\varphi : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα I και η συνάρτηση $f : J \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα J με $\varphi(I) \subseteq J$. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο J, από τον κανόνα αλυσίδας είναι

$$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,,\quad t\in I$$

και επομένως

$$\int (f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(\varphi(t))\,\mathrm{d}\varphi(t) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+c = F(\varphi(t))+c\,. \tag{4.6}$$

Παράδειγμα 4.6. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int \frac{x^5+x^2}{x^6+1}\,dx\,.$$

Λύση. Επειδή

$$I = \underbrace{\int \frac{x^5}{x^6+1}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx}_{I_2}\,,$$

αρκεί να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα I_1 και I_2. Είναι

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{6}\int \frac{1}{u}\,du && \text{(αντικατάσταση } u = x^6+1\text{)} \\ &= \frac{1}{6}\ln|u| + c_1 = \frac{1}{6}\ln(x^6+1) + c_1 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{v^2+1}\,dv && \text{(αντικατάσταση } v = x^3\text{)} \\ &= \frac{1}{3}\arctan v + c_2 = \frac{1}{3}\arctan(x^3) + c_2\,. \end{aligned}$$

Επομένως

$$I = \frac{1}{6}\ln(x^6+1) + \frac{1}{3}\arctan(x^3) + c\,.$$

■

4.2.3 Ολοκληρώματα Ρητών Συναρτήσεων

Για τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος της μορφής $\int R(x)\,dx$, όπου $R(x) = P(x)/Q(x)$ είναι ο λόγος δύο πολυωνύμων, χρειαζόμαστε το παρακάτω χρήσιμο αποτέλεσμα της άλγεβρας.

Πρόταση 4.7. *Έστω P και Q δύο πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές και τέτοια ώστε $\deg P(x) < \deg Q(x)$, δηλαδή ο βαθμός του $P(x)$ είναι μικρότερος του βαθμού του $Q(x)$. Αν*

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_nx+q_n)^{m_n}\,,$$

ο λόγος $P(x)/Q(x)$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{k_j}\frac{a_{jk}}{(x-x_j)^k}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m_j}\frac{b_{jk}x+c_{jk}}{(x^2+p_jx+q_j)^k}\right)\,,$$

όπου a_{jk}, b_{jk} και c_{jk} είναι πραγματικοί αριθμοί.

Παράδειγμα 4.8. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int \frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2}\,dx\,.$$

Λύση. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.7 είναι

$$\begin{aligned}\frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2} &= \frac{5x^2+3x-2}{x^2(x+2)}\\ &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+2}\\ &= \frac{Ax(x+2)+B(x+2)+Cx^2}{x^2(x+2)}\\ &= \frac{(A+C)x^2+(2A+B)x+2B}{x^2(x+2)}\,.\end{aligned}$$

Επειδή $5x^2+3x-2 \equiv (A+C)\,x^2+(2A+B)\,x+2B$, παίρνουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{aligned} A+C&=5\\ 2A+B&=3\\ 2B&=-2\end{aligned}\right\}$$

από το οποίο έπεται ότι $A=2$, $B=-1$ και $C=3$. Επομένως

$$I = 2\int\frac{1}{x}\,dx - \int\frac{1}{x^2}\,dx + 3\int\frac{1}{x+2}\,dx = 2\ln|x| + \frac{1}{x} + 3\ln|x+2| + c\,.$$

■

Παράδειγμα 4.9. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int\frac{x^8+3x^7+3x^6+5x^5+3x^4+x^3-3x^2-x}{(x+1)^3(x^2+1)^2}\,dx\,.$$

Λύση. Διαιρώντας το πολυώνυμο $P(x) = x^8+3x^7+3x^6+5x^5+3x^4+x^3-3x^2-x$ με το $Q(x) = (x+1)^3(x^2+1)^2 = x^7+3x^6+5x^5+7x^4+7x^3+5x^2+3x+1$, έχουμε

$$\frac{x^8+3x^7+3x^6+5x^5+3x^4+x^3-3x^2-x}{(x+1)^3(x^2+1)^2} = x - \frac{2x^6+2x^5+4x^4+4x^3+6x^2+2x}{(x+1)^3(x^2+1)^2}\,.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.7 είναι

$$\frac{2x^6+2x^5+4x^4+4x^3+6x^2+2x}{(x+1)^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}\,. \tag{4.7}$$

Η εύρεση των συντελεστών ανάγεται στην επίλυση ενός συστήματος επτά εξισώσεων με επτά αγνώστους. Όμως μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

Αν πολλαπλασιάσουμε την (4.7) με $(x+1)^3$ και στη συνέχεια θέσουμε $x=-1$, παίρνουμε $C=1$. Αφαιρώντας τον όρο $1/(x+1)^3$ και από τα δύο μέλη της (4.7) έχουμε

$$\frac{2x^5+3x^3+x^2+3x-1}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}\,. \tag{4.8}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την (4.8) με $(x+1)^2$ και στη συνέχεια θέσουμε $x=-1$, παίρνουμε $B=-2$. Προσθέτοντας τον όρο $2/(x+1)^2$ και στα δύο μέλη της (4.8) έχουμε

$$\frac{2x^4+3x^2+2x+1}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+1}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}\,. \tag{4.9}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την (4.9) με $x+1$ και στη συνέχεια θέσουμε $x=-1$, παίρνουμε $A=1$. Αφαιρώντας τον όρο $1/\,(x+1)$ και από τα δύο μέλη της (4.9) προκύπτει ότι

$$\frac{x^3-x^2+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{Dx+E}{x^2+1}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}=\frac{Dx^3+Ex^2+(D+F)x+(E+G)}{(x^2+1)^2}\,.$$

Επειδή $x^3-x^2+2x\equiv Dx^3+Ex^2+(D+F)x+(E+G)$, παίρνουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{r} D=1\\ E=-1\\ D+F=2\\ E+G=0 \end{array}\right\}$$

από το οποίο έπεται ότι $D=F=G=1$ και $E=-1$. Είναι λοιπόν

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=x-\left[\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\right]\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
I&=\int x\,dx-\int\frac{1}{x+1}\,dx+2\int\frac{1}{(x+1)^2}\,dx-\int\frac{1}{(x+1)^3}\,dx-\int\frac{x-1}{x^2+1}\,dx-\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx\\
&=\int x\,dx-\int\frac{1}{x+1}\,dx+2\int\frac{1}{(x+1)^2}\,dx-\int\frac{1}{(x+1)^3}\,dx-\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+\int\frac{1}{x^2+1}\,dx\\
&\quad-\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx-\underbrace{\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx}_{I_2}\\
&=\frac{x^2}{2}-\ln|x+1|-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}-I_2\,.
\end{aligned}$$

Όμως από την άσκηση 2 έχουμε

$$I_2=\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1)}\,dx=\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x\,,$$

οπότε

$$I=\frac{x^2}{2}-\ln|x+1|-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}+c\,.$$

■

4.2.4 Ολοκληρώματα της μορφής $\int \mathbf{R}\left(\cos \mathbf{x}, \sin \mathbf{x}\right)\, \mathbf{dx}$

Έστω $R(u, v)$ ρητή συνάρτηση των u και v, δηλαδή $R(u, v) = P(u, v)/Q(u, v)$, όπου τα πολυώνυμα P και Q είναι γραμμικοί συνδυασμοί των μονονύμων $u^m v^n$, με $m, n = 0, 1, 2, \ldots$. Υπάρχουν πολλοί μέθοδοι για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int R(\cos x, \sin x)\, dx$, η πρώτη μέθοδος που αναφέρουμε είναι πολύ γενική, δεν είναι όμως πάντα και η πλέον αποτελεσματική.

(α΄) Χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό $t = \tan \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$, οπότε $x = 2 \arctan t$. Επειδή

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\,, \quad \sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{και} \quad dx = \frac{2}{1 + t^2} dt\,,$$

έπεται ότι

$$\int R\left(\cos x, \sin x\right)\, dx = \int R\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right) \frac{2}{1 + t^2}\, dt\,,$$

δηλαδή έχουμε να ολοκληρώσουμε μια ρητή συνάρτηση.

Παράδειγμα 4.10. *Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα*

$$I = \int \frac{1}{\sin x}\, dx\,, \quad x \neq n\pi,\, n \in \mathbb{Z}\,.$$

Λύση. *1ος τρόπος.*

$$I = -\int \frac{\frac{1}{\sin x}\left(-\frac{1}{\sin x} - \cot x\right)}{\frac{1}{\sin x} + \cot x}\, dx = -\int \left(\frac{1}{\frac{1}{\sin x} + \cot x}\right)' dx = -\ln\left|\frac{1}{\sin x} + \cot x\right| + c\,.$$

2ος τρόπος.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}\, dx \\ &= -\int \frac{1}{1 - t^2}\, dt && \text{(αντικατάσταση } t = \cos x\text{)} \\ &= -\frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t}\right] dt \\ &= \frac{1}{2}\ln|1 - t| - \frac{1}{2}\ln|1 + t| + c \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 - t}{1 + t}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right| + c = \ln|\tan(x/2)| + c\,. \end{aligned}$$

3ος τρόπος.

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}\, dx &= \frac{1}{2}\int \tan(x/2)\, dx + \frac{1}{2}\int \cot(x/2)\, dx \\ &= -\ln|\cos(x/2)| + \ln|\sin(x/2)| + c \\ &= \ln|\tan(x/2)| + c\,. \end{aligned}$$

4ος τρόπος. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $t = \tan\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$, οπότε $x = 2\arctan t$, έχουμε

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{και} \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt\,.$$

Επομένως

$$I = \int \frac{1}{2t/\left(1+t^2\right)}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + c = \ln|\tan(x/2)| + c\,.$$

■

Παράδειγμα 4.11. *Αν $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int \frac{1}{a\sin x + b\cos x}\,dx\,.$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $t = \tan\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{2at/\left(1+t^2\right) + b\left(1-t^2\right)/\left(1+t^2\right)}\frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{2}{2at + b\left(1-t^2\right)}\,dt \\
&= -\frac{2}{b}\int \frac{1}{t^2 - 2\left(a/b\right)t - 1}\,dt \\
&= -\frac{2}{b}\int \frac{1}{\left(t-a/b\right)^2 - \left(1+a^2/b^2\right)}\,dt \\
&= -\frac{2}{b}\int \frac{1}{\left(t - a/b - \sqrt{a^2+b^2}/b\right)\left(t - a/b + \sqrt{a^2+b^2}/b\right)}\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \left(\frac{1}{t - a/b + \sqrt{a^2+b^2}/b} - \frac{1}{t - a/b - \sqrt{a^2+b^2}/b}\right)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\ln\left|t - a/b + \sqrt{a^2+b^2}/b\right| - \ln\left|t - a/b - \sqrt{a^2+b^2}/b\right|\right) + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{bt - a + \sqrt{a^2+b^2}}{bt - a - \sqrt{a^2+b^2}}\right| + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{b\tan(x/2) - a + \sqrt{a^2+b^2}}{b\tan(x/2) - a - \sqrt{a^2+b^2}}\right| + c\,.
\end{aligned}$$

■

Ας σημειωθεί ότι η ρητή συνάρτηση που προκύπτει με τον προηγούμενο μετασχηματισμό μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκη. Γι' αυτό το λόγο, ανάλογα με την περίπτωση, χρησιμοποιούνται και άλλοι μετασχηματισμοί.

(β') Στην περίπτωση ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int R\left(\cos^2 x, \sin^2 x\right)\, dx \quad \text{ή} \quad \int r\left(\tan x\right)\, dx\,,$$

όπου r είναι ρητή συνάρτηση, χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός $t = \tan x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, οπότε $x = \arctan t$. Επειδή

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2}\,, \quad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \text{και} \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt\,,$$

προκύπτουν ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων

$$\int R\left(\cos^2 x, \sin^2 x\right)\, dx = \int R\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2}\, dt\,,$$

$$\int r\left(\tan x\right)\, dx = \int r\left(t\right) \frac{1}{1+t^2}\, dt\,.$$

Παράδειγμα 4.12. *Αν $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}\, dx\,.$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $t = \tan x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\cos^2 x\,(a^2 \tan^2 x + b^2)}\, dx \\ &= \int \frac{1}{a^2 t^2 + b^2}\, dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{t^2 + (b/a)^2}\, dt \\ &= \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{at}{b}\right) + c \\ &= \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a \tan x}{b}\right) + c\,. \end{aligned}$$

■

(γ') Στην περίπτωση ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int R\left(\cos x, \sin^2 x\right) \sin x\, dx \quad \text{ή} \quad \int R\left(\cos^2 x, \sin x\right) \cos x\, dx\,,$$

χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός $t = \cos x$ ή $t = \sin x$ αντίστοιχα. Τα ολοκληρώματα παίρνουν τη μορφή

$$-\int R\left(t, 1-t^2\right)\, dt \quad \text{ή} \quad \int R\left(1-t^2, t\right)\, dt\,.$$

Παράδειγμα 4.13.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x}\,dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^7 x}\,d\sin x\\ &= \int \frac{1-t^2}{t^7}\,dt && \text{(αντικατάσταση } t=\sin x)\\ &= \int \left(t^{-7}-t^{-5}\right)\,dt = -\frac{1}{6}t^{-6}+\frac{1}{4}t^{-4}+c = \frac{1}{4\sin^4 x}-\frac{1}{6\sin^6 x}+c\,.\end{aligned}$$

4.2.5 Ολοκληρώματα της μορφής $\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\left(\mathbf{x}\right)\right)\,\mathbf{dx}$

(I) Αν $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, $n\in\mathbb{N}$, θέτουμε $t^n = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Τότε

$$x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}\,, \qquad y = t\,,$$

και η προς ολοκλήρωση συνάρτηση μετασχηματίζεται σε μια ρητή συνάρτηση.

Παράδειγμα 4.14. *Να υπολογιστεί το*

$$I = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx\,.$$

Λύση. Θέτουμε

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \quad \text{και ισοδύναμα} \quad x = \frac{t^3+1}{t^3-1}\,.$$

Τότε

$$\begin{aligned} I &= \int t\,d\left(\frac{t^3+1}{t^3-1}\right)\\ &= t\frac{t^3+1}{t^3-1} - \int \frac{t^3+1}{t^3-1}\,dt && \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\ &= t\frac{t^3+1}{t^3-1} - \int \frac{\left(t^3-1\right)+2}{t^3-1}\,dt\\ &= t\frac{t^3+1}{t^3-1} - t - \int \frac{2}{t^3-1}\,dt = \frac{2t}{t^3-1} - \underbrace{\int \frac{2}{t^3-1}\,dt}_{I_1}\,.\end{aligned}$$

Όμως

$$\frac{2}{t^3-1} = \frac{2}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{t-1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{t+2}{t^2+t+1}\,,$$

οπότε

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{2}{3}\int \frac{1}{t-1}\,dt - \frac{1}{3}\int \frac{2t+4}{t^2+t+1}\,dt \\
&= \frac{2}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{3}\int \frac{(2t+1)+3}{t^2+t+1}\,dt \\
&= \frac{2}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{3}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt - \int \frac{1}{t^2+t+1}\,dt \\
&= \frac{2}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{3}\ln\left(t^2+t+1\right) - \int \frac{1}{(t+1/2)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}\,dt \\
&= \frac{2}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{3}\ln\left(t^2+t+1\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\,(t+1/2)}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{2}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{3}\ln\left(t^2+t+1\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$

Άρα

$$I = \frac{2t}{t^3-1} - \frac{2}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{3}\ln\left(t^2+t+1\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c\,.$$

■

(II) Αν $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, με $ax^2+bx+c\geq 0$, τότε πρόκειται για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx\,.$$

Επειδή

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}\,,$$

χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση

$$x+\frac{b}{2a} = \begin{cases} \frac{t}{2a}\sqrt{b^2-4ac} & \text{αν } b^2-4ac>0\,, \\ \frac{t}{2a}\sqrt{4ac-b^2} & \text{αν } b^2-4ac<0\,, \end{cases}$$

το ολοκλήρωμα ανάγεται σε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int R\left(t,\sqrt{t^2+1}\right)\,dt\,,\qquad \int R\left(t,\sqrt{1-t^2}\right)\,dt\,,\qquad \int R\left(t,\sqrt{t^2-1}\right)\,dt\,.$$

– Το $\int R\left(t,\sqrt{t^2+1}\right)\,dt$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης αν χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό

$$\sqrt{t^2+1}=tu+1\,,\quad \text{ή}\quad \sqrt{t^2+1}=tu-1\,,\quad \text{ή}\quad \sqrt{t^2+1}=t-u\,.$$

– Το $\int R\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)\, dt$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης αν χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό

$$\sqrt{1-t^2} = u\,(1-t)\ , \quad \text{ή} \quad \sqrt{1-t^2} = u\,(1+t)\ , \quad \text{ή} \quad \sqrt{t^2+1} = tu \pm 1\,.$$

– Το $\int R\left(t, \sqrt{t^2-1}\right)\, dt$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης αν χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό

$$\sqrt{t^2-1} = u\,(t-1)\ , \quad \text{ή} \quad \sqrt{t^2+1} = u\,(t+1)\ , \quad \text{ή} \quad \sqrt{t^2+1} = t-u\,.$$

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί οφείλονται στον Euler [Leonhard Euler (1707–1783)].

Τα προηγούμενα ολοκληρώματα μετασχηματίζονται και σε τριγωνομετρικά ολοκληρώματα.

– Το $\int R\left(t, \sqrt{t^2+1}\right)\, dt$ ανάγεται σε τριγωνομετρικό ολοκλήρωμα αν χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό

$$t = \tan\theta\,, \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2)\,, \text{ οπότε } \sqrt{t^2+1} = \frac{1}{\cos\theta}\,.$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το μετασχηματισμό $t = \sinh u$ οπότε $\sqrt{t^2+1} = \cosh u$.

– Το $\int R\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)\, dt$ ανάγεται σε τριγωνομετρικό ολοκλήρωμα αν χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό

$$t = \sin\theta\,, \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2]\,, \text{ οπότε } \sqrt{1-t^2} = \cos\theta\,,$$

ή

$$t = \cos\theta\,, \quad \theta \in [0, \pi]\,, \text{ οπότε } \sqrt{1-t^2} = \sin\theta\,.$$

– Το $\int R\left(t, \sqrt{t^2-1}\right)\, dt$ ανάγεται σε τριγωνομετρικό ολοκλήρωμα αν χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό

$$t = \frac{1}{\cos\theta}\,, \ \theta \in [0, \pi/2) \text{ ή } \theta \in [\pi, 3\pi/2)\,, \text{ οπότε } \sqrt{t^2-1} = \tan\theta\,.$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το μετασχηματισμό $t = \cosh u$, $u \geq 0$, οπότε $\sqrt{t^2-1} = \sinh u$.

Παράδειγμα 4.15. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2+2x+2}}\, dx\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x+\sqrt{(x+1)^2+1}}\,dx \\ &= \int \frac{1}{t-1+\sqrt{t^2+1}}\,dt\,. \qquad \text{(αντικατάσταση } t=x+1\text{)} \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\sqrt{t^2+1} = t-u$, έχουμε $t^2+1 = t^2-2tu+u^2$, οπότε $t = \left(u^2-1\right)/2u$. Επομένως

$$\sqrt{t^2+1} = \frac{u^2-1}{2u} - u = -\frac{u^2+1}{2u} \quad \text{και} \quad dt = \frac{u^2+1}{2u^2}du\,.$$

Άρα

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(u^2-1)/2u - 1 - (u^2+1)/2u}\frac{u^2+1}{2u^2}\,du \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{u^2+1}{u^2+u}\,du \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{\left(u^2+u\right)+(1-u)}{u^2+u}\,du \\ &= -\frac{1}{2}\int du + \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u(u+1)}\,du \\ &= -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\int \left(\frac{2}{u+1} - \frac{1}{u}\right)du \\ &= -\frac{1}{2}u + \ln|u+1| - \frac{1}{2}\ln|u| + c \\ &= -\frac{1}{2}\left(t-\sqrt{t^2+1}\right) + \ln\left|t+1-\sqrt{t^2+1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|t-\sqrt{t^2+1}\right| + c \quad (u = t-\sqrt{t^2+1}) \\ &= -\frac{1}{2}\left(x+1-\sqrt{x^2+2x+2}\right) + \ln\left|x+2-\sqrt{x^2+2x+2}\right| \\ &\quad - \frac{1}{2}\ln\left|x+1-\sqrt{x^2+2x+2}\right| + c\,. \qquad (t=x+1) \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 4.16. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx\,.$$

Λύση. Αν θέσουμε

$$x = 2\tan\theta\,,\ \theta \in (-\pi/2, \pi/2)\,, \text{ τότε } \sqrt{x^2+4} = \frac{2}{\cos\theta} \ \text{ και } \ dx = \frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta\,.$$

Επομένως

$$I = \int \frac{1}{4\tan^2\theta \cdot \frac{2}{\cos\theta}} \cdot \frac{2}{\cos^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta = -\frac{1}{4\sin\theta} + c = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + c\,.$$

■

Παράδειγμα 4.17. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{4x - x^2}}\, dx\,, \qquad 0 < x < 4\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x^2-4x+4)}}\, dx \\ &= \int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\, dx \\ &= \int \frac{(2t+2)^2}{2\sqrt{1-t^2}} 2\, dt = 4\int \frac{(t+1)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\,. \qquad \text{(αντικατάσταση } x-2=2t\text{)} \end{aligned}$$

Αν θέσουμε

$$t = \sin\theta\,,\ \theta \in (-\pi/2, \pi/2)\,,\ \text{τότε}\ \theta = \arcsin t\,,\ \sqrt{1-t^2} = \cos\theta$$

και επομένως

$$\begin{aligned} I &= 4\int \frac{(\sin\theta+1)^2}{\cos\theta}\cos\theta\, d\theta \\ &= 4\int \sin^2\theta\, d\theta + 8\int \sin\theta\, d\theta + 4\int d\theta \\ &= 2\int (1-\cos 2\theta)\, d\theta + 8\int \sin\theta\, d\theta + 4\int d\theta \\ &= 2\theta - \sin 2\theta - 8\cos\theta + 4\theta + c \\ &= 6\theta - 8\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta + c \\ &= 6\arcsin t - 8\sqrt{1-t^2} - 2t\sqrt{1-t^2} + c \\ &= 6\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) - 4\sqrt{4x-x^2} - \frac{x-2}{2}\sqrt{4x-x^2} + c\,. \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 4.18. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-2}}\, dx\,, \qquad |x| > \sqrt{2}\,.$$

Λύση. Θέτουμε $x = \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}$, όπου $\theta \in (0, \pi/2)$ ή $\theta \in (\pi, 3\pi/2)$, οπότε

$$\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2}\tan\theta \quad \text{και} \quad dx = \frac{\sqrt{2}\tan\theta}{\cos\theta} d\theta\,.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{4\left(1/\cos^4\theta\right)\sqrt{2}\tan\theta} \frac{\sqrt{2}\tan\theta}{\cos\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \cos^3\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\int \left(1 - \sin^2\theta\right)\cos\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\cos\theta - \sin^2\theta\cos\theta\right)\, d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right) + c \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{x^2-2}}{x} - \frac{\left(x^2-2\right)^{3/2}}{3x^3}\right) + c\,.
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 4.19. *Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα*

$$\int \sqrt{\tan\theta}\, d\theta\,, \quad \theta \in \left(n\pi,\, (n+1/2)\,\pi\right)\,,\, n \in \mathbb{Z}\,.$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = \sqrt{\tan\theta}$, είναι

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{\tan\theta}\cos^2\theta} d\theta = \frac{1 + \tan^2\theta}{2\sqrt{\tan\theta}} d\theta = \frac{1+t^4}{2t} d\theta \Leftrightarrow d\theta = \frac{2t}{1+t^4} dt\,.$$

Επομένως

$$\int \sqrt{\tan\theta}\, d\theta = \int t\frac{2t}{t^4+1}\, dt = \int \frac{2t^2}{t^4+1}\, dt\,. \tag{4.10}$$

1ος τρόπος : Επειδή $t^4+1=(t^2+1)^2-2t^2=(t^2+1+\sqrt{2}t)(t^2+1-\sqrt{2}t)$, από την (4.10) έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{\tan\theta}\,d\theta &= \int \frac{2t^2}{(t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1)}\,dt\\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt+\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt\\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt+\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt\\
&\quad +\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt\\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt+\frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+1/\sqrt{2})^2}\,dt+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,dt\\
&\quad +\frac{1}{2}\int \frac{1}{(t-1/\sqrt{2})^2+(1/\sqrt{2})^2}\,dt\\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(t^2+\sqrt{2}t+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{t+1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(t^2-\sqrt{2}t+1)\\
&\quad +\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{t-1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}\right)+C\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}t+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}t-1)+C\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\tan\theta-\sqrt{2\tan\theta}+1}{\tan\theta+\sqrt{2\tan\theta}+1}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2\tan\theta}+1)\\
&\quad +\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2\tan\theta}-1)+C
\end{aligned}
$$

όπου $C\in\mathbb{R}$.

2ος τρόπος : Από την (4.10) έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{\tan\theta}\,d\theta &= \int \frac{2t^2}{t^4+1}\,dt=\int \frac{t^2-1}{t^4+1}\,dt+\int \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt=\int \frac{1-t^{-2}}{t^2+t^{-2}}\,dt+\int \frac{1+t^{-2}}{t^2+t^{-2}}\,dt\\
&= \int \frac{1-t^{-2}}{(t+t^{-1})^2-2}\,dt+\int \frac{1+t^{-2}}{(t-t^{-1})^2+2}\,dt\,.
\end{aligned}
$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\tan\theta}\,d\theta &= \int \frac{1-t^{-2}}{(t+t^{-1})^2-2}\,dt + \int \frac{1+t^{-2}}{(t-t^{-1})^2+2}\,dt \\
&= \int \frac{1}{u^2-2}\,du + \int \frac{1}{v^2+2}\,dv \qquad \text{(αντικατάσταση } u=t+t^{-1} \text{ και } v=t-t^{-1}\text{)} \\
&= \int \frac{1}{(u-\sqrt{2})(u+\sqrt{2})}\,du + \int \frac{1}{v^2+2}\,dv \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{1}{u-\sqrt{2}}\,du - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{1}{u+\sqrt{2}}\,du + \int \frac{1}{v^2+(\sqrt{2})^2}\,dv \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|u-\sqrt{2}| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|u+\sqrt{2}| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) + C \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{t+t^{-1}-\sqrt{2}}{t+t^{-1}+\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t-t^{-1}}{\sqrt{2}}\right) + C \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}\right) + C \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\tan\theta-\sqrt{2\tan\theta}+1}{\tan\theta+\sqrt{2\tan\theta}+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan\theta-1}{\sqrt{2\tan\theta}}\right) + C
\end{aligned}$$

όπου $C \in \mathbb{R}$.

Σημείωση. Είναι

$$\begin{aligned}
&\arctan(\sqrt{2\tan\theta}+1) + \arctan(\sqrt{2\tan\theta}-1) \\
&= \arctan\left(\frac{2\sqrt{2\tan\theta}}{1-(\sqrt{2\tan\theta}+1)(\sqrt{2\tan\theta}-1)}\right) + C_1 \qquad \text{(Παράδειγμα 3.29(β'))} \\
&= -\arctan\left(\frac{\sqrt{2\tan\theta}}{\tan\theta-1}\right) + C_1 \\
&= \arctan\left(\frac{\tan\theta-1}{\sqrt{2\tan\theta}}\right) - \frac{\pi}{2} + C_1 = \arctan\left(\frac{\tan\theta-1}{\sqrt{2\tan\theta}}\right) + C_2\,,
\end{aligned}$$

για κάποιο $C_2 \in \mathbb{R}$. ■

4.3 Ασκήσεις

1. Αν $m, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, να αποδειχθούν οι παρακάτω αναγωγικοί τύποι

   (i) $\displaystyle \int \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx\,.$

(ii) $\displaystyle\int \ln^m x\,dx = x\ln^m x - m\int \ln^{m-1} x\,dx\,,\ \ x>0.$

(iii) $\displaystyle\int x^m e^x\,dx = x^m e^x - m\int x^{m-1}e^x\,dx\,,$

(iv) $\displaystyle\int x^m \sin x\,dx = -x^m\cos x + m\int x^{m-1}\cos x\,dx\,.$

(v) $\displaystyle\int x^m \cos x\,dx = x^m\sin x - m\int x^{m-1}\sin x\,dx\,,$

(vi) $\displaystyle\int x^a \ln^m x\,dx = \frac{x^{a+1}\ln^m x}{a+1} - \frac{m}{a+1}\int x^a\ln^{m-1} x\,dx\,,\ \ x>0,\ a\in\mathbb{R},\ a\neq -1.$

2. Αν

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx\,,\quad a\neq 0\,,\quad n\in\mathbb{N}^*\,,$$

να αποδειχθεί ο αναγωγικός τύπος

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n\,.$$

Να υπολογιστεί το I_2 και το I_3.

3. Δείξτε ότι

$$\int x(\arctan x)^2\,dx = \frac{1}{2}(x^2+1)(\arctan x)^2 - x\arctan x + \ln\sqrt{x^2+1} + C\,.$$

4. Δείξτε ότι

(i)

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\,,\quad x\neq \pm a\,,\, a\neq 0\,.$$

(ii)

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C\,,\quad x\neq\pm 1\,.$$

(iii) Αν $x\neq -1$,

$$\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx = x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C\,.$$

(iv)

$$\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}\,dx = x + \frac{1}{8}\ln(4x^2-4x+3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + C\,.$$

(v) Αν $x\neq -1$,

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^3}\,dx = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C\,.$$

(vi) Αν $x \neq -1$,

$$\int \frac{4x^2+4}{(x+1)(x^2+2x+5)}\,dx = 2\ln|x+1| + \ln(x^2+2x+5) - 4\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

(vii) Αν $x \neq -1$,

$$\int \frac{-x^3+x^2+x+3}{(x+1)(x^2+1)^2}\,dx = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + \frac{x}{x^2+1} + C\,.$$

(viii)

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \left[\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{2x-2\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right] dx$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\arctan(\sqrt{2}x+1) + \arctan(\sqrt{2}x-1)\right] + C\,.$$

5. Δείξτε ότι

(i)

$$\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2\tan(x/2)+1}{\sqrt{3}}\right] + C\,.$$

(ii)

$$\int \frac{1}{2\sin x + \sin 2x}\,dx = \frac{1}{4}\ln|\tan(x/2)| + \frac{1}{8}\tan^2(x/2) + C\,.$$

(iii)

$$\int \frac{1}{\sin x + \tan x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|\tan(x/2)| - \frac{1}{4}\tan^2(x/2) + C\,.$$

(iv)

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}\right| + C\,, \quad x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}\,,\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

(v)

$$\int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}\,dx = -\frac{1}{1+\tan x} + C\,.$$

(vi)

$$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}\,dx = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x - 2\cot 2x + C\,.$$

(vii)

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}\,dx = -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C\,.$$

(viii)

$$\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx = \frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\sin 4x + \frac{1}{1024}\sin 8x + C\,.$$

6. Δείξτε ότι

(i)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx = \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} - 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C\,, \quad x > 0\,.$$

(ii)

$$\int \frac{1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\,dx = 2\sqrt{x+1} + \ln\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right) - 2\sqrt{x} + C\,, \quad x > 0\,.$$

(iii)

$$\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx = \frac{3}{10}(x^2+1)^{5/3} - \frac{3}{4}(x^2+1)^{2/3} + C\,.$$

(iv)

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx = \frac{3}{2}x^{2/3} - \frac{12}{7}x^{7/12} + 2\sqrt{x} - \frac{12}{5}x^{5/12} + 3\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x} + 6\sqrt[6]{x}$$
$$- 12\sqrt[12]{x} + 12\ln(\sqrt[12]{x}+1) + C\,, \quad x > 0\,.$$

(v)

$$\int \sqrt{1-e^x}\,dx = 2\sqrt{1-e^x} + \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-e^x}}{1+\sqrt{1-e^x}}\right) + C\,, \quad x \le 0\,.$$

(vi)

$$\int \sqrt{e^x-1}\,dx = 2\sqrt{e^x-1} - 2\arctan\sqrt{e^x-1} + C\,, \quad x \ge 0\,.$$

(vii)

$$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} - \ln(1+x) + C\,, \quad x > 0\,.$$

7. Δείξτε ότι

(i)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+8}}\,dx = \ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+8}\right) + C\,.$$

(ii)

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + C\,, \quad a \neq 0\,.$$

(iii)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}\,dx = \sqrt{x^2-4x} + 2\ln\left(x-2+\sqrt{x^2-4x}\right) + C\,, \quad x \in (-\infty,0)\cup(4,\infty)\;.$$

(iv)

$$\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-16}}\,dx = \frac{1}{128}\left[\arccos(4/x) + 4\frac{\sqrt{x^2-16}}{x^2}\right] + C\,, \quad |x| > 4\,.$$

(v)

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-6x-1}}\,dx = \sqrt{x^2-6x-1} + 4\ln\left(x-3+\sqrt{x^2-6x-1}\right) + C\,,$$

$$x \in \left(-\infty,\, 3-\sqrt{10}\right) \cup \left(3+\sqrt{10},\, \infty\right)\;.$$

(vi)

$$\int \sqrt{2x-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\arcsin(x-1) + (x-1)\sqrt{2x-x^2}\right] + C\,, \quad 0 \le x \le 2\,.$$

(vii)

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{8}a^4\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{8}x\sqrt{a^2-x^2}(2x^2-a^2) + C\,, \quad |x| < a\,.$$

8. Αν $a > 0$ και $x \in [0,\pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$, δείξτε ότι

$$\int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + a}\,dx = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + a} + \tan x\right) + \sqrt{a}\arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{a+1}}\,\sin x\right) + C\,.$$

9. Αν $a > 0$, δείξτε ότι

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^{2a}+x^a+1}}\,dx = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{1}{x^a} + \frac{1}{2} + \sqrt{1+\frac{1}{x^a}+\frac{1}{x^{2a}}}\right) + C\,, \quad x > 0\,.$$

Κεφάλαιο 5

Ολοκλήρωμα Riemann

5.1 Το ορισμένο ολοκλήρωμα

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$, φραγμένη συνάρτηση. Μια **διαμέριση** του $[a, b]$ είναι ένα πεπερασμένο διατεταγμένο σύνολο $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, όπου

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\,.$$

Αν P, Q είναι δύο διαμερίσεις του $[a, b]$, θα λέμε ότι η διαμέριση Q είναι **λεπτότερη** από τη διαμέριση P, αν $P \subset Q$, δηλαδή αν η Q έχει επιπλέον σημεία από την P. Έστω

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad \text{και} \quad M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}\ ,$$

για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$.

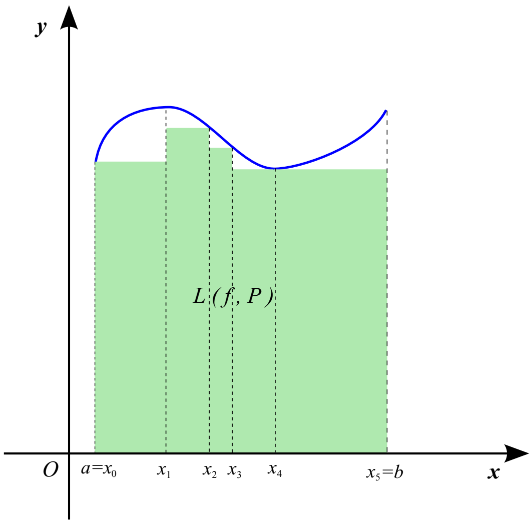
Το **κάτω άθροισμα** της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση P ορίζεται ως εξής

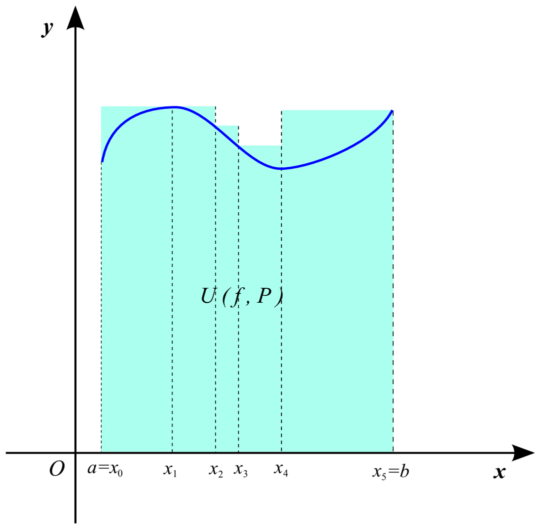
$$L(f, P) := \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})\,.$$

Παρόμοια, το **άνω άθροισμα** της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση P ορίζεται ως εξής

$$U(f, P) := \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})\,.$$

Τα $L(f, P)$, $U(f, P)$ λέγονται και **αθροίσματα Darboux**.





Παρατήρηση 5.1. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε*

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})\,.$$

Επειδή η ταλάντωση της συνάρτησης f στο διάστημα $I_k=[x_{k-1},x_k]$, $1\le k\le n$, είναι

$$\omega(f,I_k)=\sup\{f(x):x\in I_k\}-\inf\{f(x):x\in I_k\}=M_k-m_k\,,$$

η διαφορά $U(f,P)-L(f,P)$ γράφεται στη μορφή

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\omega(f,I_k)\Delta x_k\,,$$

όπου $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$.

Αν

$$m:=\inf\{f(x):x\in[a,b]\}\quad\text{και}\quad M:=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}\,,$$

τότε

$$m(x_k-x_{k-1})\le m_k(x_k-x_{k-1})\le M_k(x_k-x_{k-1})\le M(x_k-x_{k-1})\,,$$

$k=1,2,\ldots,n$. Επομένως

$$m\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\le\sum_{k=1}^{n}m_k(x_k-x_{k-1})\le\sum_{k=1}^{n}M_k(x_k-x_{k-1})\le M\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})$$

και κατά συνέπεια

$$m(b-a)\le L(f,P)\le U(f,P)\le M(b-a)\,. \tag{5.1}$$

Αν $\mathcal{P}([a,b])$ είναι η οικογένεια όλων των διαμερίσεων του $[a,b]$, από τις ανισότητες (5.1) προκύπτει ότι το σύνολο $\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$ είναι άνω φραγμένο στο $\mathbb{R}$ ($M(b-a)$ είναι ένα άνω φράγμα). Επομένως το $\sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$ υπάρχει, λέγεται **κάτω ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Δηλαδή

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}\ .$$

Παρόμοια, το σύνολο $\{U(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$ είναι κάτω φραγμένο στο $\mathbb{R}$ ($m(b-a)$ είναι ένα κάτω φράγμα). Επομένως το $\inf\{U(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$ υπάρχει, λέγεται **άνω ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Δηλαδή

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\{U(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}\ .$$

Έστω $P \in \mathcal{P}([a,b])$. Επειδή $L(f,P) \leq U(f,Q)$ για κάθε διαμέριση Q του $[a,b]$, έπεται ότι

$$L(f,P) \leq \inf\{U(f,Q) : Q \in \mathcal{P}([a,b])\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

Επομένως

$$\sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\} \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

και άρα

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

Ορισμός 5.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι* **ολοκληρώσιμη στο** $[a,b]$, *αν*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

Σ' αυτή την περίπτωση η κοινή αυτή τιμή λέγεται **ολοκλήρωμα της** f **στο** $[a,b]$ *και συμβολίζεται με* $\int_a^b f(x)\,dx$. *Δηλαδή*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

Αυτό το ολοκλήρωμα είναι γνωστό και σαν **ολοκλήρωμα Darboux**. Ο Riemann όρισε το ολοκλήρωμα λίγο διαφορετικά. Στην επόμενη παράγραφο θα δώσουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος κατά Riemann και θα αποδείξουμε ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

Αν μια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε ορίζουμε

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx \text{ και για } c \in [a,b],\ \int_c^c f(x)\,dx := 0\,.$$

Παράδειγμα 5.3. *Η συνάρτηση Dirichlet*

$$D(x) := \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

δεν είναι ολοκληρώσιμη σ' ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$. *Πράγματι, για κάθε διαμέριση* $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *του* $[a, b]$ *είναι*

$$L(D, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0(x_k - x_{k-1}) = 0$$

και

$$U(D, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 1(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = b - a\,.$$

Επομένως

$$\sup\{L(D, P) :\ P \in \mathcal{P}([a, b])\} = 0 \quad \text{και} \quad \inf\{U(D, P) :\ P \in \mathcal{P}([a, b])\} = b - a\,,$$

δηλαδή

$$\underline{\int_a^b} D(x)\,dx = 0 < b - a = \overline{\int_a^b} D(x)\,dx$$

και άρα η συνάρτηση Dirichlet δεν είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$.

Παράδειγμα 5.4. *Αν η συνάρτηση* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι σταθερή με* $f(x) = c$, *η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$ *με*

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a)\,.$$

Πράγματι, έστω $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *τυχαία διαμέριση του* $[a, b]$. *Είναι* $M_k = m_k = c$, $1 \le k \le n$, *οπότε*

$$L(f, P) = U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) = c\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = c(x_n - x_0) = c(b - a)\,.$$

Επομένως

$$\underline{\int_a^b} c\,dx = \sup\{L(f, P) :\ P \in \mathcal{P}([a, b])\} = c(b - a) = \inf\{U(f, P) :\ P \in \mathcal{P}([a, b])\} = \overline{\int_a^b} c\,dx$$

και άρα η f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$ *με*

$$\int_a^b c\,dx = \underline{\int_a^b} c\,dx = \overline{\int_a^b} c\,dx = c(b - a)\,.$$

Ορισμός 5.5. *Η* **λεπτότητα ή νόρμα** *μιας διαμέρισης $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ενός διαστήματος $[a, b]$, συμβολίζεται με $\|P\|$, είναι το μέγιστο από τα μήκη των υποδιαστημάτων στα οποία το $[a, b]$ διαιρείται με τα σημεία της διαμέρισης P. Δηλαδή,*

$$\|P\| := \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) .$$

Λήμμα 5.6. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω*

$$M = \sup \{f(x) : a \leq x \leq b\} , \quad m = \inf \{f(x) : a \leq x \leq b\} .$$

Αν P, Q είναι δύο διαμερισεις του $[a, b]$ με $P \subset Q$ και η Q έχει r σημεία στο (a, b) περισσότερα από την P, τότε

(i) $0 \leq U(f, P) - U(f, Q) \leq r(M - m)\|P\|$,

(ii) $0 \leq L(f, Q) - L(f, P) \leq r(M - m)\|P\|$.

Απόδειξη. (i) Έστω $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ και έστω η διαμέριση Q έχει ένα επιπλέον σημείο $y \in (a, b)$ από την P. Υποθέτουμε ότι $x_{k-1} < y < x_k$. Αν $M_k = \sup \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$, $M'_k = \sup \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq y\}$ και $M''_k = \sup \{f(x) : y \leq x \leq x_k\}$, είναι

$$m \leq M'_k, M''_k \leq M_k \leq M .$$

Τότε

$$\begin{aligned} U(f, P) - U(f, Q) &= M_k(x_k - x_{k-1}) - M'_k(y - x_{k-1}) - M''_k(x_k - y) \\ &\geq M_k(x_k - x_{k-1}) - M_k(y - x_{k-1}) - M_k(x_k - y) = 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} U(f, P) - U(f, Q) &= M_k(x_k - x_{k-1}) - M'_k(y - x_{k-1}) - M''_k(x_k - y) \\ &\leq M(x_k - x_{k-1}) - m(y - x_{k-1}) - m(x_k - y) \\ &= (M - m)(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq (M - m)\|P\| . \end{aligned}$$

Αν η Q έχει r σημεία στο (a,b) περισσότερα από την P, επαγωγικά αποδεικνύεται ότι

$$0 \leq U(f,P) - U(f,Q) \leq r(M-m)\|P\|\,.$$

Αφήνουμε την απόδειξη σαν άσκηση.

(ii) Η απόδειξη είναι παρόμοια.

□

Πόρισμα 5.7. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω P, Q δύο διαμερίσεις του $[a,b]$ με $P \subset Q$. Τότε*

$$L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f,Q) \leq U(f,P)\,. \tag{5.2}$$

Δίνουμε τώρα ένα χαρακτηρισμό για την ολοκληρωσιμότητα μιας συνάρτησης η οποία είναι γνωστή και σαν συνθήκη του Riemann.

Θεώρημα 5.8 (1ο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a,b]$ τέτοια ώστε*

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon\,.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon\,.$$

Τότε

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon\,,$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ και επομένως $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$.

Αντίστροφα, έστω $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$. Από τον ορισμό του άνω και του κάτω ολοκληρώματος, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαμερίσεις P_1 και P_2 του $[a,b]$ τέτοιες ώστε

$$U(f,P_1) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad L(f,P_2) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Αν $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$, η διαμέριση P_ε είναι λεπτότερη από τις P_1 και P_2 και επομένως

$$\begin{aligned}
U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) &\le U(f,P_1) - L(f,P_2) && \text{(από την (5.2))}\\
&< \left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} && \left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\right)\\
&= \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

□

Θα δώσουμε στη συνέχεια ένα δεύτερο χαρακτηρισμό για την ολοκληρωσιμότητα μιας πραγματικής συνάρτησης. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το Λήμμα 5.6.

Θεώρημα 5.9 (2ο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ με $\|P\| < \delta$ είναι*

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon\,.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το Θεώρημα 5.8 υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Αν P είναι μια οποιαδήποτε διαμέριση του $[a,b]$, τότε η διαμέριση $P \cup P_\varepsilon$ είναι λεπτότερη της P_ε και επομένως

$$U(f,P\cup P_\varepsilon) - L(f,P\cup P_\varepsilon) \le U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Υποθέτουμε ότι η διαμέριση P_ε έχει r σημεία στο (a,b). Τότε η διαμέριση $P\cup P_\varepsilon$ έχει το πολύ r σημεία στο (a,b) περισσότερα από την P. Αν πάρουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{3r(M-m)}$, όπου $M = \sup\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$ και $m = \inf\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$, τότε για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ με $\|P\| < \delta$, από το Λήμμα 5.6 έχουμε

$$U(f,P) - U(f,P\cup P_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{και} \quad L(f,P\cup P_\varepsilon) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} &U(f,P) - L(f,P) \\ &\quad = (U(f,P) - U(f,P\cup P_\varepsilon)) + (U(f,P\cup P_\varepsilon) - L(f,P\cup P_\varepsilon)) + (L(f,P\cup P_\varepsilon) - L(f,P)) \\ &\quad < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ με $\|P\| < \delta$.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ με $\|P\| < \delta$ τέτοια ώστε $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. Τότε

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon\,,$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Επομένως $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$. □

Ολοκληρωσιμότητα των συνεχών και των μονότονων συναρτήσεων

Εφαρμόζουμε το πρώτο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας για να αποδείξουμε ότι κάθε συνεχής και κάθε μονότονη συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a,b]$ είναι ολοκληρώσιμη.

Θεώρημα 5.10. *(α')* *Αν η συνάρτηση* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *είναι συνεχής, τότε η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$.

(β') *Αν η συνάρτηση* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *είναι μονότονη, τότε η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$.

Απόδειξη. (α') Η f είναι *ομοιόμορφα συνεχής* στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$. Επομένως για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x,y\in[a,b]$ με $|x-y| < \delta$ να ισχύει

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Έστω $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ διαμέριση του $[a, b]$ με λεπτότητα $\|P\| < \delta$. Επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$, υπάρχουν $\xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ με

$$m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(\xi_k) \quad \text{και} \quad M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(\eta_k)\,.$$

Επειδή $|\eta_k - \xi_k| < \delta$, θα είναι

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(x_n - x_0) = \varepsilon \end{aligned}$$

και από το πρώτο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

(β΄) Έστω $\varepsilon > 0$. Υποθέτουμε ότι η f είναι *αύξουσα* στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ οπότε $f(a) < f(b)$ (αν $f(a) = f(b)$, τότε η f είναι σταθερή και επομένως είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$). Θεωρούμε τη διαμέριση $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ του $[a, b]$ με

$$\|P\| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}\,.$$

Επειδή

$$m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(x_{k-1}) \quad \text{και} \quad M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) = f(x_k)\,,$$

είναι

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(x_n) - f(x_0)) = \varepsilon \end{aligned}$$

και από το πρώτο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Ανάλογη είναι η απόδειξη αν η f είναι φθίνουσα στο $[a,b]$.

□

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Θα λέμε ότι $\lim_{\|P\|\to 0} L(f,P) = \lambda$ (αντίστοιχα, $\lim_{\|P\|\to 0} U(f,P) = \lambda$), $\lambda \in \mathbb{R}$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $P \in \mathcal{P}([a,b])$ με $\|P\| < \delta$ να ισχύει

$$|L(f,P) - \lambda| < \varepsilon \ (\text{αντίστοιχα, } |U(f,P) - \lambda| < \varepsilon)\,.$$

Πρόταση 5.11. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση.*

(α΄) Είναι

$$(i) \quad \lim_{\|P\|\to 0} L(f,P) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \text{και} \quad (ii) \quad \lim_{\|P\|\to 0} U(f,P) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

(β΄) Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν

$$\lim_{\|P\|\to 0} U(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} L(f,P)\,.$$

Αν αυτό συμβαίνει, τότε

$$\lim_{\|P\|\to 0} U(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} L(f,P) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Απόδειξη. (α΄) Θα δείξουμε μόνο τη (i), η απόδειξη της (ii) είναι ανάλογη.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του κάτω ολοκληρώματος υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx < L(f,P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Αν $P \in \mathcal{P}([a,b])$, τότε η διαμέριση $P \cup P_\varepsilon$ είναι λεπτότερη της P_ε και επομένως

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx < L(f,P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f,P\cup P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Υποθέτουμε ότι η διαμέριση P_ε έχει r σημεία στο (a,b). Τότε η διαμέριση $P\cup P_\varepsilon$ έχει το πολύ r σημεία περισσότερα από την P. Παίρνουμε

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2r(M-m)},\text{ όπου } M=\sup_{a\le x\le b} f(x) \text{ και } m=\inf_{a\le x\le b} f(x)\,.$$

Τότε για κάθε $P\in\mathcal{P}([a,b])$ με $\|P\|<\delta$ από το Λήμμα 5.6 (ii) έχουμε

$$L\left(f,P\cup P_\varepsilon\right)\le L(f,P)+r(M-m)\|P\|<L(f,P)+\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Επομένως για κάθε $P\in\mathcal{P}([a,b])$ με $\|P\|<\delta$ ισχύει

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx<L(f,P)+\varepsilon \Leftrightarrow 0\le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx-L(f,P)<\varepsilon\,.$$

Άρα

$$\lim_{\|P\|\to 0} L(f,P)=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

(β΄) Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Όμως από το (α΄) είναι $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ αν και μόνο αν $\lim_{\|P\|\to 0} U(f,P)=\lim_{\|P\|\to 0} L(f,P)$. Αν αυτό συμβαίνει, τότε

$$\lim_{\|P\|\to 0} U(f,P)=\lim_{\|P\|\to 0} L(f,P)=\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

□

Το επόμενο αποτέλεσμα διευκολύνει την απόδειξη ολοκληρωσιμότητας μιας συνάρτησης γιατί περιορίζει τη μελέτη αυτή σε ακολουθίες διαμερίσεων (P_n) με $\lim_{n\to\infty}\|P_n\|=0$.

Πρόταση 5.12. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω (P_n) ακολουθία διαμερίσεων του $[a,b]$ με $\lim_{n\to\infty}\|P_n\|=0$.*

(α΄) Είναι

$$(i)\quad \lim_{n\to\infty} L(f,P_n)=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \textit{και} \quad (ii)\quad \lim_{n\to\infty} U(f,P_n)=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

(β΄) Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n)=\lim_{n\to\infty} L(f,P_n)\,.$$

Αν αυτό συμβαίνει, τότε

$$\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Απόδειξη. (α΄) Θα δείξουμε μόνο τη (i), η απόδειξη της (ii) είναι ανάλογη.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή από την Πρόταση 5.11 (α΄)(i) είναι $\lim_{\|P\|\to 0} L(f, P) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $P \in \mathcal{P}([a, b])$ με $\|P\| < \delta$ ισχύει

$$0 \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - L(f, P) < \varepsilon\,.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$, για το παραπάνω $\delta > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε

$$\|P_n\| < \delta \quad \text{για κάθε } n \ge N\,.$$

Επομένως

$$0 \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - L(f, P_n) < \varepsilon \quad \text{για κάθε } n \ge N\,.$$

Άρα, $\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

(β΄) Η αποδειξη είναι άμεση συνέπεια του (α΄).

□

Αν για δύο ακολουθίες διαμερίσεων (P_n) και (Q_n) του $[a, b]$ είναι $\lim_{n\to\infty}(U(f, P_n) - L(f, Q_n)) = 0$, τότε και πάλι η συνάρτηση f θα είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$.

Πρόταση 5.13. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω (P_n) και (Q_n) δύο ακολουθίες διαμερίσεων του $[a, b]$ με*

$$\lim_{n\to\infty}(U(f, P_n) - L(f, Q_n)) = 0\,.$$

Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, Q_n)\,.$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ είναι

$$0 \leq U(f, P_n) - L(f, Q_n) < \varepsilon\,.$$

Αν $P = P_N \cup Q_N$, τότε από την (5.2) έχουμε

$$L(f, Q_N) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_N)$$

και επομένως

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f, P_N) - L(f, Q_N) < \varepsilon\,.$$

Από το πρώτο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Τώρα για κάθε $n \geq N$ είναι

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon &< \int_a^b f(x)\,dx \\
&= \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \\
&\leq U(f, P_n) \\
&< L(f, Q_n) + \varepsilon \\
&\leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon = \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Δηλαδή κάθε $n \geq N$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - U(f, P_n) \right| < \varepsilon$$

και άρα

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n)\,.$$

Τότε και

$$\lim_{n\to\infty} L(f, Q_n) = \lim_{n\to\infty} [U(f, P_n) - (U(f, P_n) - L(f, Q_n))] = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

□

Παρατήρηση 5.14. *Η προηγούμενη πρόταση προφανώς ισχύει και στην περίπτωση που είναι* $Q_n = P_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}^*$.

Παράδειγμα 5.15. *Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $y = 1/x^2$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$, $0 < a < b$ και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx\,.$$

Λύση. Θεωρούμε την ακολουθία (P_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με

$$P_n = \left\{a, a\lambda, a\lambda^2, \ldots, a\lambda^n\right\}\,, \quad \text{όπου } \lambda = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}\,.$$

Επειδή η συνάρτηση $y = 1/x^2$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $[a,b]$, είναι

$$m_k = \inf\left\{\frac{1}{x^2} : a\lambda^{k-1} \le x \le a\lambda^k\right\} = \frac{1}{a^2\lambda^{2k}}\,, \quad 1 \le k \le n$$

και

$$M_k = \sup\left\{\frac{1}{x^2} : a\lambda^{k-1} \le x \le a\lambda^k\right\} = \frac{1}{a^2\lambda^{2(k-1)}}\,, \quad 1 \le k \le n\,.$$

Τότε

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= \sum_{k=1}^{n} m_k(a\lambda^k - a\lambda^{k-1}) \\ &= \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda^k} - \frac{1}{\lambda^{k+1}}\right) \\ &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{a\lambda}\left(1 - \frac{1}{\lambda^n}\right) = \frac{1}{a\lambda}\left(1 - \frac{a}{b}\right) = \frac{b-a}{ab\lambda} = \frac{b-a}{ab}\left(\frac{a}{b}\right)^n \end{aligned}$$

και παρόμοια

$$U(f,P_n) = \frac{b-a}{ab}\lambda = \frac{b-a}{ab}\left(\frac{b}{a}\right)^n\,.$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} = 1\,,$$

είναι $\lim_{n\to\infty}(U(f,P_n) - L(f,P_n)) = 0$ και από την προηγούμενη πρόταση η συνάρτηση $y = 1/x^2$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ με

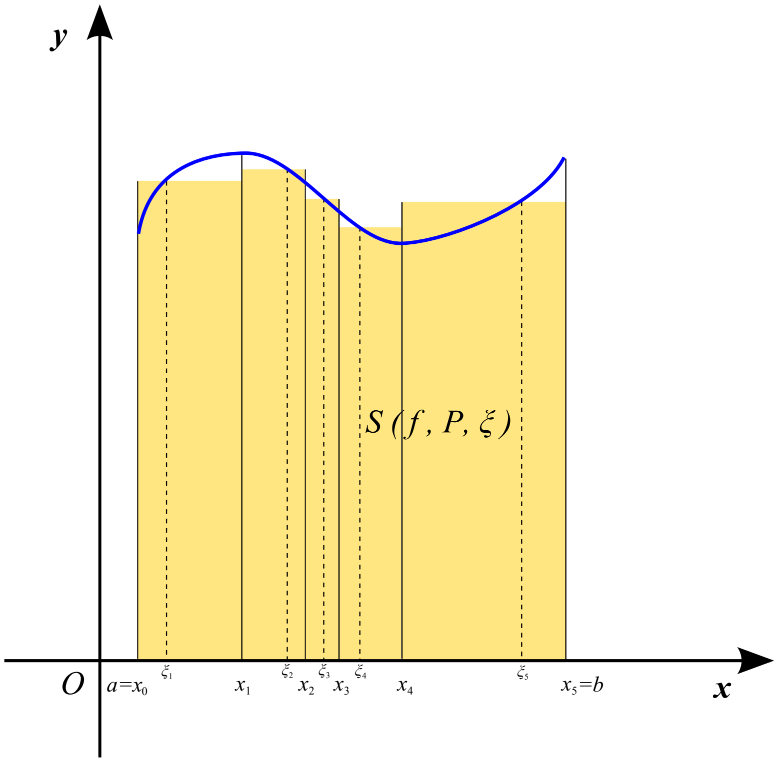
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \frac{b-a}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\,.$$

■

5.2 Ορισμός του ολοκληρώματος κατά Riemann

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω $P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Μια **επιλογή ενδιάμεσων σημείων** της διαμέρισης P είναι ένα σύνολο $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$ με $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,\ldots,n$. Το **άθροισμα Riemann** της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση P και στην επιλογή ενδιάμεσων σημείων ξ ορίζεται ως εξής

$$S(f,P,\xi):=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\,.$$



Ορισμός 5.16. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f είναι* **ολοκληρώσιμη κατά Riemann** *στο $[a,b]$, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $I(f)$ έτσι ώστε για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ και για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων ξ της P με $\|P\|<\delta$ να ισχύει*

$$|S(f,P,\xi)-I(f)|<\varepsilon\,.$$

Γράφουμε

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P,\xi)=I(f) \quad \text{ή} \quad S(f,P,\xi)\to I(f) \ \text{ καθώς η λεπτότητα(νόρμα) } \ \|P\|\to 0\,.$$

Η οικογένεια όλων των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$ *συμβολίζεται με* $\mathcal{R}[a,b]$. *Ο αριθμός* $I(f)$ *είναι το* **ολοκλήρωμα Riemann (ή ολοκλήρωμα)** *της* f *στο διάστημα* $[a,b]$.

Παρατήρηση 5.17. *Μερικές φορές λέμε ότι το* $I(f)$ *είναι το " όριο" των αθροισμάτων Riemann* $S(f,P,\xi)$ *καθώς η λεπτότητα(νόρμα)* $\|P\| \to 0$. *Όμως το άθροισμα Riemann δεν είναι συνάρτηση του* $\|P\|$ *και επομένως αυτό το όριο δεν είναι του τύπου που μελετήσαμε στις πραγματικές συναρτήσεις.*

Από τον ορισμό του κάτω αθροίσματος, του άνω αθροίσματος και του αθροίσματος Riemann της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι προφανές ότι

$$L(f,P) \le S(f,P,\xi) \le U(f,P)\,, \tag{5.3}$$

για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ με $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$, $1 \le k \le n$, της διαμέρισης P.

Λήμμα 5.18. *Έστω* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *φραγμένη συνάρτηση και έστω* $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *διαμέριση του* $[a,b]$. *Είναι*

$$(i) \quad L(f,P) = \inf\{S(f,P,\xi) : \xi \text{ επιλογή ενδιάμεσων σημείων της } P\}$$

και

$$(ii) \quad U(f,P) = \sup\{S(f,P,\xi) : \xi \text{ επιλογή ενδιάμεσων σημείων της } P\}\ .$$

Δηλαδή το κάτω άθροισμα $L(f,P)$ *(αντίστοιχα, το άνω άθροισμα* $U(f,P)$*) είναι το μέγιστο κάτω φράγμα (αντίστοιχα, το ελάχιστο άνω φράγμα) του αθροίσματος Riemann* $S(f,P,\xi)$. *Το infimum (αντίστοιχα, supremum) το παίρνουμε πάνω σε όλες τις επιλογές* ξ *ενδιάμεσων σημείων της διαμέρισης* P.

Απόδειξη. Θα δείξουμε τη (i), η απόδειξη της (ii) είναι ανάλογη. Επειδή

$$L(f,P) \le S(f,P,\xi)\,,$$

αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\bar{\xi}$ της P τέτοια ώστε

$$S(f,P,\bar{\xi}) < L(f,P) + \varepsilon\,. \tag{5.4}$$

Επειδή $m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$, $1 \le k \le n$, υπάρχει $\bar{\xi}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ με

$$f(\bar{\xi}_k) < m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Τότε

$$\begin{aligned} S(f,P,\bar{\xi}) &= \sum_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &< \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) + \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \\ &= L(f,P) + \frac{\varepsilon}{b-a}(x_n - x_0) = L(f,P) + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 5.19 (Riemann–Darboux). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ με ολοκλήρωμα Riemann $I(f)$ αν και μόνο αν η f είναι (Darboux) ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Στην περίπτωση αυτή είναι*

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι (Darboux) ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, Ορισμός 5.2. Επειδή

$$L(f,P) \le S(f,P,\xi) \le U(f,P)$$

και από την Πρόταση 5.11 (β')

$$\lim_{\|P\|\to 0} U(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} L(f,P) = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

έπεται ότι το $\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P,\xi)$ υπάρχει και είναι

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P,\xi) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Επομένως η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ με $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Αντίστροφα, έστω $f \in \mathcal{R}[a,b]$ δηλαδή $\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P,\xi) = I(f)$. Τότε για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε διαμέριση $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ του $[a,b]$ και για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων ξ της P με $\|P\| < \delta$ να ισχύει

$$|S(f,P,\xi) - I(f)| < \varepsilon \Leftrightarrow I(f) - \varepsilon < S(f,P,\xi) < I(f) + \varepsilon\,.$$

Από την (5.4) υπάρχει επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\bar{\xi}$ της P τέτοια ώστε

$$S(f,P,\bar{\xi}) < L(f,P) + \varepsilon\,.$$

Έχουμε λοιπόν

$$L(f,P) > S(f,P,\bar{\xi}) - \varepsilon > (I(f) - \varepsilon) - \varepsilon = I(f) - 2\varepsilon\,.$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$U(f,P) < I(f) + 2\varepsilon\,.$$

Επομένως για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ με $\|P\| < \delta$ είναι

$$I(f) - 2\varepsilon < L(f,P) \le U(f,P) < I(f) + 2\varepsilon$$

οπότε

$$|L(f,P) - I(f)| < 2\varepsilon \quad \text{και} \quad |U(f,P) - I(f)| < 2\varepsilon$$

Άρα $\lim_{\|P\|\to 0} L(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} U(f,P) = I(f)$ και από την Πρόταση 5.11 (β') η f είναι (Darboux) ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ με $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. □

Πρόταση 5.20.

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Η $f \in \mathcal{R}[a,b]$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία διαμερίσεων (P_n) του $[a,b]$ με $\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$ και για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων ξ_n για την P_n το όριο

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n,\xi_n) = I$$

υπάρχει. Αν αυτό συμβαίνει, τότε

$$I = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Επειδή

$$L(f,P_n) \le S(f,P_n,\xi_n) \le U(f,P_n)$$

και από την Πρόταση 5.12 (β')

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

έπεται ότι το $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n,\xi_n)$ υπάρχει και είναι

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n,\xi_n) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία διαμερίσεων (P_n) του $[a,b]$ με $\lim_{n\to\infty}\|P_n\| = 0$ και για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων ξ_n για την P_n το όριο $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n,\xi_n) = I$ υπάρχει. Αν $P_n = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m(n)}\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, επιλέγουμε τα ενδιάμεσα σημεία $\bar{\xi}_n = (\bar{\xi}_{n,1}, \bar{\xi}_{n,2}, \ldots, \bar{\xi}_{n,m(n)})$ της P_n με $\bar{\xi}_{n,k} \in [x_{k-1}, x_k]$, $1 \le k \le m(n)$, έτσι ώστε

$$f(\bar{\xi}_{n,k}) < m_k + \frac{1}{n}\,,$$

όπου $m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$. Τότε

$$\begin{aligned} S(f,P_n,\xi_n) &= \sum_{k=1}^{m} f(\bar{\xi}_{n,k})(x_k - x_{k-1}) \\ &< \sum_{k=1}^{m} m_k(x_k - x_{k-1}) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \\ &= L(f,P_n) + \frac{(b-a)}{n} \end{aligned}$$

και από τη Πρόταση 5.12 (α')

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n,\xi_n) \le \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n,\xi_n) \ge \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

Όμως $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n,\xi_n) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Άρα η $f \in \mathcal{R}[a,b]$ με

$$\lim_{n\to\infty} S(f, P_n, \xi_n) = I = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

□

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω (P_n) ακολουθία διαμερίσεων του $[a,b]$ με

$$P_n = \left\{a,\, a + \frac{b-a}{n},\, a + 2\frac{b-a}{n}, \ldots, a + k\frac{b-a}{n}, \ldots, a + (n-1)\frac{b-a}{n},\, b\right\}.$$

Είναι $\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} = 0$. Αν για τη διαμέριση P_n θεωρήσουμε τις επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\xi_n = \{\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots, \xi_{n,n}\}$ και $\tau_n = \{\tau_{n,1}, \tau_{n,2}, \ldots, \tau_{n,n}\}$, όπου

$$\xi_{n,k} = a + k\frac{b-a}{n} \quad \text{και} \quad \tau_{n,k} = a + (k-1)\frac{b-a}{n}\,, \quad 1 \le k \le n\,,$$

τότε έχουμε τα αθροίσματα Riemann

$$S(f, P_n, \xi_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

και

$$S(f, P_n, \tau_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

αντίστοιχα. Τότε, από την Πρόταση 5.20 προκύπτουν οι τύποι

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx} \tag{5.5}$$

και

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx\,.} \tag{5.6}$$

Ειδικά αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο μοναδιαίο διάστημα $I = [0,1]$, οι παραπάνω τύποι παίρνουν τη μορφή

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx} \tag{5.7}$$

και

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx} \tag{5.8}$$

αντίστοιχα.

Παράδειγμα 5.21. *Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα* $[0,1]$ *να υπολογιστεί το όριο*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k^2-2kn+2n^2}}\,.$$

Λύση. Είναι

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k^2-2kn+2n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(k/n)^2-2k/n+2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

όπου $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$. Επειδή η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,1]$, από τον τύπο (5.8) έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k^2-2kn+2n^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}\,dx\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k^2-2kn+2n^2}} &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}\,dx \\
&= \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt \qquad \text{(αντικατάσταση } t = x-1) \\
&= \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\Big|_{t=-1}^{t=0} \\
&= -\ln(-1+\sqrt{2}) = \ln(1+\sqrt{2})\,.
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 5.22. *(α') Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα* $[0,1]$ *να υπολογιστεί το όριο*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

(β') Χρησιμοποιώντας την (α') και την ανισότητα

$$x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x\,, \quad \forall x \ge 0\,, \tag{5.9}$$

να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Λύση.

(α΄) Επειδή η συνάρτηση $f(x) = x\sin x$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,1]$, από τον τύπο (5.7) έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\\ &= \int_0^1 x\sin x\,dx\\ &= -\,x\cos x|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1\cos x\,dx = \sin 1 - \cos 1\,.\end{aligned}$$

(β΄) Θέτουμε στην (5.9) $x = k/n^2$, όπου $k, n \in \mathbb{N}^*$, $k \le n$. Τότε

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \le \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{n^2}$$

και κατά συνέπεια

$$\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right) \le \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

Επομένως

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{6n^6}\sin\left(\frac{k}{n}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right). \tag{5.10}$$

Όμως

$$0 \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{6n^6}\sin\left(\frac{k}{n}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{6n^6} = \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n}k^3 < \frac{n^4}{6n^6} = \frac{1}{6n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{6n^6}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = 0\,.$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = \sin 1 - \cos 1\,,$$

τελικά από την (5.10) έπεται ότι και

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) = \sin 1 - \cos 1\,.$$

■

Παράδειγμα 5.23. *Αν η f είναι συνεχής και θετική συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(1/n)f(2/n)\cdots f(n/n)} = \exp\left(\int_0^1 \ln(f(x))\,dx\right).$$

Εφαρμογή. *Να υπολογιστεί το όριο*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\,.$$

Λύση. Αν $a_n = \sqrt[n]{f(1/n)f(2/n)\cdots f(n/n)}$, είναι

$$\begin{aligned}\ln a_n &= \frac{1}{n}\ln\left[f(1/n)f(2/n)\cdots f(n/n)\right]\\ &= \frac{1}{n}\left[\ln\left(f(1/n)\right) + \ln\left(f(2/n)\right) + \cdots + \ln\left(f(n/n)\right)\right]\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(f(k/n)\right)\,.\end{aligned}$$

Επομένως από τον τύπο (5.8)

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n = \int_0^1 \ln f(x)\,dx \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \exp\left(\int_0^1 \ln(f(x))\,dx\right).$$

Εφαρμογή. Είναι

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)} &= \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\\ &= \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}\,,\end{aligned}$$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)} = \exp\left(\int_0^1 \ln(1+x)\,dx\right).$$

Επειδή

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x)\,dx &= x\ln(1+x)\big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\ &= \ln 2 - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx\\ &= \ln 2 - 1 + \ln(1+x)\big|_{x=0}^{x=1} = 2\ln 2 - 1\,,\end{aligned}$$

τελικά έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)} = e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}\,.$$

■

Παράδειγμα 5.24. *Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα κατάλληλης συνάρτησης στο διάστημα* $[0,1]$ *να υπολογιστεί το όριο*

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}.$$

Λύση. Είναι

$$\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}=\frac{1}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\\
&=\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\,dx\\
&= x\ln\left(1+x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1\frac{2x^2}{1+x^2}\,dx \qquad \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)}\\
&=\ln 2-2\int_0^1\frac{\left(1+x^2\right)-1}{1+x^2}\,dx\\
&=\ln 2-2\int_0^1 dx+2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx\\
&=\ln 2-2+2\,\arctan x\Big|_{x=0}^{x=1}\\
&=\ln 2-2+2\arctan 1=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}=e^{\ln 2-2+\pi/2}=2e^{-2+\pi/2}.$$

■

Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση στο ανοικτό διάστημα $I\subseteq\mathbb{R}$. Αν $a,b\in I$, με $a<b$, και $M(f)$ είναι η μέση τιμή της f, δηλαδή

$$M(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

τότε ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le M(f)\le\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Η αριστερή ανισότητα είναι γνωστή και σαν ανισότητα Hermite–Hadamard. Ας σημειωθεί ότι οι παραπάνω ανισότητες αλλάζουν φορά στην περίπτωση που η f είναι κοίλη συνάρτηση.

Πρόταση 5.25 (Ανισότητα Hermite–Hadamard). *Έστω a, b σημεία ενός ανοικτού διαστήματος $I \subseteq \mathbb{R}$ με $a < b$.*

(α΄) Αν η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή, τότε

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\,. \tag{5.11}$$

(β΄) Αν η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κοίλη, τότε

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}\,. \tag{5.12}$$

Απόδειξη. (α΄) Αν $n \in \mathbb{N}^*$, θεωρούμε τα σημεία $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in [a, b]$ με

$$\tau_k = a + k\frac{b-a}{n}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Επειδή η f είναι κυρτή συνάρτηση

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\,.$$

Όμως

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_k\right) &= f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) \\
&= f\left(a + \frac{b-a}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\right) \\
&= f\left(a + \frac{b-a}{n^2}\cdot\frac{n\,(n+1)}{2}\right) \\
&= f\left(a + \frac{b-a}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)\,,
\end{aligned}$$

οπότε

$$f\left(a + \frac{b-a}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f\left(a+\frac{b-a}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) &= f\left(a+\frac{b-a}{2}\right) && \text{(η } f \text{ είναι συνεχής)}\\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
&\le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\\
& && \text{(λόγω της (5.5))}
\end{aligned}$$

και αυτό αποδεικνύει την αριστερή ανισότητα της (5.11).

Για την απόδειξη της δεξιάς ανισότητας της (5.11) θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα

$$f\left((1-t)a+tb\right) \le (1-t)f(a)+tf(b)\,, \quad t\in[0,1]\,, \tag{5.13}$$

η οποία ισχύει λόγω της κυρτότητας της f. Επειδή

$$\int_0^1 f\left((1-t)a+tb\right)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(αντικατάσταση } x=(1-t)a+tb\text{)}$$

και

$$\int_0^1 \left[(1-t)f(a)+tf(b)\right]\,dt = f(a)\int_0^1 (1-t)\,dt + f(b)\int_0^1 t\,dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}\,,$$

από την (5.13) προκύπτει η απόδειξη της δεξιάς ανισότητας της (5.11).

(β') Η απόδειξη της (5.12) είναι ανάλογη.

□

5.3 Ασκήσεις

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ ορισμένη στο διάστημα $[1,n]$, $n\in\mathbb{N}^*$ και έστω $P=\{1,2,\dots,n-1,n\}$ διαμέριση του $[1,n]$. Υπολογίστε το κάτω άθροισμα $L(f,P)$ και το άνω άθροισμα $U(f,P)$ της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση P και αποδείξτε ότι

$$n\ln n - n + 1 \le \ln(n!) \le (n+1)\ln n - n + 1\,.$$

2. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $f(r)=0$ για κάθε ρητό $r\in[a,b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0\,.$$

3. Να αποδειχθεί ότι

(i)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}=\ln 2\,.$$

(ii)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\cdots+\sqrt[n]{e^n}}{n}=\int_0^1 e^x\,dx=e-1\,.$$

(iii)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p-1}}{n^p+k^p}=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x^p}\,dx=\frac{1}{p}\ln 2\,,\quad p>0\,.$$

(iv)
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\frac{\pi}{6}\,.$$

(v)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{\sqrt{k^2+n^2}}=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})\right]\,.$$

(vi)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{n-k}{n^3+kn^2}}=\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx=\frac{\pi}{2}-1\,.$$

(vii)
$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n^3+1^3}+\frac{1}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{1}{2n^3}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\sqrt{3}\pi}{9}\,.$$

(viii)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}\right]=\frac{2}{3}\,,$$

όπου $\left[\sqrt{k}\right]$ είναι το ακέραιο μέρος του $\sqrt{k}$.

Σημείωση. Είναι $\sqrt{k}-1<\left[\sqrt{k}\right]\leq\sqrt{k}$.

4. Αν
$$c_n:=\prod_{k=1}^{n}\left(a+\frac{k-1}{n}\right)^{1/n}\,,\quad a>0\,,$$

να αποδειχθεί ότι
$$\lim_{n\to\infty}\ln(c_n)=\int_a^{a+1}\ln x\,dx=\ln\left(\frac{(a+1)^{a+1}}{a^a e}\right)$$

και επομένως

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(a+\frac{k-1}{n}\right)^{1/n}=\frac{(a+1)^{a+1}}{a^a e}\,.$$

5. Έστω $f(\theta) := \ln(1-2x\cos\theta+x^2)$, $\theta\in[0,\pi]$ και $x\neq\pm 1$.

(α΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\int_0^\pi \ln(1-2x\cos\theta+x^2)\,d\theta\,.$$

(β΄) Αν $n\in\mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-2x\cos\frac{k\pi}{n}+x^2\right)&=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\left(x-e^{\frac{-ik\pi}{n}}\right)\\&=\frac{x-1}{x+1}\prod_{k=0}^{2n-1}\left(x-e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)=\frac{x-1}{x+1}(x^{2n}-1)\,.\end{aligned}$$

(γ΄) (**Ολοκλήρωμα Poisson**) Να αποδειχθεί ότι

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \ln(1-2x\cos\theta+x^2)\,d\theta&=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}(x^{2n}-1)\right)\\&=\begin{cases}0 & \text{αν } |x|<1,\\ 2\pi\ln|x| & \text{αν } |x|>1.\end{cases}\end{aligned}$$

Σημείωση. Παραπέμπουμε στο Παράδειγμα 5.71 για ένα διαφορετικό τρόπο υπολογισμού του ολοκληρώματος Poisson.

5.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Σ' αυτή την παράγραφο αναφέρουμε μερικές βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος.

Πρόταση 5.26. *Έστω $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$.*

(α΄) Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ η $\alpha f+\beta g\in\mathcal{R}[a,b]$ με

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

(β) Αν $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Ειδικά αν $g(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε

$$\int_a^b g(x)\,dx \ge 0\,.$$

Απόδειξη. (α΄) Έστω $S(\alpha f+\beta g, P, \xi)$ ένα άθροισμα Riemann της $\alpha f + \beta g$. Τότε

$$\begin{aligned} S(\alpha f+\beta g, P, \xi) &= \sum_{k=1}^{n}(\alpha f(\xi_k)+\beta g(\xi_k))(x_k-x_{k-1}) \\ &= \alpha\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) + \beta\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\,. \end{aligned}$$

Επειδή

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{και} \quad \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) = \int_a^b g(x)\,dx\,,$$

έπεται ότι

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(\alpha f+\beta g, P, \xi) = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Επομένως η $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a,b]$ με

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

(β΄) Για τα αθροίσματα Riemann έχουμε

$$S(f,P,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) = S(g,P,\xi)\,.$$

Επομένως

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} S(f,P,\xi) \le \lim_{\|P\|\to 0} S(g,P,\xi) = \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

□

Παράδειγμα 5.27. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν*

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0\,,$$

τότε η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο $[a, b]$.

Λύση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0$. Έστω $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [a, b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ είναι

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}\,.$$

Παίρνουμε το δ αρκετά μικρό έτσι ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$. Τότε,

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\, dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}\, dx = \delta f(x_0) > 0\,. \qquad \text{(άτοπο)}$$

Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0$. Άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, συμπεραίνουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. ■

Παράδειγμα 5.28. *Έστω η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $\max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)| = M > 0$ και έστω η συνάρτηση $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και θετική. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b \varphi(x) |f(x)|^n\, dx \right)^{1/n} = M\,. \tag{5.14}$$

Λύση. Υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $|f(x_0)| = M$. Έστω $0 < \varepsilon < 2M$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [a, b]$ με $|x - x_0| < \delta$ είναι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$. Δηλαδή για κάθε $x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ είναι

$$|f(x_0)| - \varepsilon/2 < |f(x)| \leq |f(x_0)| \Leftrightarrow M - \varepsilon/2 < |f(x)| \leq M\,.$$

Επομένως

$$(M - \varepsilon/2)^n \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x)\, dx \leq \int_a^b \varphi(x)|f(x)|^n\, dx \leq M^n \int_a^b \varphi(x)\, dx\,, \tag{5.15}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στο αριστερό ολοκλήρωμα της (5.15) το κάτω όριο ολοκλήρωσης $x_0 - \delta$ αντικαθίσταται με το a, αν $x_0 - \delta < a$, ενώ το άνω όριο ολοκλήρωσης $x_0 + \delta$ αντικαθίσταται με το b, αν $x_0 + \delta > b$.

Αν $\alpha_n := \left(\int_a^b \varphi(x)|f(x)|^n\,dx\right)^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, η (5.15) συνεπάγεται ότι

$$(M-\varepsilon/2)\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x)\,dx\right)^{1/n} \le \alpha_n \le M\left(\int_a^b \varphi(x)\,dx\right)^{1/n}. \tag{5.16}$$

Επειδή $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, είναι $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x)\,dx > 0$ και $\int_a^b \varphi(x)\,dx > 0$. Τότε ως γνωστόν $\lim_{n\to\infty}\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x)\,dx\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b \varphi(x)\,dx\right)^{1/n} = 1$ και κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty}(M-\varepsilon/2)\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x)\,dx\right)^{1/n} = M-\varepsilon/2\,, \quad \lim_{n\to\infty} M\left(\int_a^b \varphi(x)\,dx\right)^{1/n} = M\,.$$

Επομένως υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\forall n \ge n_1, \quad \left|(M-\varepsilon/2)\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x)\,dx\right)^{1/n} - (M-\varepsilon/2)\right| < \varepsilon/2$$

και υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε

$$\forall n \ge n_2, \quad \left|M\left(\int_a^b \varphi(x)\,dx\right)^{1/n} - M\right| < \varepsilon\,.$$

Αν $N := \max\{n_1, n_2\}$, τότε

$$\forall n \ge N, \quad M-\varepsilon < (M-\varepsilon/2)\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x)\,dx\right)^{1/n} \text{ και } M\left(\int_a^b \varphi(x)\,dx\right)^{1/n} < M+\varepsilon\,.$$

Επομένως από την (5.16) έχουμε ότι

$$\forall n \ge N\colon \quad M-\varepsilon < \alpha_n < M+\varepsilon\,.$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = M$ και αυτό αποδεικνύει την (5.14). ■

Θεώρημα 5.29. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $f([a,b]) \subseteq [c,d]$. Αν η ϕ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[c,d]$, τότε η συνάρτηση $\phi \circ f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η ϕ είναι συνεχής στο $[c,d]$, υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε $|\phi(s)| \le K$ για κάθε $s \in [c,d]$. Η ϕ είναι *ομοιόμορφα* συνεχής στο $[c,d]$ και επομένως υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|\phi(s) - \phi(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ για κάθε } s,t \in [c,d] \text{ με } |s-t| < \delta\,. \tag{5.17}$$

Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη, από το πρώτο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας υπάρχει διαμέριση $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon\delta}{4K}\,. \tag{5.18}$$

Έστω m_k (αντίστοιχα, m'_k) το infimum της f (αντίστοιχα της $\phi \circ f$) στο διάστημα $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ και M_k (αντίστοιχα, M'_k) το supremum της f (αντίστοιχα της $\phi \circ f$) στο διάστημα I_k, $1 \leq k \leq n$. Διαιρούμε το σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ στα δύο υποσύνολα

$$A = \{k : \ M_k - m_k < \delta\}\,, \quad B = \{k : \ M_k - m_k \geq \delta\}\,.$$

Παρατηρούμε ότι $|f(x) - f(y)| \leq M_k - m_k$ για κάθε $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$. Επομένως αν $k \in A$, τότε από την (5.17) έχουμε

$$|\phi(f(x)) - \phi(f(y))| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ για κάθε } x, y \in [x_{k-1}, x_k]\,.$$

Όμως

$$M'_k - m'_k = \sup\{\phi(f(x)) - \phi(f(y)) : \ x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}\,.$$

Επομένως

$$M'_k - m'_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,, \quad \text{για κάθε } k \in A\,.$$

Επειδή $|\phi(s)| \leq K$ για κάθε $s \in [c, d]$,

$$M'_k - m'_k < 2K\,, \quad \text{για κάθε} \quad k \in B\,.$$

Χρησιμοποιώντας την (5.18) έχουμε

$$\delta \sum_{k \in B} (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k \in B} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leq U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon\delta}{4K}$$

και κατά συνέπεια

$$\sum_{k \in B} (x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{4K}\,.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
U(\phi \circ f, P) - L(\phi \circ f, P) &= \sum_{k=1}^{n} (M'_k - m'_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k \in A} (M'_k - m'_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k \in B} (M'_k - m'_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + 2K\frac{\varepsilon}{4K} = \varepsilon
\end{aligned}$$

και άρα από το πρώτο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας η $\phi \circ f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. $\square$

Πόρισμα 5.30. *Έστω $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Τότε,*

$$\max\{f,g\} \in \mathcal{R}[a,b]\,,\ \min\{f,g\} \in \mathcal{R}[a,b]\,,\ |f| \in \mathcal{R}[a,b]\,,\ f^2 \in \mathcal{R}[a,b] \text{ και } fg \in \mathcal{R}[a,b]\,.$$

Αν επιπλέον $\inf\{|g(x)| : x \in [a,b]\} > 0$, τότε και οι συναρτήσεις $1/g, f/g \in \mathcal{R}[a,b]$.

Απόδειξη. – Οι συναρτήσεις $f^+ = \max\{0, f\}$ και $f^+ = \max\{0, -f\}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Πράγματι, αν $\phi_1(t) := \max\{0,t\}$ και $\phi_2(t) := \max\{0,-t\}$, από το Θεώρημα 5.29 οι συναρτήσεις $f^+ = \phi_1 \circ f$ και $f^- = \phi_2 \circ f$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Επειδή $|f| = f^+ + f^-$, από την Πρόταση 5.26 η $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.
– Αν $\phi(t) := t^2$, τότε η $\phi \circ f = f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$. Από την Πρόταση 5.26 και την ταυτότητα

$$fg = \frac{1}{2}[(f+g)^2 + (f-g)^2]$$

προκύπτει ότι $fg \in \mathcal{R}[a,b]$.
– Επειδή

$$\max\{f,g\} = \frac{1}{2}[(f+g) + |f-g|] \quad \text{και} \quad \min\{f,g\} = \frac{1}{2}[(f+g) - |f-g|]$$

$\max\{f,g\} \in \mathcal{R}[a,b]$ και $\min\{f,g\} \in \mathcal{R}[a,b]$.
– Αν $\inf\{|g(x)| : x \in [a,b]\} > 0$, από το Θεώρημα 5.29 με $\phi(t) := 1/t$ έπεται ότι $1/g \in \mathcal{R}[a,b]$. Τότε και $f/g = f \cdot (1/g) \in \mathcal{R}[a,b]$ □

Πρόταση 5.31. *Έστω $f : [a,b] \to \mathcal{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $M = \sup\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$. Τότε $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ και ισχύει*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le M(b-a)\,,$$

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 5.30 η $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$. Επειδή

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \le \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|(x_k - x_{k-1}) \le M \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = M(b-a)$$

και ισοδύναμα

$$|S(f,P,\xi)| \leq S(|f|,P,\xi) \leq M(b-a)\,,$$

παίρνοντας $\|P\| \to 0$ προκύπτει ότι

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq M(b-a)\,.$$

□

Λήμμα 5.32. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν $a < c < b$, τότε $f \in \mathcal{R}[a,b]$ αν και μόνο αν $f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a,c]$ και $f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}[c,b]$. Αν $f \in \mathcal{R}[a,b]$, τότε ισχύει η ισότητα*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Σημείωση. Με $f|_E$ συμβολίζουμε τον περιορισμό της συνάρτησης f στο υποσύνολο E του πεδίου ορισμού της f.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το Θεώρημα 5.8 υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon\,.$$

Αν $P' = P \cup \{c\}$, τότε η $P_1 = P' \cap [a,c]$ είναι μια διαμέριση του $[a,c]$ και η $P_2 = P' \cap [c,b]$ είναι μια διαμέριση του $[c,b]$. Επειδή

$$U(f,P_1) - L(f,P_1) \leq U(f,P') - L(f,P') \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

και

$$U(f,P_2) - L(f,P_2) \leq U(f,P') - L(f,P') \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon\,,$$

από το Θεώρημα 5.8 προκύπτει ότι η $f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a,c]$ και η $f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}[c,b]$.
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a,c]$ και $f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}[c,b]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το Θεώρημα 5.8 υπάρχουν διαμερίσεις P_1 και P_2 του $[a,c]$ και $[c,b]$, αντίστοιχα, τέτοιες ώστε

$$U(f,P_1) - L(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad U(f,P_2) - L(f,P_2) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Αν $P = P_1 \cup P_2$, η P είναι μία διαμέριση του διαστήματος $[a,b]$ με

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= (U(f,P_1) + U(f,P_2)) - (L(f,P_1) + L(f,P_2)) \\ &= (U(f,P_1) - L(f,P_1)) + (U(f,P_2) - L(f,P_2)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Επομένως η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$. Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx \le U(f,P) &< L(f,P) + \varepsilon \\ &= L(f,P_1) + L(f,P_2) + \varepsilon \\ &\le \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx + \varepsilon\,, \end{aligned}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ και κατά συνέπεια $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. Επειδή

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx &\le U(f,P_1) + U(f,P_2) \\ &< L(f,P_1) + L(f,P_2) + \varepsilon \\ &= L(f,P) + \varepsilon \\ &\le \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon\,, \end{aligned}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$, συμπεραίνουμε ότι $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$. Άρα,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

□

Θεώρημα 5.33. *Έστω $a,b,c \in \mathbb{R}$ και έστω f συνάρτηση ολοκληρώσιμη στο μεγαλύτερο κλειστό και φραγμένο διάστημα με άκρα δύο από αυτά τα σημεία. Τότε ο περιορισμός της f σε καθένα από τα άλλα κλειστά υποδιαστήματα είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση και ισχύει η ισότητα*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0\,. \tag{5.19}$$

Απόδειξη. Επειδή η (5.19) είναι συμμετρική ως προς τα a, b και c, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a = \min\{a, b, c\}$.

Αν $\max\{a, b, c\} = b$ και $a < c < b$, το Λήμμα 5.32 συνεπάγεται την ισότητα (5.19).

Αν $\max\{a, b, c\} = c$ και $a < b < c$, από το Λήμμα 5.32 έχουμε ότι

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

και αυτή η ισότητα είναι ισοδύναμη με την (5.19).

Τέλος, αν δύο από τα σημεία a, b και c είναι ίσα, τότε είναι προφανές ότι ισχύει η (5.19). □

Πόρισμα 5.34. *Αν $f \in \mathcal{R}[a, b]$ και αν $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, τότε ο περιορισμός της f σε καθένα από τα κλειστά υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση και ισχύει η ισότητα*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx\,.$$

5.4.1 Θεμελιώδη θεωρήματα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Υπάρχουν δύο θεμελιώδη θεωρήματα του ολοκληρωτικού λογισμού. Σύμφωνα με το πρώτο, " η παράγωγος του ολοκληρώματος συνεχούς συνάρτησης είναι η συνάρτηση". Το δεύτερο μας λέει ότι "το ολοκλήρωμα της παραγώγου μιας συνάρτησης δίνεται από τη συνάρτηση".

Ορισμός 5.35. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a, b]$. Για κάθε $x \in [a, b]$ ο περιορισμός της f στο $[a, x]$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ με*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Η συνάρτηση F λέγεται **αόριστο ολοκλήρωμα της** *f στο $[a, b]$.*

Παρατήρηση 5.36. *Αν $f \in \mathcal{R}[a, b]$ και ορίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της f στο $[a, b]$ με $F(x) := \int_c^x f(t)\,dt$, για κάποιο $c \in [a, b]$, τότε*

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt\,.$$

Επομένως $\int_a^x f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$, *δηλαδή τα δύο αόριστα ολοκληρώματα διαφέρουν κατά μία σταθερά.*

Θεώρημα 5.37 (Πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού). *Έστω* $f \in \mathcal{R}[a,b]$. *Ορίζουμε τη συνάρτηση* F *στο* $[a,b]$ *με*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Τότε η F *είναι συνεχής στο* $[a,b]$. *Επιπλέον, αν η* f *είναι συνεχής σ' ένα σημείο* $x_0 \in [a,b]$, *τότε η* F *είναι παραγωγίσιμη στο* x_0 *με*

$$F'(x_0) = f(x_0)\,.$$

Απόδειξη. Αφήνουμε σαν άσκηση την απόδειξη ότι η F είναι συνεχής στο $[a,b]$.
Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in [a,b)$. Θα αποδείξουμε ότι $F'_+(x_0) = f(x_0)$. Έστω $h > 0$. Τότε

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt\,.$$

Επομένως,

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]\,dt\,.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $t \in [a,b]$ με $|t - x_0| < \delta$ ισχύει

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Επομένως, αν $0 < h < \delta$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &\le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt \\ &\le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\,dt = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Άρα,

$$F'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)\,.$$

Παρόμοια, αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in (a,b]$, $F'_-(x_0) = f(x_0)$ και αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Πόρισμα 5.38. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$ και έστω $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[c,d]$ με $\varphi([c,d]) \subseteq [a,b]$. Αν*

$$G(x) := \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt\,, \quad x \in [c,d]\,,$$

τότε η G είναι παραγωγίσιμη στο $[c,d]$ με

$$G'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt\right) = f(\varphi(x))\varphi'(x)\,.$$

<u>Εφαρμογή</u>. Είναι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_1^{\sqrt{\ln x}} e^{t^2}\,dt\right) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\,, \quad x > 1\,.$$

Απόδειξη. Αν

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,, \quad x \in [a,b]\,,$$

τότε $G(x) = F(\varphi(x))$ και από το προηγούμενο θεώρημα είναι $F'(\varphi(x)) = f(\varphi(x))$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$G'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)\,.$$

<u>Εφαρμογή</u>. Για κάθε $x > 1$ είναι $\exp(\sqrt{\ln x})^2 = \exp(\ln x) = x$ και επομένως έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_1^{\sqrt{\ln x}} e^{t^2}\,dt\right) = \exp(\sqrt{\ln x})^2 \cdot \left(\sqrt{\ln x}\right)' = x\frac{(\ln x)'}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\,.$$

$\square$

Παράδειγμα 5.39. *Έστω $f : [0,1] \to [0,\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε*

$$f(x) \le a\int_0^x f(t)\,dt \ \text{ για κάθε } x \in [0,1]\,.$$

Τότε η f είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν.

Απόδειξη. Έστω $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$, $x \in [0,1]$. Επειδή $f(t) \ge 0$ για κάθε $t \in [0,1]$, από την Πρόταση 5.26 (β') η $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \ge 0$. Από την υπόθεση έχουμε

$$F'(x) \le aF(x) \Leftrightarrow (F(x)e^{-ax})' \le 0\,, \quad \text{για κάθε } x \in [0,1]\,.$$

Αν $g(x) := F(x)e^{-ax}$, $x \in [0,1]$, η συνάρτηση g είναι μη αρνητική και φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$. Όμως $g(0) = F(0) = 0$ και επομένως θα είναι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Τότε θα είναι και $F(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ οπότε

$$F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = 0\,.$$

Επειδή η f είναι μη αρνητική και συνεχής στο διάστημα $[0,1]$, από το Παράδειγμα 5.27 έπεται ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. □

Παράδειγμα 5.40. *Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις f στο $(0,\infty)$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση*

$$\int_x^{x^2} f(t)\,dt = \int_1^x f(t)\,dt\,. \tag{5.20}$$

Λύση. Γράφουμε την (5.20) στην ισοδύναμη μορφή

$$\int_0^{x^2} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt = \int_1^x f(t)\,dt$$

και παραγωγίζοντας(Πόρισμα 5.38) έχουμε

$$2xf(x^2) - f(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x^2) = \frac{f(x)}{x}\,.$$

Επομένως

$$f(x) = \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} \quad \text{και} \quad f\left(\sqrt{x}\right) = \frac{f\left(\sqrt[4]{x}\right)}{\sqrt[4]{x}}\,,$$

δηλαδή

$$f(x) = \frac{f\left(\sqrt[4]{x}\right)}{\sqrt{x}\sqrt[4]{x}} = \frac{f\left(x^{1/2^2}\right)}{x^{1/2+1/2^2}}\,.$$

Επαγωγικά έχουμε

$$f(x) = \frac{f\left(x^{1/2^n}\right)}{x^{1/2+1/2^2+\cdots+1/2^n}} = \frac{f\left(x^{1/2^n}\right)}{x^{1-1/2^n}}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Επειδή η f είναι συνεχής, είναι

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x^{1/2^n}\right)}{x^{1-1/2^n}} = \frac{f\left(\lim_{n\to\infty} x^{1/2^n}\right)}{x} = \frac{f(1)}{x}\,.$$

Άρα οι συναρτήσεις f είναι της μορφής

$$f(x) = \frac{c}{x}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

■

Θεώρημα 5.41 (Δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού). *Έστω* $f \in \mathcal{R}[a,b]$. *Αν η* F *είναι μία παράγουσα της* f *στο* $[a,b]$, *δηλαδή* $F'(x) = f(x)$ *για κάθε* $x \in [a,b]$, *τότε*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Απόδειξη. Έστω $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ μια οποιαδήποτε διαμέριση του $[a,b]$. Από το θεώρημα μέσης τιμής, για κάθε $k = 1, \dots, n$, υπάρχει $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ τέτοιο ώστε

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\,.$$

Αν $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, το άθροισμα Riemann της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση P και στα ενδιάμεσα σημεία ξ είναι

$$S(f,P,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)\,.$$

Επειδή για το κάτω άθροισμα, το άνω άθροισμα και το άθροισμα Riemann της f ισχύουν οι ανισότητες

$$L(f,P) \le S(f,P,\xi) \le U(f,P)\,,$$

έπεται ότι

$$L(f,P) \le F(b) - F(a) \le U(f,P)\,.$$

Όμως

$$\sup\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

και

$$\inf\{U(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

Άρα,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le F(b) - F(a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

Επειδή η $f \in \mathcal{R}[a,b]$, δηλαδή

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

$\square$

Παράδειγμα 5.42. *Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|+2x}}\,dx\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|+2x}}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)+2x}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)+2x}}\,dx \qquad \text{(Λήμμα 5.32)}\\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(x-1)^2}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-(\sqrt{2})^2}}\,dx\\
&= \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} + \ln\left((x+1)+\sqrt{(x+1)^2-(\sqrt{2})^2}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2}\\
&= \arcsin 0 - \arcsin\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + \ln(3+\sqrt{7}) - \ln(2+\sqrt{2})\\
&= \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2+\sqrt{2}}\right)\,.
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 5.43. *Είναι*

$$5\left(\sqrt[5]{10^{10}+1}-\sqrt[5]{2}\right) < \sum_{n=2}^{10^{10}} \frac{1}{n^{4/5}} < 5\left(\sqrt[5]{10^{10}}-1\right) = 495$$

και επομένως το ακέραιο μέρος του αθροίσματος $\sum_{n=1}^{10^{10}} \frac{1}{n^{4/5}}$ *ισούται με* 495.

Λύση. Επειδή η συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{t^{4/5}}$ είναι θετική, συνεχής και γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $(0,\infty)$, για $n \geq 2$ έχουμε

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{4/5}} < \frac{1}{n^{4/5}} < \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^{4/5}}\,.$$

Αθροίζοντας από το 2 έως το 10^{10}, παίρνουμε

$$\sum_{n=2}^{10^{10}} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{4/5}} < \sum_{n=2}^{10^{10}} \frac{1}{n^{4/5}} < \sum_{n=2}^{10^{10}} \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^{4/5}}$$

και από το Πόρισμα 5.34 έχουμε

$$\int_2^{10^{10}+1} \frac{dt}{t^{4/5}} < \sum_{n=2}^{10^{10}} \frac{1}{n^{4/5}} < \int_1^{10^{10}} \frac{dt}{t^{4/5}}$$

Επομένως

$$5\, t^{1/5}\Big|_{t=2}^{t=10^{10}+1} < \sum_{n=2}^{10^{10}} \frac{1}{n^{4/5}} < 5\, t^{1/5}\Big|_{t=1}^{t=10^{10}}$$

και άρα

$$5\left(\sqrt[5]{10^{10}+1} - \sqrt[5]{2}\right) < \sum_{n=2}^{10^{10}} \frac{1}{n^{4/5}} < 5\left(\sqrt[5]{10^{10}} - 1\right) = 495\,.$$

Επειδή

$$5\left(\sqrt[5]{10^{10}+1} - \sqrt[5]{2}\right) > 5\left(\sqrt[5]{10^{10}} - \sqrt[5]{2}\right) = 5\left(100 - \sqrt[5]{2}\right) > 494\,,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$495 < \sum_{n=1}^{10^{10}} \frac{1}{n^{4/5}} < 496$$

και άρα το ακέραιο μέρος του αθροίσματος είναι 495. ∎

Παράδειγμα 5.44. *Έστω η συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,\infty)$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη με $f(0) = f(1) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αν $M = \max_{0\leq x\leq 1} f(x)$ και*

$$I = \int_0^1 \frac{|f''(x)|}{f(x)}\, dx\,,$$

να αποδειχθεί πρώτα ότι για κάθε $a, b \in (0,1)$ είναι $I \geq \dfrac{1}{M}|f'(a) - f'(b)|$ και στη συνέχεια ότι $I \geq 4$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $1/f(x) \geq 1/M$. Έστω $a, b \in (0,1)$. Αν $a \leq b$, τότε

$$I \geq \int_a^b \frac{|f''(x)|}{f(x)}\, dx \geq \frac{1}{M}\int_a^b |f''(x)|\, dx \geq \frac{1}{M}\left|\int_a^b f''(x)\, dx\right| = \frac{1}{M}|f'(b) - f'(a)|\,.$$

Αν $b \leq a$, τότε παρόμοια έχουμε $I \geq \dfrac{1}{M}|f'(a) - f'(b)|$. Επομένως για κάθε $a, b \in (0,1)$ είναι

$$I \geq \frac{1}{M}|f'(a) - f'(b)|\,.$$

Επειδή $f(0) = f(1) = 0$, υπάρχει $c \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $M = \max\limits_{0\le x\le 1} f(x) = f(c)$. Από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$f(c) - f(0) = cf'(a) \Leftrightarrow f'(a) = \frac{f(c)-f(0)}{c} = \frac{f(c)}{c} = \frac{M}{c}\,, \text{ για κάποιο } a \in (0,1)$$

και

$$f(c) - f(1) = (c-1)f'(b) \Leftrightarrow f'(b) = \frac{f(c)-f(1)}{c-1} = \frac{f(c)}{c-1} = \frac{M}{c-1}\,, \text{ για κάποιο } b \in (0,1)\,.$$

Επομένως

$$I \ge \frac{1}{M}\left|\frac{M}{c} - \frac{M}{c-1}\right| = \left|\frac{1}{c} + \frac{1}{1-c}\right| = \frac{1}{c(1-c)}\,.$$

Όμως $c(1-c) \le \max\limits_{0<x<1} x(1-x) = \frac{1}{4}$. Άρα $I \ge 4$. □

Παράδειγμα 5.45. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω*

$$g(x) := \frac{1}{x}\int_0^x \cos(x-t)f(t)\,dt\,, \quad x > 0\,.$$

Τότε $\lim_{x\to 0} g(x) = f(0)$. *Αν* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Απόδειξη. **(i)** Είναι

$$g(x) = \cos x \cdot \frac{1}{x}\int_0^x \cos t f(t)\,dt + \sin x \cdot \frac{1}{x}\int_0^x \sin t f(t)\,dt\,.$$

Αν φ είναι συνεχής συνάρτηση και Φ είναι μία παράγουσα της φ, τότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \varphi(t)\,dt = \lim_{x\to 0}\frac{\Phi(x)-\Phi(0)}{x} = \Phi'(0) = \varphi(0)\,.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \cos 0 \cos 0 f(0) + 0 = f(0)\,.$$

(ii) Είναι

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x \cos(x-t)(f(t)-\lambda)\,dt &= g(x) - \frac{\lambda}{x}\int_0^x \cos(x-t)\,dt\\ &= g(x) - \lambda\frac{\sin x}{x}\,, \quad x > 0\,.\end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$, για να αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \cos(x-t)(f(t)-\lambda)\,dt = 0\,.$$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda$, υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - \lambda| < \varepsilon/2$ για κάθε $x \geq \delta_1$. Τότε για κάθε $x \geq \delta_1$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{x}\int_0^x \cos(x-t)(f(t)-\lambda)\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{x}\int_0^{\delta_1} \cos(x-t)(f(t)-\lambda)\,dt + \frac{1}{x}\int_{\delta_1}^x \cos(x-t)(f(t)-\lambda)\,dt\right| \\
&\leq \frac{1}{x}\int_0^{\delta_1} |f(t)-\lambda|\,dt + \frac{1}{x}\int_{\delta_1}^x |f(t)-\lambda|\,dt \\
&\leq \frac{1}{x}\int_0^{\delta_1} |f(t)-\lambda|\,dt + \frac{1}{x}\int_{\delta_1}^x \frac{\varepsilon}{2}\,dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^{\delta_1} |f(t)-\lambda|\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{x-\delta_1}{x} < \frac{1}{x}\int_0^{\delta_1} |f(t)-\lambda|\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\,.
\end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^{\delta_1} |f(t)-\lambda|\,dt = 0$, υπάρχει $\delta \geq \delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{x}\int_0^{\delta_1} |f(t)-\lambda|\,dt < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \forall x \geq \delta\,.$$

Τότε

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x \cos(x-t)(f(t)-\lambda)\,dt\right| < \varepsilon\,, \quad \forall x \geq \delta$$

και επομένως

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \cos(x-t)(f(t)-\lambda)\,dt = 0\,.$$

□

Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$, ορίζουμε τη συνάρτηση $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\widehat{f}(\lambda) := \int_a^b f(x)e^{-i\lambda x}\,dx = \int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx - i\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Η συνάρτηση $\widehat{f}$ είναι ο **μετασχηματισμός Fourier** της f.

Θα αποδείξουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της f μηδενίζεται στο $\pm\infty$. Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στο Riemann (αργότερα γενικεύτηκε από το Lebesgue) και είναι χρήσιμο στην αρμονική ανάλυση και στην ασυμπτωτική ανάλυση. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

Θεώρημα 5.46 (Λήμμα Riemann–Lebesgue). *Αν $f \in \mathcal{R}[a,b]$, τότε*

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(x)e^{-i\lambda x}\,dx = 0$$

και ισοδύναμα

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = \lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0\,.$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε μία διαμέριση $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ του $[a,b]$ έτσι ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon\,,$$

όπου $M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$ και $m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Επειδή

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx &= \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\cos\lambda x\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-m_k)\cos\lambda x\,dx + m_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}\cos\lambda x\,dx\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-m_k)\,dx + \sum_{k=1}^{n} m_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}\cos\lambda x\,dx \\
&\le \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(M_k-m_k)\,dx + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} m_k\left(\sin(\lambda x_k) - \sin(\lambda x_{k-1})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1}) + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} m_k\left(\sin(\lambda x_k) - \sin(\lambda x_{k-1})\right)\,,
\end{aligned}$$

για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| < \varepsilon + \frac{2}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}|m_k|\,.$$

Επειδή $\lim_{\lambda\to\infty}\frac{2}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}|m_k| = 0$, παίρνουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{2}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}|m_k| < \varepsilon\,,\quad \text{για κάθε } \lambda > \delta\,.$$

Επομένως

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| < 2\varepsilon\,,\quad \text{για κάθε } \lambda > \delta$$

και άρα $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = 0$. Επίσης

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = \lim_{-\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(-\lambda x)\,dx = 0\,.$$

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι $\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0$. □

Θεώρημα 5.47 (Παραγοντική ολοκλήρωση). *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathcal{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $f', g' \in \mathcal{R}[a, b]$. Τότε*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\,.$$

Απόδειξη. Επειδή οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο $[a, b]$, οι f, g είναι συνεχείς στο $[a, b]$. Από το Πόρισμα 5.30 οι fg' και $f'g$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Επειδή $(fg)' = f'g + fg'$, η συνάρτηση $(fg)' \in \mathcal{R}[a, b]$. Από το Θεώρημα 5.41 έχουμε

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\,.$$

□

Θεώρημα 5.48 (Ολοκλήρωση με αντικατάσταση). *Έστω $\varphi : [a, b] \to \mathcal{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\varphi' \in \mathcal{R}[a, b]$. Αν η f είναι συνεχής στο $I = \varphi([a, b])$, τότε*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx\,.$$

Απόδειξη. Επειδή η φ είναι συνεχής, το $I = \varphi([a, b])$ είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα. Επίσης, επειδή η $f\circ\varphi$ είναι συνεχής και η $\varphi' \in \mathcal{R}[a, b]$, από το Πόρισμα 5.30 η $(f\circ\varphi)\varphi' \in \mathcal{R}[a, b]$. Αν το $I = \varphi([a, b])$ είναι μονοσύνολο, τότε η φ είναι σταθερή στο $[a, b]$. Σ' αυτή την περίπτωση $\varphi'(t) = 0$ για κάθε $t \in [a, b]$ και τα δύο παραπάνω ολοκληρώματα είναι μηδέν.

Διαφορετικά, για κάθε $x \in I$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$F(x) := \int_{\varphi(a)}^{x} f(u)\,du\,.$$

Επειδή η f είναι συνεχής, $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$. Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,,$$

για κάθε $t \in [a,b]$. Επομένως από το Θεώρημα 5.41

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx\,.$$

□

Πρόταση 5.49. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο $T > 0$, δηλαδή $f(t+T) = f(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι*

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt\,.$$

Απόδειξη. *1ος τρόπος*. Από την υπόθεση είναι $f(t-T) = f\left((t-T)+T\right) = f(t)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επομένως

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+T} f(t)\,dt &= \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{x+T} f(t)\,dt \\
&= \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{x+T} f(t-T)\,dt \\
&= \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_0^x f(u)\,du \qquad \text{(αντικατάσταση } u = t - T\text{)} \\
&= -\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

2ος τρόπος. Αν

$$F(x) := \int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^{x+T} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\,,$$

τότε $F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η F είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$. Άρα $F(x) = F(0) = \int_0^T f(t)\,dt$ και κατά συνέπεια

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt\,, \quad \text{για κάθε}\, x \in \mathbb{R}\,.$$

□

Πόρισμα 5.50. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο $T > 0$. Αν $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$, τότε*

$$\int_x^{x+nT} f(t)\,dt = n \int_0^T f(t)\,dt\,.$$

Εφαρμογή. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\varphi}^{10\pi-\varphi} |\sin\theta|\,d\theta\,, \quad \varphi \in \mathbb{R}\,.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.49 έχουμε

$$\begin{aligned}\int_x^{x+nT} f(t)\,dt &= \int_x^{x+T} f(t)\,dt + \int_{x+T}^{x+2T} f(t)\,dt + \cdots + \int_{x+(n-1)T}^{x+nT} f(t)\,dt \\ &= \underbrace{\int_0^T f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \cdots + \int_0^T f(t)\,dt}_{n} = n\int_0^T f(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Εφαρμογή. Επειδή η $y = |\sin\theta|$ είναι περιοδική με περίοδο π, έχουμε

$$\int_{-\varphi}^{10\pi-\varphi} |\sin\theta|\,d\theta = 10\int_0^\pi |\sin\theta|\,d\theta = 10\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta = 20\,.$$

□

Παράδειγμα 5.51. *Να αποδειχθεί ότι*

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan\theta)\;d\theta = \frac{\pi}{8}\ln 2\,.$$

Λύση. Αν $x = \tan\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, τότε

$$dx = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = (1+\tan^2\theta)d\theta$$

και επομένως

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan\theta)\,d\theta\,.$$

Είναι

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan\theta)\,d\theta &= -\int_{\pi/4}^{0} \ln(1+\tan(\pi/4-\phi))\,d\phi \qquad \text{(αντικατάσταση } \theta=\pi/4-\phi\text{)}\\
&= \int_0^{\pi/4} \ln\left(1+\frac{1-\tan\phi}{1+\tan\phi}\right)d\phi\\
&= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1+\tan\phi}\right)d\phi\\
&= \int_0^{\pi/4} \ln 2\,d\phi - \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan\phi)\,d\phi\\
&= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan\phi)\,d\phi
\end{aligned}$$

και άρα

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{8}\ln 2\,.$$

■

Παράδειγμα 5.52. *Να λυθεί η εξίσωση*

$$\int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt = \frac{\pi}{12}\,, \quad x>1\,.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt &= \int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{1}{t^2\sqrt{1-(1/t)^2}}\,dt\\
&= -\int_{1/\sqrt{2}}^{1/x} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \qquad \text{(αντικατάσταση } u=1/t\text{)}\\
&= \arcsin u\big|_{u=1/\sqrt{2}}^{u=1/x}\\
&= -\arcsin(1/x)+\arcsin(1/\sqrt{2}) = -\arcsin(1/x)+\pi/4\,.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt = \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow -\arcsin(1/x)+\pi/4=\pi/12 \Leftrightarrow \arcsin(1/x)=\pi/6 \Leftrightarrow 1/x=\sin(\pi/6)\,.$$

Άρα $1/x=1/2$, δηλαδή $x=2$.

Σημείωση. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την αντικατάσταση $t=(1/\cos\theta)$, $0<\theta<\pi/2$. ■

Παράδειγμα 5.53. *Αν $0 < a < b$, να υπολογιστεί το όριο*

$$\lim_{x\to 0^+}\left\{\int_0^1 [bt + a(1-t)]^x \, dt\right\}^{1/x}.$$

Λύση. Αν $x > 0$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = bt + a(1-t)$, οπότε $du = (b-a)dt$, έχουμε

$$\begin{aligned}\left\{\int_0^1 [bt + a(1-t)]^x \, dt\right\}^{1/x} &= \left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b u^x \, du\right\}^{1/x} \\ &= \left\{\frac{1}{b-a}\cdot \left.\frac{u^{x+1}}{x+1}\right|_{t=a}^{t=b}\right\}^{1/x} \\ &= \frac{1}{(x+1)^{1/x}}\left\{\frac{b^{x+1}-a^{x+1}}{b-a}\right\}^{1/x}\end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{x\to 0^+}(x+1)^{1/x} = e$ και

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{b^{x+1}-a^{x+1}}{b-a}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{b^{x+1}\ln b - a^{x+1}\ln a}{b^{x+1}-a^{x+1}} \qquad \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\ &= \frac{b\ln b - a\ln a}{b-a},\end{aligned}$$

είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left\{\int_0^1 [bt + a\,(1-t)]^x \, dt\right\}^{1/x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(x+1)^{1/x}}\left\{\frac{b^{x+1}-a^{x+1}}{b-a}\right\}^{1/x} \\ &= \frac{1}{e}\lim_{x\to 0^+}\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{b^{x+1}-a^{x+1}}{b-a}\right)\right) \\ &= \frac{1}{e}\exp\left(\frac{b\ln b - a\ln a}{b-a}\right) \\ &= \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}.\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 5.54. *Να αποδειχθεί ότι*

$$\int_0^{\pi/2}\sin^k x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^k x\,dx = \begin{cases}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} & \text{αν } k = 2n, \\ \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} & \text{αν } k = 2n+1.\end{cases}$$

Απόδειξη. Αν $n \in \mathbb{N}^*$, από το Παράδειγμα 4.5 είναι

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n} x\,dx &= -\frac{1}{2n}\sin^{2n-1}x\cos x\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} + \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}x\,dx \\ &= \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}x\,dx\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx &= -\frac{1}{2n+1}\sin^{2n} x\cos x\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} + \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1} x\,dx \\ &= \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1} x\,dx\,.\end{aligned}$$

Εργαζόμενοι επαγωγικά έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n} x\,dx &= \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2} x\,dx \\ &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dx \\ &= \frac{(2n-1)\,(2n-3)\cdots 1}{(2n)\,(2n-2)\cdots 2}\cdot\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1} x\,dx &= \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1} x\,dx \\ &= \frac{(2n)\,(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)\,(2n-1)\cdots 3}\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx \\ &= \frac{(2n)\,(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)\,(2n-1)\cdots 3}\,.\end{aligned}$$

Ας σημειωθεί ότι χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \pi/2 - t$, έχουμε

$$\int_0^{\pi/2}\cos^k x\,dx = -\int_{\pi/2}^{0}\cos^k(\pi/2 - t)\,dt = \int_0^{\pi/2}\sin^k t\,dt\,.$$

□

Πρόταση 5.55 (Ανισότητα Cauchy–Schwarz). *Έστω οι φραγμένες συναρτήσεις $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες. Τότε*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right). \tag{5.21}$$

Αν επιπλέον οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, b]$, με $g \neq 0$, η ισότητα στην (5.21) ισχύει αν και μόνο αν $f = \lambda g$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Αν $g = 0$, δηλαδή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε ισχύει η ισότητα στην (5.21). Υποθέτουμε ότι η g δεν είναι ταυτοτικά μηδέν στο διάστημα $[a, b]$. Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \le \int_a^b (f(x) - \lambda g(x))^2 \, dx = \lambda^2 \int_a^b g(x)^2 \, dx - 2\lambda \int_a^b f(x) g(x) \, dx + \int_a^b f(x)^2 \, dx \,. \tag{5.22}$$

Επειδή το τριώνυμο είναι μη αρνητικό για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, θα πρέπει η διακρίνουσα να είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός. Δηλαδή θα πρέπει να είναι

$$\Delta = 4 \left(\int_a^b f(x) g(x) \, dx \right)^2 - 4 \left(\int_a^b f(x)^2 \, dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2 \, dx \right) \le 0$$

Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την (5.21).

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς με $g \neq 0$ και ισχύει η ισότητα στην ανισότητα Cauchy–Schwarz, από την (5.22) έπεται ότι θα πρέπει να υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) - \lambda g(x) = 0$ και ισοδύναμα $f(x) = \lambda g(x)$, για κάθε $x \in [a, b]$. □

Σημείωση. Αν για κάθε $x \in [a, b]$, εκτός από ένα σημείο, είναι $f(x) = g(x)$, τότε ισχύει η ισότητα στην ανισότητα Cauchy–Schwarz παρότι δεν είναι $f = \lambda g$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.56. *Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ είναι*

$$\sin x \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) \ge 2x^2 \,. \tag{5.23}$$

Λύση. Εύκολα διαπιστώνεται ότι οι συναρτήσεις

$$f(x) := \sin x \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) \quad \text{και} \quad g(x) := 2x^2 \,, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \,,$$

είναι άρτιες. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε την (5.23) για $x \in [0, \pi/2)$. Παρατηρούμε ότι για $0 \le x < \pi/2$ είναι

$$\int_0^x \cos t \, dt = \sin x \quad \text{και} \quad \int_0^x \frac{1}{\cos t} \, dt = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) \,.$$

Επομένως, για $0 \le x < \pi/2$ από την ανισότητα Cauchy–Schwarz έχουμε

$$x^2 = \left(\int_0^x \sqrt{\cos t} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos t}} \, dt \right)^2 \le \left(\int_0^x \cos t \, dt \right) \left(\int_0^x \frac{1}{\cos t} \, dt \right) = \sin x \cdot \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) \,.$$

■

Παράδειγμα 5.57. *Έστω η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)| = M > 0$ και έστω η συνάρτηση $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και θετική. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_a^b \varphi(x)|f(x)|^{n+1}\,dx}{\int_a^b \varphi(x)|f(x)|^n\,dx} = M\,. \tag{5.24}$$

Εφαρμογή.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x\,dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx} = 1\,.$$

Απόδειξη. Αν $I_n = \int_a^b \varphi(x)|f(x)|^n\,dx$, από την ανισότητα Cauchy–Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}
I_n^2 &= \left(\int_a^b \left(\sqrt{\varphi(x)}|f(x)|^{(n-1)/2}\right)\left(\sqrt{\varphi(x)}|f(x)|^{(n+1)/2}\right)dx\right)^2 \\
&\le \left(\int_a^b \varphi(x)|f(x)|^{n-1}\,dx\right)\left(\int_a^b \varphi(x)|f(x)|^{n+1}\,dx\right) \\
&= I_{n-1}I_{n+1}\,,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} \ge \frac{I_n}{I_{n-1}}\,, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Η (I_{n+1}/I_n) είναι αύξουσα ακολουθία θετικών όρων και επομένως $\lim_{n\to\infty}(I_{n+1}/I_n) = \lambda$, με $0 \le \lambda \le +\infty$. Επειδή λόγω της (5.14) είναι $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_n} = M$, από γνωστή πρόταση στις ακολουθίες θα είναι και $\lim_{n\to\infty}(I_{n+1}/I_n) = M$. □

5.4.2 Θεωρήματα Μέσης Τιμής για Ολοκληρώματα

Θεώρημα 5.58 (Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής για Ολοκληρώματα). *Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ με $g(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αν*

$$m = \inf_{a\le x\le b} f(x) \ \text{ και } \ M = \sup_{a\le x\le b} f(x)\,,$$

τότε υπάρχει $c \in [m,M]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = c\int_a^b g(x)\,dx\,. \tag{5.25}$$

Ειδικά, αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx\,. \tag{5.26}$$

Απόδειξη. Επειδή $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, είναι $\int_a^b g(x)\,dx \geq 0$. Επίσης

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)\,, \quad \forall x \in [a, b]\,. \tag{5.27}$$

Επειδή το γινόμενο fg είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, από την (5.27) έχουμε

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx\,. \tag{5.28}$$

(i) Αν $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, από την (5.28) έπεται ότι $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ και επομένως

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = c \int_a^b g(x)\,dx\,,$$

για κάθε $c \in [m, M]$.

(ii) Αν $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, από την (5.28) έχουμε

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M\,.$$

Αν θέσουμε

$$c = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}\,,$$

τότε $c \in [m, M]$ και ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = c \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$ τέτοια ώστε $f(x_1) = m$ και $f(x_2) = M$. Τότε από το θεώρημα Bolzano ή ενδιάμεσης τιμής υπάρχει ξ μεταξύ των x_1 και x_2 τέτοιο ώστε $f(\xi) = c$ και επομένως

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

□

Αν στο προηγούμενο θεώρημα η συνάρτηση $g(x) = 1$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε παίρνουμε το κλασικό θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα.

Θεώρημα 5.59 (Θεώρημα Μέσης Τιμής για Ολοκληρώματα). *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη. Αν*

$$m = \inf_{a \le x \le b} f(x) \text{ και } M = \sup_{a \le x \le b} f(x)\,,$$

τότε υπάρχει $c \in [m, M]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)\,. \tag{5.29}$$

Ειδικά, αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)\,. \tag{5.30}$$

Παράδειγμα 5.60. *Έστω η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Αν*

$$\int_x^y f(t)\,dt = 0\,, \quad \text{για κάθε } x, y \in [a, b] \text{ με } a \le x < y \le b\,,$$

τότε η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο $[a, b]$.

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in [a, b)$. Τότε υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 τέτοιος ώστε $a \le x_0 < x_0 + 1/n < b$, για κάθε $n \ge n_0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Από την υπόθεση και από το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα είναι

$$0 = \int_{x_0}^{x_0+1/n} f(t)\,dt = f(\xi_n) \cdot \frac{1}{n} \Leftrightarrow f(\xi_n) = 0\,,$$

για κάποιο ξ_n με $x_0 \le \xi_n \le x_0 + 1/n$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$ και η f είναι συνεχής, έχουμε

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = 0\,.$$

Άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b)$. Επειδή η f είναι συνεχής, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. □

Παράδειγμα 5.61 (Το αντίστροφο της Πρότασης 5.49)**.** *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και έστω $T > 0$. Αν*

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}\,,$$

τότε η f είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$.

Απόδειξη. Αν $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+T} f(t)\,dt &= \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{x+T} f(t)\,dt \\
&= \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_0^x f(u+T)\,du \qquad \text{(αντικατάσταση } t = u+T\text{)} \\
&= \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_0^x f(t+T)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας και την υπόθεση έχουμε

$$0 = \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^x f(t+T)\,dt \Leftrightarrow \int_0^x \left(f(t+T) - f(t)\right)\,dt = 0\,,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι

$$\int_x^y \left(f(t+T) - f(t)\right)\,dt = \int_x^0 \left(f(t+T) - f(t)\right)\,dt + \int_0^y \left(f(t+T) - f(t)\right)\,dt = 0\,.$$

Άρα, από το Παράδειγμα 5.60 έχουμε ότι $f(t+T) - f(t) \equiv 0$. Δηλαδή $f(t+T) = f(t)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. □

Παράδειγμα 5.62. *Αν $n \in \mathbb{N}^*$, να υπολογιστεί το όριο*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/n} e^{-x^2} \sqrt{n^2 - x^2}\,dx\,.$$

Λύση. Αν $f(x) = e^{-x^2}$ και $g(x) = \sqrt{n^2 - x^2}$, από την (5.26) έχουμε

$$\int_0^{1/n} e^{-x^2} \sqrt{n^2 - x^2}\,dx = e^{-\xi_n^2} \int_0^{1/n} \sqrt{n^2 - x^2}\,dx\,, \quad \text{όπου } \xi_n \in [0,\ 1/n]\,.$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{n^2 - x^2}\,dx &= \int n\sqrt{1 - \sin^2\theta} \cdot n\cos\theta\,d\theta \quad \text{(αντικατάσταση } x = n\sin\theta,\ -\pi/2 \le \theta \le \pi/2\text{)} \\
&= n^2 \int \cos^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{n^2}{2} \int (1 + \cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{n^2}{2}(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta) \\
&= \frac{n^2}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) = \frac{n^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{n} + \frac{x}{n}\sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}\right)
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned}\int_0^{1/n} e^{-x^2}\sqrt{n^2-x^2}\,dx &= e^{-\xi_n^2}\cdot\frac{n^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{n}+\frac{x}{n}\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1/n}\\ &= \frac{e^{-\xi_n^2}}{2}\left(n^2\arcsin\frac{1}{n^2}+\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}\right).\end{aligned}$$

Επειδή $0\le \xi_n\le 1/n$, είναι $\lim_{n\to\infty}\xi_n=0$ και κατά συνέπεια $\lim_{n\to\infty}e^{-\xi_n^2}=1$. Επίσης

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x^2}{x^2}\overset{\text{(L'Hôpital)}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x/\sqrt{1-x^4}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=1\,,$$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty}n^2\arcsin\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin(1/n)^2}{(1/n)^2}=1\,.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1/n} e^{-x^2}\sqrt{n^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}(1+1)=1\,.$$

■

Παράδειγμα 5.63. *Να υπολογιστεί το όριο*

$$\lim_{a\to 0}\int_0^3\frac{\sqrt{1+a^4x^3}}{3+x^2}\,dx\,.$$

Λύση. *1ος τρόπος*. Επειδή οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{1+a^4x^3}$ και $g(x)=\frac{1}{3+x^2}$ είναι θετικές και συνεχείς στο διάστημα $[0,3]$, από το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα είναι

$$\begin{aligned}\int_0^3\frac{\sqrt{1+a^4x^3}}{3+x^2}\,dx &= \sqrt{1+a^4\xi^3}\int_0^3\frac{1}{(\sqrt{3})^2+x^2}\,dx\\ &= \sqrt{1+a^4\xi^3}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=3}\\ &= \sqrt{1+a^4\xi^3}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\sqrt{1+a^4\xi^3}\,,\end{aligned}$$

για κάποιο ξ με $0<\xi<3$. Όμως $\lim_{a\to 0}\sqrt{1+a^4\xi^3}=1$, οπότε

$$\lim_{a\to 0}\int_0^3\frac{\sqrt{1+a^4x^3}}{3+x^2}\,dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

2ος τρόπος. Επειδή

$$\int_0^3\left(\lim_{a\to 0}\frac{\sqrt{1+a^4x^3}}{3+x^2}\right)dx=\int_0^3\frac{1}{3+x^2}\,dx\,,$$

θεωρούμε τη διαφορά

$$\begin{aligned}\left|\int_0^3 \frac{\sqrt{1+a^4x^3}}{3+x^2}\,dx - \int_0^3 \frac{1}{3+x^2}\,dx\right| &= \int_0^3 \frac{\sqrt{1+a^4x^3}-1}{3+x^2}\,dx \\ &\le (\sqrt{1+27a^4}-1)\int_0^3 \frac{1}{3+x^2}\,dx \xrightarrow[a\to 0]{} 0\,.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\lim_{a\to 0}\int_0^3 \frac{\sqrt{1+a^4x^3}}{3+x^2}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{3+x^2}\,dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

■

Παράδειγμα 5.64. *Αν $n \in \mathbb{N}^*$ και η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)e^{-nx}\,dx = f(0).$$

Λύση. Είναι

$$n\int_0^1 f(x)e^{-nx}\,dx = n\int_0^{1/\sqrt{n}} f(x)e^{-nx}\,dx + n\int_{1/\sqrt{n}}^1 f(x)e^{-nx}\,dx\,. \tag{5.31}$$

Από την (5.26) έχουμε

$$n\int_0^{1/\sqrt{n}} f(x)e^{-nx}\,dx = nf(\xi_n)\int_0^{1/\sqrt{n}} e^{-nx}\,dx = \left(1-e^{-\sqrt{n}}\right)f(\xi_n),$$

για κάποιο ξ_n με $0 < \xi_n < 1/\sqrt{n}$. Επειδή η f είναι συνεχής και $\lim_{n\to\infty}\xi_n = 0$, έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(0)$. Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{1/\sqrt{n}} f(x)e^{-nx}\,dx = f(0).$$

Επίσης αν $M = \max_{x\in[0,1]}|f(x)|$, τότε

$$\begin{aligned}\left|n\int_{1/\sqrt{n}}^1 f(x)e^{-nx}\,dx\right| &\le n\int_{1/\sqrt{n}}^1 |f(x)|e^{-nx}\,dx \\ &\le Mn\int_{1/\sqrt{n}}^1 e^{-nx}\,dx \\ &= M\left(e^{-\sqrt{n}}-e^{-n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{1/\sqrt{n}}^1 f(x)e^{-nx}\,dx = 0\,.$$

Άρα από την (5.31) έχουμε $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)e^{-nx}\,dx = f(0)$. ■

Παράδειγμα 5.65. *Έστω $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ ακολουθία μη αρνητικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, τέτοια ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\, dx = 0\,.$$

Αν η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) g_n(x)\, dx = 0\,.$$

Εφαρμογή. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0\,.$$

Λύση. Αν $M = \sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$ και $m = \inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$, από το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα υπάρχει $c_n \in [m, M]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x) g_n(x)\, dx = c_n \int_a^b g_n(x)\, dx\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Αν $K := \max\{|m|, |M|\}$, τότε

$$\left|\int_a^b f(x) g_n(x)\, dx\right| = |c_n| \int_a^b g_n(x)\, dx \le K \int_a^b g_n(x)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) g_n(x)\, dx = 0\,.$$

Εφαρμογή. Αν $g_n(x) = x^n$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0\,.$$

■

Παράδειγμα 5.66. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $a \in [0,1]$. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(ax^n)\, dx = f(0)\,.$$

Λύση. Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Αν $M = \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\} > 0$ και $\varepsilon_1 := \min\left\{\frac{\varepsilon}{4M}, \varepsilon\right\}$, τότε

$0 < \varepsilon_1 < 1$ και

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(ax^n)\,dx - f(0)\right| &= \left|\int_0^{1-\varepsilon_1} (f(ax^n) - f(0))\,dx + \int_{1-\varepsilon_1}^1 (f(ax^n) - f(0))\,dx\right| \\ &\leq \int_0^{1-\varepsilon_1} |f(ax^n) - f(0)|\,dx + \int_{1-\varepsilon_1}^1 |f(ax^n) - f(0)|\,dx \\ &\leq \int_0^{1-\varepsilon_1} |f(ax^n) - f(0)|\,dx + 2M\int_{1-\varepsilon_1}^1 dx \\ &= \int_0^{1-\varepsilon_1} |f(ax^n) - f(0)|\,dx + 2M\varepsilon_1 \leq \int_0^{1-\varepsilon_1} |f(ax^n) - f(0)|\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 5.59 έχουμε

$$\int_0^{1-\varepsilon_1} |f(ax^n) - f(0)|\,dx = |f(a\xi^n) - f(0)|(1-\varepsilon_1)\,,$$

για κάποιο ξ με $\xi \in [0, 1-\varepsilon_1]$. Επειδή $0 \leq a\xi^n \leq a(1-\varepsilon_1)^n$ και $\lim_{n\to\infty} a(1-\varepsilon_1)^n = 0$, είναι $\lim_{n\to\infty} a\xi^n = 0$ οπότε και $\lim_{n\to\infty} f(a\xi^n) = f(0)$. Επομένως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ είναι $|f(a\xi^n) - f(0)| < \varepsilon_1/2$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$

$$\int_0^{1-\varepsilon_1} |f(ax^n) - f(0)|\,dx = |f(a\xi^n) - f(0)|(1-\varepsilon_1) < \frac{\varepsilon_1}{2}(1-\varepsilon_1) < \frac{\varepsilon_1}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Άρα για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\left|\int_0^1 f(ax^n)\,dx - f(0)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

και αυτό αποδεικνύει ότι $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(ax^n)\,dx = f(0)$. ■

5.5 Λογαριθμικές και εκθετικές συναρτήσεις

5.5.1 Λογαριθμικές συναρτήσεις

Παράδειγμα 5.67 (Η λογαριθμική συνάρτηση). *Αν $x > 0$, ο* **φυσικός λογάριθμος** *ορίζεται ως εξής*

$$\ln x := \int_1^x \frac{1}{t}\,dt\,.$$

Επειδή η $f(t) = 1/t$ είναι συνεχής στο $(0,\infty)$, από το Θεώρημα 5.37 έχουμε $(\ln x)' = 1/x$ για κάθε $x > 0$. Επιπλέον, επειδή $(\ln x)' > 0$ για κάθε $x \in (0,\infty)$, η $y = \ln x$ είναι γνήσια αύξουσα στο $(0,\infty)$.

Θα αποδείξουμε τώρα τις ιδιότητες του φυσικού λογαρίθμου, δηλαδή *(α')* $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, *για κάθε* $a, b > 0$,

(β') $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$, *για κάθε* $a > 0$,

(γ') $\ln(a^x) = x \ln a$, *για κάθε* $a > 0$ *και για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. (α') Θεωρούμε τη συνάρτηση $\ln(ax)$, $x > 0$. Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$\frac{d}{dx}\ln(ax) = \frac{1}{ax}a = \frac{1}{x} = (\ln x)'$$

και επομένως $\ln(ax) = \ln x + c$, για κάποια σταθερά c. Επειδή $\ln 1 = 0$, $\ln a = \ln(a \cdot 1) = \ln 1 + c = c$. Άρα $\ln(ax) = \ln a + \ln x$ για κάθε $x > 0$

(β') Η απόδειξη είναι ανάλογη.

(γ') Αν $n \in \mathbb{N}$, από την (α') προκύπτει ότι $\ln(a^n) = n \ln a$. Επίσης,

$$\ln(a^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{a}\right)^n = n \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -n \ln a\,. \qquad \text{(από τη (β'))}$$

Επομένως, $\ln(a^n) = n \ln a$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Θεωρούμε το $\ln(\sqrt[n]{a})$ όπου $n \in \mathbb{N}^*$. Επειδή $n \ln(\sqrt[n]{a}) = \ln a$, έχουμε $\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\ln a$. Επομένως,

$$\ln(a^r) = r \ln a\,, \quad \text{για κάθε } r \in \mathbb{Q}\,.$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$ και έστω (r_n) ακολουθία ρητών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση είναι συνεχής, από το θεώρημα μεταφοράς έχουμε

$$\ln(a^x) = \lim_{n\to\infty} \ln(a^{r_n}) = \lim_{n\to\infty} r_n \cdot \ln a = x \ln a\,.$$

□

Παράδειγμα 5.68. *Συμβολίζουμε με "e" τη λύση της εξίσωσης* $\int_1^x (1/t)\, dt = 1$, *δηλαδή*

$$\ln e := \int_1^e \frac{1}{t}\, dt = 1\,.$$

Έστω $f(x) = 1/x$, $x > 0$ *και* $r = 1 + 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(α') Αν $P_n = \{1, r, r^2, \ldots, r^n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, *είναι μία διαμέριση του διαστήματος* $[1, r^n]$, *τότε το άνω άθροισμα* $U(f, P_n) = 1$ *και ισχύει*

$$e > r^n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*\,.$$

(β΄) Αν $Q_n = \left\{1, r, r^2, \dots, r^{n+1}\right\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, *είναι μία διαμέριση του διαστήματος* $[1, r^{n+1}]$, *τότε το κάτω άθροισμα* $L(f, Q_n) = 1$ *και ισχύει*

$$e < r^{n+1} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^* .$$

(γ΄) Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e .$$

Απόδειξη. (α΄) Επειδή η $f(x) = 1/x$, $x > 0$, είναι φθίνουσα, είναι

$$\begin{aligned} U\left(f, P_n\right) &= 1(r-1) + \frac{1}{r}(r^2 - r) + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}}(r^n - r^{n-1}) \\ &= (r-1) + (r-1) + \cdots + (r-1) \\ &= n(r-1) = n\left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = 1 . \end{aligned}$$

Επομένως

$$U(f, P_n) > \int_1^{r^n} \frac{1}{t}\, dt \Leftrightarrow 1 > \int_1^{r^n} \frac{1}{t}\, dt \Leftrightarrow \ln e > \ln r^n \Leftrightarrow e > r^n .$$

(β΄) Επειδή η $f(x) = 1/x$, $x > 0$, είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\begin{aligned} L(f, Q_n) &= \frac{1}{r}(r-1) + \frac{1}{r^2}(r^2 - r) + \cdots + \frac{1}{r^{n+1}}(r^{n+1} - r^n) \\ &= \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{r}\right) \\ &= (n+1)\left(1 - \frac{1}{r}\right) = (n+1)\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = 1 . \end{aligned}$$

Επομένως

$$L(f, Q_n) < \int_1^{r^{n+1}} \frac{1}{t}\, dt \Leftrightarrow 1 < \int_1^{r^{n+1}} \frac{1}{t}\, dt \Leftrightarrow \ln e < \ln r^{n+1} \Leftrightarrow e < r^{n+1} .$$

(γ΄) Από τις (α΄) και (β΄) έπεται ότι

$$e < r^{n+1} < er \Leftrightarrow er^{-1} < r^n < e \Leftrightarrow e\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$$

και επομένως $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = e$.

$\square$

Παράδειγμα 5.69. *Στο προηγούμενο παράδειγμα αποδείξαμε ότι η ακολουθία* $a_n = (1+1/n)^n$ *συγκλίνει με*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\ln e = \lim_{n\to\infty} n\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\,dt = 1\,.$$

Απόδειξη. Επειδή η παράγωγος $(\ln 1)' = 1$,

$$\begin{aligned}
1 = (\ln 1)' &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 1}{\frac{1}{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln e\,.
\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα οφείλεται στη συνέχεια τη συνάρτησης $y = \ln x$ και στον ορισμό του e. □

Παρατήρηση 5.70. *Στο Παράδειγμα 5.68 αποδείχτηκε ότι αν* e *είναι ο μοναδικός θετικός αριθμός τέτοιος ώστε* $\ln e = 1$*, τότε* $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$*. Αντίστροφα, στο Παράδειγμα 5.69 αποδείχτηκε ότι αν συμβολίσουμε με* e *το όριο της ακολουθίας* $a_n = (1+1/n)^n$*, τότε* $\ln e = 1$*. Επομένως,*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \Leftrightarrow \ln e = 1\,.$$

5.6 Εφαρμογές

Παράδειγμα 5.71 (Ολοκλήρωμα Poisson). *Έστω*

$$I(x) := \int_0^{\pi}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)\,d\theta\,,\quad x\neq\pm1,$$

το ολοκλήρωμα Poisson. Τότε,

(α') $I(0) = 0$.

(β') $I(-x) = I(x)$.

(γ') $I(x) = 2\pi\ln|x| + I(1/x),\quad x\neq 0$.

(δ) $I(x) = \frac{1}{2}I(x^2) = \cdots = \frac{1}{2^n}I(x^{2^n}), \quad n \in \mathbb{N}$. *Δηλαδή*

$$I(x) = \frac{1}{2^n}\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x^{2^n}\cos\theta + x^{2^{n+1}})\,d\theta\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

(ε)

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } |x| < 1, \\ 2\pi\ln|x| & \text{αν } |x| > 1. \end{cases}$$

Απόδειξη. Επειδή για $|x| \neq 1$ είναι $1 - 2x\cos\theta + x^2 \geq (1 - |x|)^2 > 0$, η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση $f(\theta) := \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)$ ορίζεται στο διάστημα $[0, \pi]$ και είναι συνεχής.

(α) $I(0) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln 1\,d\theta = 0$.

(β)

$$\begin{aligned} I(-x) &= \int_0^{\pi} \ln(1 + 2x\cos\theta + x^2)\,d\theta \\ &= -\int_{\pi}^{0} \ln(1 - 2x\cos\phi + x^2)\,d\phi \qquad \text{(αντικατάσταση } \theta = \pi - \phi) \\ &= \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\phi + x^2)\,d\phi = I(x)\,. \end{aligned}$$

(γ) Αν $x \neq 0$, τότε

$$I(x) = \int_0^{\pi} \ln\left[x^2\left(1 - \frac{2}{x}\cos\theta + \frac{1}{x^2}\right)\right]\,d\theta = \int_0^{\pi} \ln(x^2)\,d\theta + I(1/x) = 2\pi\ln|x| + I(1/x)\,.$$

(δ) Είναι

$$\begin{aligned} 2I(x) &= I(x) + I(-x) \\ &= \int_0^{\pi} \left[\ln(1 - 2x\cos\theta + x^2) + \ln(1 + 2x\cos\theta + x^2)\right]\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \ln(1 + x^4 + 2x^2 - 4x^2\cos^2\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x^2\cos 2\theta + x^4)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2x^2\cos\phi + x^4)\,d\phi \qquad \text{(αντικατάσταση } \phi = 2\theta) \\ &= \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x^2\cos\phi + x^4)\,d\phi \\ &\qquad \text{(η } g(\phi) := \ln(1 - 2x^2\cos\phi + x^4) \text{ είναι άρτια και } 2\pi\text{-περιοδική)} \\ &= I(x^2)\,. \end{aligned}$$

Επομένως

$$I(x) = \frac{1}{2} I(x^2) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(1 - 2x^2 \cos\theta + x^4) \, d\theta \,.$$

Από την προηγούμενη εξίσωση με x^2 στη θέση του x παίρνουμε

$$I(x) = \frac{1}{2} I(x^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} I((x^2)^2) = \frac{1}{2^2} I(x^{2^2}) = \frac{1}{2^2} \int_0^\pi \ln\left(1 - 2x^{2^2} \cos\theta + x^{2^3}\right) \, d\theta$$

και επαγωγικά

$$I(x) = \frac{1}{2^n} I(x^{2^n}) = \frac{1}{2^n} \int_0^\pi \ln(1 - 2x^{2^n} \cos\theta + x^{2^{n+1}}) \, d\theta \,, \quad n \in \mathbb{N} \,.$$

(ε΄) Λόγω της (γ΄), αρκεί να αποδείξουμε ότι για $|x| < 1$ είναι $I(x) = 0$. Επειδή για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ είναι

$$\ln(1 - x^{2^n})^2 \leq \ln(1 - 2x^{2^n} \cos\theta + x^{2^{n+1}}) \leq \ln(1 + x^{2^n})^2 \,,$$

ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\frac{\pi}{2^n} \ln(1 - x^{2^n})^2 \leq \frac{1}{2^n} \int_0^\pi \ln(1 - 2x^{2^n} \cos\theta + x^{2^{n+1}}) \, d\theta \leq \frac{\pi}{2^n} \ln(1 + x^{2^n})^2 \,, \quad n \in \mathbb{N} \,.$$

Όμως για $|x| < 1$ είναι $\lim_{n\to\infty} x^{2^n} = 0$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2^n} \ln(1 - x^{2^n})^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2^n} \ln(1 + x^{2^n})^2 = 0 \,.$$

Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^\pi \ln(1 - 2x^{2^n} \cos\theta + x^{2^{n+1}}) \, d\theta = 0 \,.$$

Άρα

$$I(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} I(x^{2^n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^\pi \ln(1 - 2x^{2^n} \cos\theta + x^{2^{n+1}}) \, d\theta = 0 \,.$$

$\square$

Παράδειγμα 5.72. *Αν $A > |B| > 0$, χρησιμοποιώντας το Παράδειγμα 5.71 (ολοκλήρωμα Poisson) με $x = (A + \sqrt{A^2 - B^2})/|B|$ να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(A + B\cos\theta) \, d\theta \,.$$

Λύση. Επειδή $A > |B| > 0$, είναι $x > 1$. Επίσης μετά από πράξεις έχουμε

$$1 \pm 2x\cos\theta + x^2 = x\frac{2(A \pm |B|\cos\theta)}{|B|}\,.$$

Έστω $I(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\,d\theta$ το ολοκλήρωμα Poisson. Τότε

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^\pi \ln\left(x\frac{2(A - |B|\cos\theta)}{|B|}\right)\,d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\ln x + \ln 2 + \ln(A - |B|\cos\theta) - \ln|B|\right]\,d\theta \\ &= \pi(\ln x + \ln 2 - \ln|B|) + \int_0^\pi \ln(A - |B|\cos\theta)\,d\theta \end{aligned}$$

και παρόμοια

$$I(-x) = \int_0^\pi \ln\left(x\frac{2(A + |B|\cos\theta)}{|B|}\right)\,d\theta = \pi(\ln x + \ln 2 - \ln|B|) + \int_0^\pi \ln(A + |B|\cos\theta)\,d\theta\,.$$

Για $x > 1$ από το Παράδειγμα 5.71 είναι $I(x) = I(-x) = 2\pi\ln x$ και επομένως

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \ln(A \pm |B|\cos\theta)\,d\theta &= \ln x - \frac{1}{2}(\ln x + \ln 2 - \ln|B|) \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln x + \ln\left(\frac{|B|}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

Επειδή $|B| = B$, αν $B > 0$ και $|B| = -B$, αν $B < 0$, έχουμε αποδείξει ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \ln(A + B\cos\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}\right)\,.$$

Όμως η συνάρτηση $f(\theta) := \ln(A + B\cos\theta)$ είναι άρτια και άρα

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi \ln(A + B\cos\theta)\,d\theta = 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \ln(A + B\cos\theta)\,d\theta = \ln\left(\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}\right)\,.$$

■

Ο παρακάτω τύπος που οφείλεται στον Wallis [John Wallis(1616–1703)] είναι μια σημαντική σχέση μεταξύ του αριθμού π και των φυσικών αριθμών.

Παράδειγμα 5.73 (Το απειρογινόμενο του Wallis για τον αριθμό π). *Είναι*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n))^2}{(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))^2}\frac{1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2}\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \tag{5.32}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2\,2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}\,. \tag{5.33}$$

Απόδειξη. Από το Παράδειγμα 5.54 είναι

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx$$

και

$$1 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx \, .$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{\pi}{2} = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n))^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))^2} \frac{1}{2n+1} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx} \, . \tag{5.34}$$

Στο διάστημα $(0, \pi/2)$, όπου $0 < \sin x < 1$, έχουμε

$$0 < \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x$$

και κατά συνέπεια

$$0 < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx \, .$$

Όμως (βλέπε την απόδειξη του Παραδείγματος 5.54) είναι

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx \, ,$$

οπότε

$$1 \le \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx} \le \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx} = \frac{2n+1}{2n} \, .$$

Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx} = 1$$

και από την (5.34) προκύπτει η (5.32).

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{2n+1} = 1$, από την (5.32) έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n))^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))^2} \frac{1}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2))^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))^2} 2n \frac{2n}{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2))^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))^2} 2n \, .
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\pi}{2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\sqrt{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n-2)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n-2)\cdot(2n-1)}\sqrt{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n-2)^2}{(2n-1)!}\sqrt{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n-2)^2\,(2n)^2}{(2n)!}\,\frac{\sqrt{2n}}{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2^2\cdot 1^2\right)\left(2^2\cdot 2^2\right)\left(2^2\cdot 3^2\right)\cdots\left(2^2\cdot(n-1)^2\right)\left(2^2\cdot n^2\right)}{(2n)!\sqrt{2n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2\,2^{2n}}{(2n)!\sqrt{2n}}
\end{aligned}$$

και αυτό αποδεικνύει την (5.33). □

Θα αποδείξουμε ότι ο αριθμός π είναι άρρητος. Είναι προφανές ότι αν αποδειχθεί ότι το π^2 είναι άρρητος αριθμός, τότε συνεπάγεται ότι και ο αριθμός π είναι άρρητος.

Πρόταση 5.74 (Ο αριθμός π είναι άρρητος). *Ο αριθμός π^2 είναι άρρητος. Επομένως και ο αριθμός π είναι άρρητος.*

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x) := \frac{x^n(1-x)^n}{n!}\,,$$

όπου $n \in \mathbb{N}^*$ (η επιλογή του n θα γίνει αργότερα). Η f είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $2n$ και για $0 < x < 1$ είναι

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}\,. \tag{5.35}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$f(x) = \sum_{k=n}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n} c_k x^k = \frac{1}{n!}\left(c_n x^n + c_{n+1}x^{n+1} + \cdots + c_{2n}x^{2n}\right)\,,$$

όπου οι συντελεστές c_k είναι ακέραιοι αριθμοί. Επειδή από τον ορισμό της f είναι $f(x) = f(1-x)$, για την k παράγωγο έχουμε $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$ και κατά συνέπεια $f^{(k)}(0) = (-1)^k f^{(k)}(1)$, $k \geq 0$. Επομένως

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} \frac{k!c_k}{n!} \in \mathbb{Z} & \text{αν } n \leq k \leq 2n, \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad \text{και} \quad f^{(k)}(1) = \begin{cases} (-1)^k \frac{k!c_k}{n!} \in \mathbb{Z} & \text{αν } n \leq k \leq 2n, \\ 0 & \text{διαφορετικά}\,. \end{cases}$$

Δηλαδή $f^{(k)}(0), f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$, για κάθε $k \geq 0$. Υποθέτουμε τώρα ότι ο αριθμός π^2 είναι ρητός, έστω $\pi^2 = a/b$, όπου τα a και b είναι θετικοί ακέραιοι και ορίζουμε τη συνάρτηση F ως εξής

$$F(x) := b^n \left[\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)} - \pi^{2n-6} f^{(6)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)\right].$$

Από τα προηγούμενα είναι προφανές ότι τα $F(0)$ και $F(1)$ είναι ακέραιοι αριθμοί. Παρατηρούμε επίσης, μετά από πράξεις, ότι

$$\begin{aligned} \big(F'(x)\sin \pi x - \pi F(x)\cos \pi x\big)' &= \big(F''(x) + \pi^2 F(x)\big)\sin \pi x \\ &= b^n \pi^{2n+2} f(x)\sin \pi x = \pi^2 a^n f(x) \sin \pi x\,. \end{aligned}$$

Επομένως είναι

$$\pi a^n f(x) \sin \pi x = \left(\frac{F'(x)\sin \pi x}{\pi} - F(x)\cos \pi x\right)',$$

οπότε

$$\pi a^n \int_0^1 f(x)\sin \pi x\,dx = \left(\frac{F'(x)\sin \pi x}{\pi} - F(x)\cos \pi x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = F(1) + F(0)\,.$$

Ο αριθμός $F(1) + F(0)$ είναι ακέραιος και από την (5.35) έχουμε

$$0 < \pi a^n f(x) \sin \pi x < \frac{\pi a^n}{n!},$$

για $0 < x < 1$. Άρα

$$0 < \pi a^n \int_0^1 f(x) \sin \pi x\,dx < \frac{\pi a^n}{n!}$$

και ισοδύναμα

$$0 < F(1) + F(0) < \frac{\pi a^n}{n!}\,.$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi a^n}{n!} = 0$, οπότε μπορούμε να πάρουμε το n αρκετά μεγάλο έτσι ώστε $\frac{\pi a^n}{n!} < 1$. Δηλαδή για μεγάλο $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε

$$0 < F(1) + F(0) < \frac{\pi a^n}{n!} < 1\,.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο επειδή το $F(1) + F(0)$ είναι ακέραιος αριθμός. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι ο αριθμός π^2 είναι ρητός. Άρα ο αριθμός π^2 είναι άρρητος.

Σημείωση. Αν $a_n := \frac{\pi a^n}{n!}$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\pi a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0$$

και από το κριτήριο D'Alembert για σειρές (κριτήριο του λόγου) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi a^n}{n!}$ συγκλίνει. Άρα $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi a^n}{n!} = 0$. □

Σε πολλές εφαρμογές, ειδικά στη Στατιστική και στη Θεωρία Πιθανοτήτων, είναι αναγκαίο να προσεγγίζουμε το $n!$, για μεγάλα $n \in \mathbb{N}^*$, με μια στοιχειώδη συνάρτηση του n. Αυτό επιτυγχάνεται με τον παρακάτω τύπο που οφείλεται στον Stirling [James Stirling (1692–1770)].

Πρόταση 5.75 (Τύπος Stirling). *Αν* $n \in \mathbb{N}^*$, *τότε* $n! = \alpha_n n^{n+1/2} e^{-n}$, *όπου* (α_n) *ακολουθία με* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \sqrt{2\pi}$. *Επομένως*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}} = 1\,, \text{ δηλαδή } \quad n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}\,.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x\ln x - x$, $x > 0$, η οποία είναι μια παράγουσα της λογαριθμικής συνάρτησης, δηλαδή $f'(x) = \ln x$. Από τον τύπο του Taylor (μέχρι τρίτης τάξης) για $k \in \mathbb{N}^*$ έχουμε

$$f(x) = f(k) + (x-k)f'(k) + \frac{(x-k)^2}{2} f''(k) + \frac{(x-k)^3}{6} f'''(c)\,,$$

για κάποιο c μεταξύ k και x. Επειδή $f''(x) = 1/x$ και $f'''(x) = -1/x^2$, για $x = k-1$ παίρνουμε

$$f(k-1) = f(k) - \ln k + \frac{1}{2k} + \frac{1}{6c_k^2} \Leftrightarrow \ln k - f(k) + f(k-1) - \frac{1}{2k} = \frac{1}{6c_k^2}\,,$$

όπου $c_k \in (k-1, k)$. Αν $u_k := \ln k - f(k) + f(k-1) - 1/2k$, $k \geq 2$, τότε

$$\frac{1}{6k^2} < u_k < \frac{1}{6(k-1)^2}\,.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} u_k$ θα συγκλίνει. Όμως,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} u_k &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} u_k \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \left[\ln k - (f(k) - f(k-1)) - \frac{1}{2k}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\ln n! - f(n) + f(1) - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\ln n! - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n - 1 - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)\right]\end{aligned}$$

και ως γνωστόν το $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) - 1 = \gamma - 1$ υπάρχει. Τότε και το $\lim_{n\to\infty} a_n$ υπάρχει, όπου $a_n := \ln n! - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n - 1$. Έστω $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Αν $\alpha_n := e^{1-a_n}$, είναι $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ με $\alpha = e^{1-a} \neq 0$ και

$$n! = \alpha_n n^{n+1/2} e^{-n}\,.$$

Για να αποδείξουμε ότι $\alpha = \sqrt{2\pi}$, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (5.33) του Wallis (Παράδειγμα 5.73). Πράγματι, επειδή $n! = \alpha_n n^{n+1/2}e^{-n}$ και $(2n)! = \alpha_{2n} 2^{2n+1/2} n^{2n+1/2} e^{-2n}$, από τον τύπο (5.33) έχουμε

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n^2 n^{2n+1} e^{-2n} 2^{2n}}{\alpha_{2n} 2^{2n+1/2} n^{2n+1/2} e^{-2n}\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}\sqrt{2}} = \frac{\alpha^2}{\alpha\sqrt{2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\,.$$

Άρα $\alpha = \sqrt{2\pi}$. □

5.7 Ασκήσεις

1. Υπολογίστε το όριο
$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{e^x} \frac{1}{4+t^2}\,dt\,.$$

2. Υπολογίστε το όριο
$$\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} \int_{0}^{x(1+\ln x)} e^{1/t}\,dt\,.$$

3. Υπολογίστε το όριο
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} \int_{0}^{x^2} \sin(\sqrt{t})\,dt\,.$$

4. Αν $n \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι
$$0.5 < \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}\,dx \leq \pi/6 \approx 0.5236\,.$$

5. Αν
$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}}\,dx\,,$$
να αποδειχθεί ότι $1/2 < I < \pi/6$.

6. Δείξτε ότι
$$3\left(\sqrt[3]{10^9+1}-\sqrt[3]{2}\right) < \sum_{n=2}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}} < 3\left(\sqrt[3]{10^9}-1\right) = 2997$$
και επομένως το ακέραιο μέρος του αθροίσματος $\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}}$ ισούται με 2997.

7. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ότι η παράγωγος f' είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[1,x]$, για κάθε $x \geq 1$. Αν το ακέραιο μέρος $[x] = m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι
$$\begin{aligned}\int_1^x [t]f'(t)\,dt &= \sum_{k=1}^{m-1}\int_k^{k+1}[t]f'(t)\,dt + \int_m^x mf'(t)\,dt\\ &= mf(x) - \sum_{k=1}^{m} f(k) = [x]f(x) - \sum_{n\leq x} f(n)\,.\end{aligned}$$

8. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με
$$|f'(x)| \leq M < +\infty\,, \quad \forall x \in [a,b]\,.$$
Έστω $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, διαμέριση του $[a,b]$ με
$$x_k - x_{k-1} \leq \frac{1}{b-a}\,, \quad k = 1,2,\ldots,n\,.$$
Αν $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$, δείξτε πρώτα ότι
$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| \leq M\int_{x_{k-1}}^{x_k} |x-\xi_k|\,dx \leq \frac{M}{2}(x_k - x_{k-1})^2$$
και στη συνέχεια ότι
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| \leq \frac{M}{2}\,.$$

9. Δείξτε ότι
$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\, dx = \frac{\pi}{6}\,.$$

10. Αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$, δείξτε ότι
$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx = \frac{\pi(b-a)^2}{8}\,.$$

11. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$$\int_{-1}^1 x(1-x)^n\, dx\,.$$

12. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(e^x+1)(x^2+1)}\, dx\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αντικατάσταση $x = -t$.

13. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$$\int_{1/2}^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) \arctan x\, dx\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα: $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2,\ x > 0$.

14. (α΄) Για κάθε $x, y \geq 0$ δείξτε ότι
$$\begin{aligned}\arctan(x+y) &= \int_0^{x+y} \frac{1}{1+t^2}\, dt\\ &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_x^{x+y} \frac{1}{1+t^2}\, dt \leq \arctan x + \arctan y\,.\end{aligned}$$

(β΄) Αν $\delta : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,\infty)$ με $\delta(x,y) := \arctan|x-y|$, δείξτε ότι η δ είναι μία μετρική στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή

$$\begin{aligned}(i)&\quad \delta(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y\,.\\ (ii)&\quad \delta(x,y) = \delta(y,x)\,,\quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}\,.\\ (iii)&\quad \delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)\,,\quad \text{για κάθε } x, y, z \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

15. Αν $a > 0$, να δείξετε ότι
$$\int_{-a}^a \ln(\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x})\, dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^a \ln(2a + 2\sqrt{a^2-x^2})\, dx = a\left(\ln 2a + \frac{\pi}{2} - 1\right)\,.$$

16. (α΄) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι

$$I_n = \int_0^{\pi} (\alpha t^2 + \beta t)\cos(nt)\,dt = (-1)^n \frac{2\alpha\pi + \beta}{n^2} - \frac{\beta}{n^2}\,.$$

(β΄) Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία είναι $I_n = \frac{1}{n^2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Αν $f(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2}\,dt$, να αποδειχθεί ότι

$$6\int_0^1 x^2 f(x)\,dx - 2\int_0^1 e^{x^2}\,dx = 1 - e\,.$$

18. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

19. Να δείξετε ότι

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\,dx = 2\sqrt{2}E(1/\sqrt{2}) - \sqrt{2}F(1/\sqrt{2})\,,$$

όπου $E(k)$ και $F(k)$ είναι τα **ελλειπτικά ολοκληρώματα** δεύτερου και πρώτου είδους αντίστοιχα με

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\,dt \text{ και } F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}}\,dt\,.$$

Υπόδειξη. Αντικατάσταση $\cos x = \cos^2 t \Leftrightarrow x = \arccos(\cos^2 t)$.

20. Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν

$$\int_0^1 (f(x)^2 + g(x)^2 + 2f(x)^2 g(x)^2)\,dx = 2\int_0^1 (f(x) + g(x))f(x)g(x)\,dx$$

και οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ταυτοτικά μηδέν, δείξτε ότι $f(x) = g(x) = 1$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Υπόδειξη. Είναι $\int_0^1 \{[f(x)(1 - g(x))]^2 + [g(x)(1 - f(x))]^2\}\,dx = 0$.

21. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Αν $m = \min\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ και $M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)^2\,dx \le -mM\,.$$

Υπόδειξη. $(M - f(x))(f(x) - m) \ge 0$, για κάθε $x \in [a,b]$.

22. Έστω f συνάρτηση κλάσης C^1 στο διάστημα $[0,1]$, τέτοια ώστε
$$f(0) = f(1) = 0 \text{ και } \int_0^1 |f'(x)|\,dx = 1\,.$$
Δείξτε ότι $|f(1/2)| \leq 1/2$.

23. Αν η φραγμένη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη και $b > 0$, τότε για κάθε $a < b$ είναι
$$\lim_{n\to\infty} n^a \int_0^{1/n^b} f(x)\,dx = 0\,.$$

24. Αν $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, να αποδειχθεί ότι
$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(x-t)\,dx\right) = g(-t)\,.$$

25. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και
$$\int_0^1 f(xt)\,dt = 0\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$
Δείξτε ότι $f \equiv 0$.

26. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, συνάρτηση κλάσης C^1. Δείξτε ότι
$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)| \leq \int_a^b |f'(t)|\,dt + \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|\,dt\,.$$
Υπόδειξη. Αν $|f(x_1)| = \min\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ και $|f(x_2)| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, τότε
$$|f(x_2)| \leq |f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_1)|\,.$$

27. Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και τέτοια ώστε
$$f(x)^2 = 2\int_0^{\sqrt{x}} f(t^2)\,dt\,.$$
Δείξτε ότι $f(x) = \sqrt{x}$.

28. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε
$$\int_0^1 (f(x^2))^2\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{3}\,. \tag{$*$}$$
Υπόδειξη. Δείξτε ότι η $(*)$ είναι ισοδύναμη με την
$$\int_0^1 \left(\frac{f(x)}{\sqrt[4]{x}} - \sqrt[4]{x}\right)^2 dx = 0\,.$$

29. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την ταυτότητα

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(b) - f(a)\,, \quad \text{για κάθε } a, b \in \mathbb{Q}\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει ακολουθία (ρ_n) ρητών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} \rho_n = x$.

30. Αν η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και

$$F(x) := \int_0^1 |x-t| f(t)\,dt\,, \quad x \in [0,1]\,,$$

να υπολογιστεί η $F''(x)$.

31. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $0 < f'(x) \leq 1$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \geq 0$ είναι

$$\int_0^x f(t)^3\,dt \leq \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2\,.$$

32. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^\pi e^{-x\sin t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} 2\int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}\,dt = 0\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Είναι

$$\sin t \geq \frac{2t}{\pi}\,, \quad \text{για κάθε } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\,.$$

33. Έστω $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση κλάσης C^1 στο $(0,\infty)$ και τέτοια ώστε $\lim_{x\to\infty} xf'(x) = 1$. Να υπολογιστεί, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Επειδή $\lim_{x\to\infty} xf'(x) = 1$, υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε $f'(x) > \frac{1}{2x}$, $\forall x \geq a$.

34. Υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$f(0) = 1 \text{ και } f'(x) \geq f(x)^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R};$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν τέτοια συνάρτηση f υπάρχει, δείξτε ότι $f(x) \geq 1/(1-x)$ για κάθε $x \in [0,1)$.

35. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση κλάσης C^2 στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε $f(x) + f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$f(x) + f(x+\pi) \geq 0\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^\pi \left[f(x+t) + f''(x+t)\right] \sin t\,dt = f(x+\pi) + f(x)\,.$$

36. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση κλάσης C^2 και τέτοια ώστε

$$f \not\equiv 0,\ f(a) = f(b) = 0,\ f(x) + f''(x) \leq 0 \text{ και } f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]\,.$$

Δείξτε ότι $b - a \leq \pi$.

Υπόδειξη. Δείξτε ότι

$$\int_0^{\pi} \big[f(a+t) + f''(a+t)\big] \sin t\, dt = f(a+\pi)\,.$$

Να συμπεράνετε ότι $f(a+\pi) = 0$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι η υπόθεση $[a, a+\pi] \subset [a,b]$ οδηγεί σε άτοπο.

37. Αν η $f : [0,1] \to (0,\infty)$ είναι συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\, dx\right) \geq 1\,.$$

38. Αν η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, είναι κλάσης C^1 με $f(a) = 0$, δείξτε ότι

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \sqrt{b-a}\left(\int_a^b (f'(t))^2\, dt\right)^{1/2}.$$

39. Αν η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, είναι κλάσης C^1 με $f(b) = 0$, δείξτε ότι

$$\int_a^b f(t)^2\, dt \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b (f'(t))^2\, dt\,. \qquad (*)$$

Δείξτε ότι η ισότητα ισχύει στην $(*)$, αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Υπόδειξη. Είναι $f(x) = -\int_x^b f'(t)\, dt$, $\forall x \in [a,b]$. Δείξτε ότι

$$f(x)^2 \leq (b-x) \int_a^b (f'(t))^2\, dt\,, \quad \forall x \in [a,b]\,.$$

40. Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda \neq \mu$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda \int_a^c f(x)\, dx + \mu \int_c^b f(x)\, dx = 0\,, \quad \text{για κάθε } c \in (a,b)\,,$$

τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

41. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $p_1, \ldots, p_n > 0$. Να δείξετε ότι για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ υπάρχει $x \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$p_1 \int_x^{x_1} f(t)\, dt + \cdots + p_n \int_x^{x_n} f(t)\, dt = 0\,.$$

Υπόδειξη. Βλέπε κεφάλαιο 2, άσκηση 19.

42. Να αποδειχθεί ότι
$$\inf_{x>0}\int_0^1 t^2|t-x|\,dt = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

43. Αν
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(n\theta)}{\sin\theta}\,d\theta\,, \quad n\in\mathbb{N}\,,$$
να αποδειχθεί ότι
$$I_{n+1}-I_n = \frac{1}{2n+1}$$
και να συμπεράνετε ότι
$$I_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\,.$$

44. Αν
$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos nx}{1-\cos x}\,dx\,, \quad n\in\mathbb{N}^*\,,$$
να αποδειχθεί ότι
$$I_n = \frac{1}{2}\left(I_{n+1}+I_{n-1}\right)\,, \quad n\geq 2$$
και να υπολογιστεί το I_n.

45. Έστω $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx$, $n\in\mathbb{N}$.

(α΄) Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

(β΄) Αν $A_n = \int_0^c x^n\ln(1+x^2)\,dx$ και $B_n = \int_c^1 x^n\ln(1+x^2)\,dx$, όπου $c\in(0,1)$, δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n} = 0\,.$$

46. Αν
$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\,dx\,, \quad n\in\mathbb{N}^*\,,$$
να αποδειχθεί ότι
$$I_n = \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx\,.$$
Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι $I_n = I_{n-2}$, για κάθε $n\geq 2$ και να υπολογιστεί το I_n.

47. (*Αυτή η άσκηση είναι κλασική*) Έστω
$$I_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt\,, \quad n\in\mathbb{N}^*\,.$$

(α΄) Δείξτε ότι $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, για κάθε $n \geq 2$.

(β΄) Δείξτε ότι $nI_{n-1}I_n = \pi/2$, για κάθε $n \geq 1$.

(γ΄) Δείξτε ότι η ακολουθία (I_n) είναι φθίνουσα με

$$\frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\,.$$

(δ΄) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} I_n^{\alpha}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\alpha > 2$.

48. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι

(α΄) αν $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι περιττή,

(β΄) αν $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι άρτια.

49. Έστω ότι η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$ για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν.

50. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω

$$g(x) := f(x)\int_0^x f(t)\,dt\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Αν η g είναι φθίνουσα συνάρτηση, δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

51. Έστω $f : [0,a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f(x) \geq \lambda \int_0^x f(t)\,dt \ \text{ για κάθε } x \in [0,a]\,,$$

όπου $\lambda > 0$. Δείξτε ότι η $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,a]$.

Υπόδειξη. Παραπέμπουμε στην απόδειξη του παραδείγματος 5.39.

52. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$|f(x)| \leq \int_0^x f(t)\,dt \ \text{ για κάθε } x \in [0,1]\,.$$

Δείξτε ότι η f είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν.

Υπόδειξη. Παραπέμπουμε στην απόδειξη του παραδείγματος 5.39.

53. Έστω $f:[0,T]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f(x)\leq a+b\int_0^x f(t)\,dt \text{ για κάθε } x\in[0,T]\,,$$

όπου $a\in\mathbb{R}$, $b\geq 0$ και $T>0$. Δείξτε ότι η $f(x)\leq ae^{bx}$ για κάθε $x\in[0,T]$.

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, θεωρείστε τη συνάρτηση

$$h(x):=e^{-bx}\left(F(x)+\frac{a}{b}\right)\,,\quad x\in[0,T]\,.$$

54. (α') Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^x \sin\sqrt{t}\,dt,\ x\geq 0$.

(β') Έστω $a_n=\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2$ και $b_n=4n^2\pi^2$, $n\in\mathbb{N}^*$. Να υπολογιστούν τα όρια

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{a_n}\sin\sqrt{t}\,dt \quad\text{και}\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{b_n}\sin\sqrt{t}\,dt\,.$$

Υπάρχει το όριο $\lim_{R\to\infty}\int_0^R \sin\sqrt{t}\,dt$;

55. Αν $a\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι

$$\int_1^x \frac{1}{t+t^a}\,dt=\begin{cases}\frac{1}{1-a}[\ln(x^{1-a}+1)-\ln 2] & \text{αν } a\neq 1,\\ \frac{1}{2}\ln x & \text{αν } a=1\,.\end{cases}$$

<u>*Εφαρμογή*</u>. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t+t^{\sqrt{2}}}\,dt\,.$$

56. Αν $b_n=\int_n^{n+1}\frac{\sin(\pi x)}{x}\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$, να αποδειχθεί ότι

$$b_n=\frac{1}{\pi}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}-\frac{1}{\pi}\int_n^{n+1}\frac{\cos(\pi x)}{x^2}\,dx$$

και στη συνέχεια να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^\infty b_n$.

57. Έστω $f:[0,1]\to[0,\infty)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση της οποίας η πρώτη παράγωγος είναι φθίνουσα συνάρτηση και τέτοια ώστε $f(0)=0$ και $f'(1)>0$. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1\frac{1}{f^2(x)+1}\,dx\leq\frac{\arctan(f(1))}{f'(1)}\leq\frac{f(1)}{f'(1)}\,.$$

58. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$ και συνεχώς παραγωγίσιμη. Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f, να αποδειχθεί ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx = bf(b) - af(a)\,.$$

Εφαρμογή. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 \sqrt[q]{1-x^p}\,dx = \int_0^1 \sqrt[p]{1-x^q}\,dx\,, \qquad p, q > 0\,.$$

59. (α΄) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$,

$$\ln x = \inf_{a>0} \left(\frac{x}{a} + \ln a - 1 \right)\,.$$

(β΄) Έστω $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$. Χρησιμοποιώντας το (α΄) δείξτε ότι

$$\int_0^1 f(x) \ln(g(x))\,dx \leq \ln \left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \right)\,.$$

60. Αν $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$ στο διάστημα $[0, 1]$.

(α΄) Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1\,, \quad \text{αν } x \in [0, 1)$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0 \neq 1 = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx\,.$$

(β΄) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n(x)|\,dx = \infty$, δηλαδή αποκλίνει.

Υπόδειξη. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 |f_n(x)|\,dx \geq \int_0^{n/(n+1)} f_n(x)\,dx = \frac{1}{(1+1/n)^n} \cdot \frac{1}{n+1} > \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n+1}$$

61. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ ώστε

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} \cos \xi\,.$$

62. Υποθέτουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, είναι τέτοια ώστε

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\,.$$

Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο στο διάστημα $[a, b]$, δηλαδή ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ με $f(\xi) = \xi$.

63. Αν η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 f(x)x^2\, dx = \frac{1}{3} f(\xi)\,, \quad \text{για κάποιο } \xi \in [0, 1]\,.$$

Εφαρμογή. Αν $f(x) = \arctan x$, να βρεθεί η τιμή του $\xi \in [0, 1]$.

64. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ είναι

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = 0\,.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [a, b]$.

65. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $a > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $h_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$h_a(x) := \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t)\, dt\,.$$

Δείξτε ότι $\lim_{a \to 0^+} h_a(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

66. Αν $n \in \mathbb{N}$, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{n \arcsin(x/2)}{x + n}\, dx\,.$$

67. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{a \to 0} \int_0^{\pi/2} \cos(a \sin x)\, dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

68. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{u \to 0^+} \int_u^{2u} \frac{\cos x}{x}\, dx\,.$$

Υπόδειξη. Αντικατάσταση $x = tu$.

69. Δείξτε ότι

$$\lim_{a\to 0^+} \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + a\cos^2 x}}\, dt = \ln 2\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + a\cos^2 x}}\, dx - \int_0^{\pi/2} \tan(x/2) \right| dx \\ = &\left| a\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x \tan(x/2)}{\sqrt{\sin^2 x + a\cos^2 x}\left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x + a\cos^2 x}\right)}\, dx \right| \\ \leq &\ \sqrt{a}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{4\cos^2(x/2)}\, dx\,. \end{aligned}$$

70. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0, δείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^x \frac{x}{x^2+t^2} f(t)\, dt = \frac{\pi}{4} f(0)\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αντικατάσταση $t = xu$.

71. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{\arcsin t}\, dt\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Είναι

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{e^t}{\arcsin t} - \frac{1}{t} \right) = 1\,.$$

72. Αν η συνάρτηση $f:[1,e]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)\, dx = \int_1^e \frac{f(x)}{x}\, dx\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Αντικατάσταση $t = x^n$.

73. Αν η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, να βρεθούν όλα τα $a\in\mathbb{R}$ για τα οποία το όριο $\lim_{n\to\infty} n^a \int_0^1 e^{-nx} f(x)\, dx$ υπάρχει και στη συνέχεια να υπολογιστεί το όριο.

74. Αν η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, δείξτε ότι

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha \int_0^1 x^{\alpha-1} f(x)\, dx = f(0)\,.$$

75. Αν η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\,dx = f(1)\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>.

$$n \int_0^1 x^n f(x)\,dx = \frac{n}{n+1} f(1) + n \int_0^1 x^n (f(x) - f(1))\,dx\,.$$

76. Αν η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^1 και τέτοια ώστε $f(1) = f'(1) = 0$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>.

$$n^2 \int_0^1 x^n f(x)\,dx = -\frac{n^2}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x)\,dx\,.$$

77. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x\,dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Έστω $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Για την απόδειξη χρησιμοποιείστε τα παρακάτω βήματα:

(i) Για κάθε $x > 0$

$$0 \leq \int_0^{\varepsilon} (\sin t)^x\,dt \leq \varepsilon\,.$$

(ii) Για κάθε $x > 0$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) (\sin\varepsilon)^x \leq \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x\,dt \leq \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\,.$$

(iii) Επειδή $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) (\sin\varepsilon)^x = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (0,\delta)$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) (\sin\varepsilon)^x > \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon\,.$$

(iv) Να συμπεράνετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (0,\delta)$

$$\frac{\pi}{2} - 2\varepsilon < \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x\,dt \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Βιβλιογραφία

[1] A. G. Aksoy, M. A. Khamsi, *A Problem Book in Real Analysis*, Springer, 2010.

[2] Σ. Αργυρός, *Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης*, Ε.Μ. Πολυτεχνείο, 2011.

[3] R. G. Bartle, D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis (Fourth Edition)*, John Wiley & Sons, Inc., 2010.

[4] P. Biler, A. Witkowski, *Problems in Mathematical Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.

[5] G. W. Bluman, *Problem book for first year calculus*, Springer–Verlag, New York, 1984.

[6] A. Browder, *Mathematical Analysis: An introduction*, Springer–Verlag, New York, 1996.

[7] W. J. Caczor and M. T. Nowak , *Problems in Mathematical Analysis I : Real Numbers, Sequences and Series* , Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2000.

[8] W. J. Caczor and M. T. Nowak , *Problems in Mathematical Analysis II : Continuity and Differentiation*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2001.

[9] W. J. Caczor and M. T. Nowak , *Problems in Mathematical Analysis III : Integration* , Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2003.

[10] C.H. Edwards, Jr. , *The historical development of the calculus* (3rd printing), Springer–Verlag, 1994.

[11] J. Franchini, J.-C. Jacquens, *Exercises Corriges de Maths Supérieures Analyse*, Ellipses, Paris, 1993.

[12] J. Franchini, J.-C. Jacquens, *Analyse 1*, Ellipses, Paris, 1996.

[13] S. Francinu, H. Gianella and S. Nicolas, *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures : Analyse. Tome I*, Cassini, Paris, 2007.

[14] S. Francinu, H. Gianella and S. Nicolas, *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures : Analyse. Tome II*, Cassini, Paris, 2009.

[15] S. Francinu, H. Gianella and S. Nicolas, *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures : Analyse. Tome III*, Cassini, Paris, 2010.

[16] Ε. Γαλανής, *Εισαγωγή στην Πραγματική Ανάλυση*, Εκδόσεις διηνεκές, 1991.

[17] E. D. Gaughan, *Introduction to Analysis(Fifth Edition)*, Amer. Math. Soc., 1998.

[18] L. Girard, *Maths PTSI-PT Exercises Corriges*, Ellipses, Paris, 1998.

[19] R. A. Gordon, *Real Analysis: A first course(2nd ed.)*, Addison Wesley Publishing Company, 2002.

[20] O. Hijab, *Introduction to Calculus and Classical Analysis*, Springer–Verlag, New York, 1997.

[21] G. Klambauer, *Problems and Propositions in Analysis* , Marcel Dekker, Inc., New York, 1979.

[22] K. Knopp, *Theory and applications of infinite series*, Dover Publications, 1990.

[23] J. E. Marsden, M. J. Hoffman, *Elementary Classical Analysis (2nd ed.)*, W.H. Freeman, New York, 1993.

[24] J.-M. Monier, *Analyse MPSI (édition: 5e)*, Dunod, Paris, 2006.

[25] J.-M. Monier, *Analyse MPSI- 200 Exercises Développés- 550 Exercises D'Entrainment Rappels de cours (édition: 2e)*, Dunod, Paris, 2003.

[26] Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός, I, IIα, IIβ*, Εκδότης: Συμμετρία, 1999.

[27] D. Paine, *Mathematical Notes: Visualizing Uniform Continuity*, Amer. Math. Monthly **75** (1968), no. 1, 44–45.

[28] Γ. Παντελίδης, *Ανάλυση Ι*, Εκδότης: Ζήτη, 2008.

[29] G. Pólya, G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis I*, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.

[30] Θ. Ρασσιάς, *Μαθηματική Ανάλυση Ι*, Εκδόσεις Συμεών, 2011.

[31] A.R. Rajwade; A.K. Bhandari, *Surprises and Counterexamples in Real Function Theory*, Hindustan Book Agency (India), 2007.

[32] K.A. Ross , *Elementary Analysis: The Theory of Calculus*, Series: Undergraduate Texts in Mathematics, (2nd. ed.), Springer, 2013.

[33] P.N. de Souza, J.-N. Silva , *Berkeley problems in mathematics* (3rd. ed.), Springer–Verlag, New York, 2004.

[34] M. Spivak, *Calculus* (3rd. ed.), Cambridge University Press, 2008.

[35] M. Spivak, *Answer book for Calculus* (3rd. ed.), Publish or Perish Inc, Houston, Texas, 1996.

[36] J.M. Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class: An introduction to the art of inequalities*, Cambridge University Press, 2004.

[37] M. Stoll, *Introduction to Real Analysis(2nd Edition)*, Pearson, 2000.

[38] K. R. Stromberg, *An introduction to classical Real Analysis*, Chapman & Hall, 1981.

[39] T. Tao, *Analysis I*, Hindustan Book Agency (India), 2006.

[40] Π. Τσεκρέκος, *Μαθηματική Ανάλυση*, Εκδόσεις: Συμμετρία, 2010.

[41] W. R. Wade, *An Introduction to Analysis*(4th Edition), Pearson, 2010.

[42] *The William Lowell Putnam Mathematical Competition: Problems & Solutions : 1938–1964*, A.M. Gleason, R.E. Greenwood and L.M. Kelly, Mathematical Association of America, 2003.

[43] *The William Lowell Putnam Mathematical Competitions: Problems & Solutions : 1965-1984*, G.L. Alexanderson, L.F. Klosinski and L.C. Larson (Editors), Mathematical Association of America, 2003.

[44] *The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985-2000: Problems Solutions, and Commentary*, K.S. Kedlaya, B. Poonen and R. Vakil, Mathematical Association of America, 2002.

[45] P. Walker, *Examples and Theorems in Analysis*, Springer–Verlag, 2004.

[46] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.

Ευρετήριο